ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК № 2, 2015

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

К. К. Коксалов[1], А. А. Баймухаметов[2]

[1]*Казахский национальный педагогический университет,*
E-mail: *kkapal@mail.ru, ул. Толе би, 86, 050012, г. Алматы, Казахстан*
[2]*Институт механики и машиноведения МОН РК,*
E-mail*: abayab@mail.ru, ул. Курмангазы, 29, 050010, г. Алматы, Казахстан*

Исследуется устойчивость многослойной пластины, состоящей из жестких и мягких слоев. Жесткие слои, обладающие изгибной жесткостью, воспринимают краевые усилия, а мягкие слои выполняют роль связей между ними и работают на поперечный сдвиг и обжатие. Используя принцип сглаживания, конечные разности для перемещений в выражениях деформаций заменены соответствующими дифференциалами и получены приближенные уравнения устойчивости в частных производных. Найдена формула для критического усилия.

Деформация, пластина, напряжение, устойчивость

STABILITY OF A SANDWICH PLATE

K. K. Koksalov[1], A. A. Baimukhametov[2]

[1]*Kazakh National Pedagogical University,*
E-mail: *kkapal@mail.ru, 86 Tole bi St, 050012 Almaty, Republic of Kazakhstan*
[2]*Institute of Mechanics and Machine Engineering, RK Ministry of Education and Science,*
E-mail: *abayab@mail.ru, 29 Kurmangazy St, 050010 Almaty, Republic of Kazakhstan*

Under analysis is the stability of a sandwich plate composed of stiff and soft layers. The stiff layers with exceedignly high flexural rigidity undertake boundary forces while the soft layers being the links of the stiff layers work in transverse shift and compression. Using a smoothing principle, finite differences for displacements in the expressions of strains are replaced by the relevant differentails, and the approximated euqations of stability are derived in terms of partial derivatives. The critical force formula is found.

Deformation, plate, stress, stability

В работе [1] выведены уравнения устойчивости многослойной пластины в условиях плоской деформации при двустороннем сжатии:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + K_4^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial z_1}\right) = 0, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - K_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) - K_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + K_3^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где

$$K_1^2 = \frac{12G_2\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1\rho^3(1-\rho)}, K_2^2 = \frac{12E_2\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1\rho^3(1-\rho)},$$

$$K_3^2 = \frac{12\left(1-\nu_1^2\right)P}{E_1\rho^2} = K^2 P, K_4^2 = \frac{G_2\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1\rho(1-\rho)},$$

$\rho = \dfrac{h_1}{h}, h = h_1 + h_2, E_2 = \dfrac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2}$ — трансверсальный модуль, G_2 — модуль сдвига, ν_2 — коэффициент Пуассона, h_2 — толщина мягкого слоя; E_1 — модуль упругости, h_1 — толщина жесткого слоя; $x_1 = \dfrac{x}{h}, z_1 = \dfrac{z}{h}$; u, w — горизонтальные и вертикальные перемещения; $P = ph_1$ — краевое давление.

Определим решения уравнений (1) при граничных условиях:

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ x_1 = \frac{b}{h},$$

$$w = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \text{ при } z_1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \text{ при } z_1 = \frac{H}{h},$$

где b — длина; H — толщина пластины.

Для определения критического усилия исследуем нетривиальные решения системы уравнений (1) при граничных условиях (2). Введем функцию перемещений $\Phi(x_1, z_1)$ по формулам:

$$u(x_1, z_1) = -K_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial z_1},\ w(x_1, z_1) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + K_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2}. \tag{3}$$

При этом первое уравнение системы (1) обращается в тождество а второе уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^6} + K_4^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^4 \partial z_1^2} + \left(K_3^2 - K_2^1\right)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left(K_4^2 K_3^2 - K_2^2\right)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial z_1^2} - K_4^2 K_2^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z_1^4} = 0. \tag{4}$$

Запишем граничные условия:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + K_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} = 0,\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + K_4^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial z_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial z_1} = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ x_1 = \frac{b}{h}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + K_4^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} = 0,\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} = 0 \text{ при } z_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial z_1} + K_4^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z_1^3} = 0,\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} = 0 \text{ при } z_1 = \frac{H}{h} = r. \tag{6}$$

Граничные условиия (5) будут удовлетворены и переменные разделяются, если решение уравнения (4) будем искать в виде

$$\Phi(x_1, z_1) = \Psi(z_1)\sin mx_1, \tag{7}$$

где $m = \dfrac{\pi n h}{b}$ – безразмерное волновое число.

Подставляя (7) в уравнение (4), получим

$$\Psi^{IV}(z_1) - \frac{m_2}{K_2^2}\left(m^2 + \frac{K_2^2}{K_4^2} - K_3^2\right)\Psi^{II}(z_1) + \frac{m^4}{K_2^2 K_4^2}\left(m^2 + K_1^2 - K_3^2\right)\Psi(z_1) = 0. \tag{8}$$

Граничные условия (4) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&-m^2\Psi(0)+K_4^2\Psi^{II}(0)=0, \Psi(0)=0,\\
&-m^2\Psi'(r)+K_4^2\Psi'''(r)=0, \Psi(r)=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Решение уравнения (8) ищем в виде

$$\Psi(z_1)=C\exp(\lambda z_1). \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (8), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^4-\frac{m^2}{K_2^2}\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}+m^2-K_3^2\right)\lambda^2+\frac{m^4}{K_2^2K_4^2}\left(m^2+K_1^2-K_3^2\right)=0 . \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет четыре корня:

$$\lambda_{1,2}=\pm\tau_1 ,\ \lambda_{3,4}=\pm\tau_2 ,$$

где

$$\tau_{1,2}=\frac{m}{\sqrt{2}K_2}\sqrt{\left(m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-K_3^2\right)\pm\sqrt{\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}+K_3^2-m^2\right)^2-\frac{4K_1^2K_2^2}{K_4^2}}} .$$

Запишем общее решение уравнения (8):

$$\Psi(z_1)=C_1ch\tau_1z_1+C_2sh\tau_1z_1+C_3sh\tau_2z_1+C_4sh\tau_2z_1 , \tag{12}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Подставляя общее решение (12) в граничные условия (9), получим $C_1=C_3=0,$ а относительно C_2, C_4 имеем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&C_2\tau_1\left(m^2-K_4^2\tau_1^2\right)ch\tau_1r+C_4\tau_2\left(m^2-K_4^2\tau_2\right)ch\tau_2r=0,\\
&C_2sh\tau_1r+C_4sh\tau_2r=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Из условия существования ненулевого решения системы (13) находим уравнение

$$\tau_2\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)sh\tau_1rch\tau_2r-\tau_1\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)sh\tau_2rch\tau_1r=0 ,$$

или

$$\frac{th\tau_1r}{\tau_1\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)}-\frac{th\tau_2r}{\tau_2\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)}=0 . \tag{14}$$

Функция перемещений $\Phi(x_1, z_1)$, определенная с точностью до одного произвольного параметра l, имеет вид

$$\Phi(x_1,z_1)=l\left(sh\tau_1rsh\tau_2z_1-sh\tau_2rsh\tau_1z_1\right)\sin mx_1 . \tag{15}$$

Подставляя (15) в (3), определим выражение для перемещений:

$$
\begin{aligned}
&u(x_1,z_1)=lmK_4^2\left(\tau_1sh\tau_2rch\tau_1z_1-\tau_2sh\tau_1rch\tau_2z_1\right)\cos mx_1,\\
&w(x_1,z_1)=l\left[\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)sh\tau_2rsh\tau_1z_1-\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)sh\tau_1rsh\tau_2z_1\right]\sin mx_1.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Рассмотрим приближенное решение данной задачи. Пренебрегая горизонтальными перемещениями по сравнению с нормальными, получим уравнение нейтрального равновесия [2]:

$$\frac{\partial^4w}{\partial x_1^4}-\left(K_1^2-K_3^2\right)\frac{\partial^2w}{\partial x_1^2}-K_2^2\frac{\partial^2w}{\partial z_1^2}=0 . \tag{17}$$

Граничные условия:

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0 \text{ при } x_1=0,\ x_1=\frac{b}{h},$$

$$w=0 \text{ при } z_1=0,\ \frac{\partial w}{\partial z_1}=0 \text{ при } z_1=\frac{H}{h}=r. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде

$$w(x_1, z_1)=l\sin kz_1 \sin mx_1, \tag{19}$$

где $k=\dfrac{\pi h}{2H}$; l — параметр прогиба.

Подставляя (19) в уравнение (17), получим формулу

$$P=\frac{1}{K^2}\left(m^2+K_1^2+\frac{k^2K_2^2}{m^2}\right). \tag{20}$$

Для того чтобы найти критическое усилие, надо положить в (10) $m=\dfrac{\pi h}{b}$.

Тогда

$$P_{kp}=\frac{E_1\rho^2 m^2}{12\left(1-\nu_1^2\right)}+\frac{G_2}{\rho(1-\rho)}\left(1+\frac{2(1-\nu_2)k^2}{m^2(1-2\nu_2)}\right). \tag{21}$$

Критическое усилие (21) принимает минимальное значение при

$$\alpha=\left(\frac{6\pi^2 G_2(1-\nu_2)\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1(1-2\nu_2)r^2\rho^3(1-\rho)}\right)^{1/4},$$

равное

$$P_{kp\min}=\frac{G_2}{\rho(1-\rho)}+\frac{\pi}{r}\left[\frac{E_1G_2\rho(1-\nu_2)}{6\left(1-\nu_1^2\right)(1-2\nu_2)(1-\rho)}\right]^{1/2}. \tag{22}$$

Подставляя значение K_3^2 из (20) в характеристическое уравнение (11), убеждаемся, что корни уравнения $\lambda_{1,2}=\pm\tau_1$ — действительные, а $\lambda_{3,4}=\pm\tau_2 i$ — мнимые, где

$$\tau_{1,2}=\frac{m}{\sqrt{2}K_2}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}-m^2+K_3^2\right)^2-\frac{4K_1^2K_2^2}{K_4^2}}\pm\left(m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-K_3^2\right)}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\tau_1^2+\tau_2^2&=\frac{m^2}{K_2^2}\sqrt{\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}-m^2+K_3^2\right)-\frac{4K_1^2K_2^2}{K_4^2}},\\ \tau_1^2-\tau_2^2&=\frac{m^2}{K_2^2}\left(m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-K_3^2\right).\end{aligned} \tag{23}$$

Исключая из этих уравнений K_3^2, получим

$$\tau_1^2+\frac{K_4^2}{m^2}\tau_1^2\tau_2^2-\tau_2^2=\frac{m^2}{K_4^2}-\frac{m^2K_1^2}{K_2^2}. \tag{24}$$

Уравнение (24) имеет вид

$$\frac{thr\tau_2}{\tau_2\left(m^2+\tau_2^2K_4^2\right)}=\frac{thr\tau_1}{\tau_1\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)}. \tag{25}$$

Из уравнения (24) определим значение критического усилия

$$P_{kp}=\frac{1}{K^2}\left[m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-\frac{K_2^2}{m^2}\left(\tau_1^2-\tau_2^2\right)\right]. \tag{26}$$

Величины τ_1 и τ_2 находим из системы уравнений (24), (25).

ВЫВОДЫ

Получены приближенные уравнения устойчивости в частных производных.
Найдена формула для критического усилия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коксалов К. К.** Уравнение устойчивости слоистых пластин регулярного строения // Вестн. КазНПУ. Сер. физ.-мат. — 2013. — № 1.
2. **Коксалов К. К.** Устойчивость эллипсоидальной литосферной оболочки. — Алматы: РИО ВАК РК, 1999.