

**Тойбаев С.Н. Дінасылов А.Д.,
Қойлыбаева Қ.Р.**

ТЕОРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА

Практикум

*Өзіндік жұмыс орындауға
арналған мысалдар және тапсырмалар*

АЛМАТЫ
2016

ӘОЖ 531(076.5)
КБЖ 22.21 я 73
T50

Пікір жазғандар:

Айдосов А.А., д.т.н., профессор
Абдрахимов О.Т., д.т.н., профессор
Темірбеков Е.С., д.т.н., профессор

T50 Тойбаев С.Н. А.Д.Дінасылов, Р.Қ.Қойлыбаева.

Теориялық және қолданбалы механика. Практикум. Өзіндік жұмыс орындауға арналған мысалдар және тапсырмалар – Алматы: Нур-Принт, 2016.–369 б.

ISBN 970-601-7869-56-4

Оқу құралында теориялық және қолданбалы механика пәнінің негіздері, өзіндік жұмыс орындауға арналған мысалдар және тапсырмалары берілген. Оқу материалдарының құрылымы кредиттік технологияны қолданылатындай етіп ұйымдастырылған. Бұл білімді бақылаудың төрт деңгейінде жүргізуге мүмкіндік береді: дәріс деңгейінде – ағымдағы бақылау, блок деңгейінде – аралық бақылау, модуль деңгейінде – белестік бақылау, оқулық деңгейінде – қорытынды бақылау. Білімді бақылау осы деңгейлерге сәйкес құрастырылған тестілер арқылы жүзеге асырылады.

Оқу құралы жоғарғы техникалық оқу орындарының қазақ бөлімдерінде оқитын студенттерге, магистрантарға, докторанттарға, оқытушыларға арналған.

ӘОЖ531(076.5)
КБЖ 22.21 я 73

ISBN 978-601-7869-56-4

© Тойбаев С.Н., 2016
Дінасылов А.Д.,
Қойлыбаева Қ.Р.
© Нур-Принт, 2016

1 ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА

1.1 Статика. Статиканың негізгі ұғымдары мен аксиомалары

Теориялық механиканың зерттеу объектілері ретінде денелердің модельдері алынады: материялық нүкте, механикалық жүйе және абсолют қатты дене.

Материялық нүкте деп өлшемдерін ескермеуге болатын, массасы нүктеде жинақталады деп есептелетін денені айтамыз. Механикалық жүйе деп орналасуы мен қозғалыстары өзара байланысудағы материялық нүктелер жиынтығын айтамыз. Абсолют қатты дене - кез келген нүктелері арасындағы қашықтықтары өзгермейтін дене. Шынында барлық денелер күштер әсерінен өз өлшемдерін және формасын өзгертеді (деформацияланады). Көбінесе сол деформациялар аз болғандықтан, денені абсолют қатты дене деп деформацияларды есепке алмауға болады.

Дененің тепе-теңдік немесе қозғалыс қалпы оның басқа денелермен өзара механикалық әрекеттенуіне тәуелді, осының өлшемі - күш. Күш – вектор, ол шамасымен, бағытымен және түсу нүктесімен сипатталады. Графикалық түрде күш бағытталған түзу кесіндісімен көрсетіледі. Күш бағыты бойындағы түзу күштің әсер ету сызығы деп аталады. Күшті, мысалы \vec{F} деп белгілейміз, сонда $F = |\vec{F}|$ оның модулі. Қатты денеге немесе нүктеге түсетін күштер жиынтығы күштер жүйесі деп аталады. Оны $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ деп белгілейміз.

Егер қатты денеге әсер ететін күштер жүйесін дененің тыныштық немесе қозғалыс қалпын өзгертпей, басқа күштер жүйесіне ауыстыруға болса, олар баламалы күштер жүйелері деп аталады: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$. Егер берілген күштер жүйесі бір ғана күшке баламалы болса, сол күш қарастырылудағы күштер жүйесінің тең әсерлі күші деп аталады. Оны \vec{R}^* деп белгілесек, сонда $\vec{R}^* \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Кез келген күштер жүйесінің тең әсерлісі бола бермейтінін ескеру керек.

Күштер жүйесі денеге түскенде, ол дененің тыныштық немесе қозғалыс қалпын өзгертпейтін болса, күштер жүйесі теңгерілген деп аталады. Теңгерілген күштер жүйесінің әсері нөлге баламалы, яғни $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$. Егер күшті күштер жүйесіне қосқанда, ол сонымен бірге нөлге баламалы жаңа күштер жүйесін құрса, бұл күшті күштер жүйесін теңгеретін күш деп атайды.

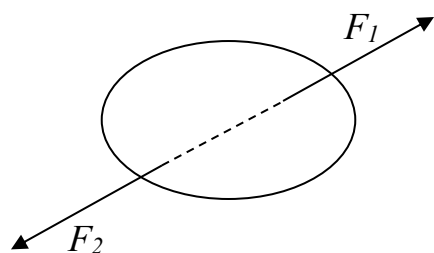
Дененің бір нүктесіне түсетін күшті қадалған күш деп атайды. Егер күштер дене бөлігінің барлық нүктелеріне түсірілсе, оларды таралған күштер деп атайды.

Статика аксиомалары Галилей – Ньютонның жалпы заңдарынан туындайды. Олар механикаға толығынан негіз бола алмайды, бірақ олар статикада қарастырылатын барлық мәселелерді қорытып шығаруға әбден жеткілікті.

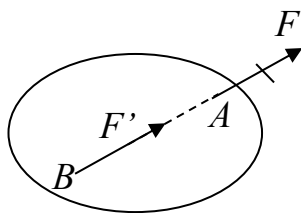
1 аксиома. Еркін абсолют қатты денеге түсірілген екі күш тепе-тендікте болу үшін олардың модульдері тең болуы және бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталуы қажетті және жеткілікті (1.1.1-сурет).

2 аксиома. Күштердің кез келген жүйесіне күштердің нөлге баламалы жүйесін қосуға немесе одан оны алып тастауға болады, бұдан берілген жүйенің қатты денеге әсері өзгермейді.

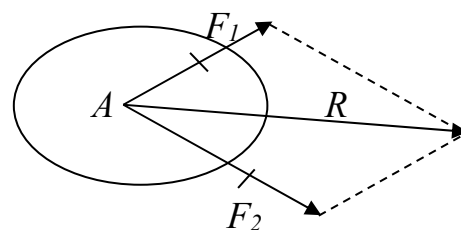
Салдары: күшті әсер ету сызығы бойымен басқа нүктеге көшіруге болады (1.1.2-сурет).



1.1.1-сурет



1.1.2-сурет



1.1.3-сурет

3 аксиома. Қатты дененің бір нүктесіне түсірілген екі күшті бір тең әсерлі күшпен ауыстыруға болады. Тең әсерлі күш берілген күштердің векторлық қосындысына тең және сол нүктеге түсіріледі (1.1.3-сурет).

Қатты дененің A нүктесіне түсірілген \vec{F}_1 және \vec{F}_2 күштерінен параллелограмм құрамыз да, оның диагоналін табамыз. Осы параллелограммның диагоналі берілген күштердің тең әсерлі күшін бейнелейді: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Күштер қосындысын үшбұрыш ережесімен де анықтауға болады, ол үшін бірінші күш векторы ұшынан екінші күш векторын тұрғызып, тең әсерлі күш векторын бірінші вектор басынан екінші вектор ұшына жүргізу керек.

4 аксиома. Екі дене бірі-біріне әр уақытта шамалары өзара тең, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталған күштермен әсер етеді.

Бұл аксиоманы Ньютонның 3-заңы деп те атайды.

5 аксиома. Тепе-теңдіктегі кез келген механикалық жүйеге қосымша жаңа байланыстар жасауға болады. Бұдан оның бастапқы тепе-теңдіктегі жағдайы өзгермейді.

Бұл аксиоманы қатаю принципі деп те атауға болады.

Аксиомаларды қолданып, келесі теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема. Егер қатты дене бір жазықтықта орналасқан өзара параллель емес үш күш әсерінен тепе-теңдікте болса, онда бұл күштердің әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысады.

1.2 Байланыстар. Байланыстар реакциялары

Кеңістікте кез келген бағытта қозғалыс жасай алатын денені еркін дене дейміз. Егер дене кейбір бағыттарда қозғалыс жасай алмайтын болса, онда ол еркін емес дене деп аталады. Дене қозғалысының еркінділігін шектейтін шарттарды байланыстар деп атаймыз.

Байланыс ролін атқаратын дене берілген денеге бір күшпен қарсы әсер етеді де оның қозғалысын шектейді. Бұл күшті байланыстың реакция күші дейміз. Байланыс реакция күші, байланысты ойша алып тастаған кездегі мүмкін болатын дене қозғалысының бағытына қарама-қарсы бағытталады. Қатты дене статикасында еркін қатты дененің тепе-теңдігі қарастырылады. Демек, статикада байланыс деп, берілген дененің кейбір бағыттардағы қозғалыстарын болдырмай, оларға шектеу жасайтын тыныштықтағы денені айтады.

6-аксиома. Байланыстар аксиомасы. Еркін емес денедегі байланыстарды, әсерлерін реакция күштерімен ауыстыру арқылы, ойша алып тастауға болады. Содан кейін бұл дене берілген (белсенді) күштер мен байланыстар реакция күштерінің әсеріндегі еркін дене ретінде қарастырылады.

Байланыстардың кейбіреулерінің реакция күштерінің бағыттары туралы мәліметтер берейік.

1) Абсолют тегіс жазықтық, бет немесе қисық. Бірінші жуықтауда, үйкелісін елемеуге болатын тіреу рөліндегі дененің бетін абсолют тегіс (жылтыр) бет дейміз. Мұндай тегіс беттің немесе жазықтықтың, сызықтың, нүктенің реакциясы \bar{N} , екі дененің түйіскен нүктесіндегі ортақ жанамаға нормаль бағытталады.

2) Иілгіш байланыс (жіп, арқан, шынжыр). Бұл түрдегі байланыстардың реакция күші байланыстардың бойымен олардың бекітілген нүктесіне қарай бағытталады.

3) Салмақсыз сырық. Өзіне түсірілген жүктемемен салыстырғанда салмағын ескермеуге болатын сырықты салмақсыз сырық дейміз. Қандайда құрылым құрамындағы денелер бір-бірімен, ұштары топсалармен бекітілген салмақсыз сырықтармен жалғастырылған болса, онда мұндай сырықтардың реакция күштері сырықтардың бойымен бағытталады.

4) Денелердің бір-бірімен жылжымалы топсамен және қозғалмайтын топсамен бекітілуі. Жылжымалы топсаның реакция күші тіреу жазықтығына перпендикуляр бағытталады.

Қозғалмайтын цилиндрлік топса және сфералық топсаның реакция күшінің бағыты да, шамасы да белгісіз. Оның тек түсу нүктесі белгілі, сонда реакция күшін өстерге параллель құраушыларға жіктеп көрсеткен ыңғайлы.

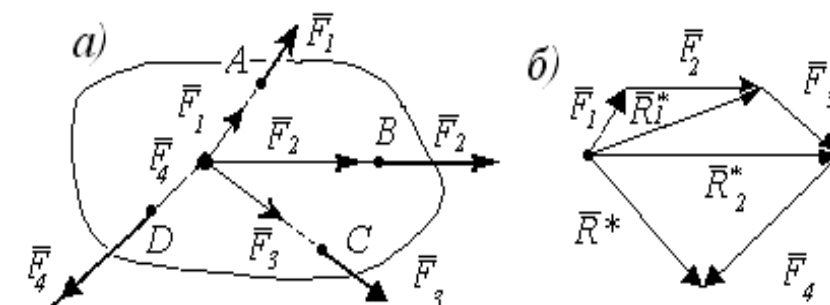
1.3 Жинақталатын күштер жүйесі.

Күштерді қосудың геометриялық әдісі. Жинақталатын күштер жүйесінің геометриялық тепе-теңдік шарты

Абсолют қатты дененің A, B, C, D нүктелеріне, әсер ету сызықтары бір O нүктесінде қиылысатын, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ күштері түсірілсін делік (1.3.1-сурет).

Мұндай күштер жиынтығы жинақталатын күштер жүйесі деп аталады.

Жинақталатын күштер жүйесі бір күшке баламалы, яғни оның әр уақытта да тең әсерлі күші болатынын дәлелдеуге болады.



1.3.1-сурет

Теорема. Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күші жүйедегі күштердің геометриялық қосындысына тең болады да оның әсер ету сызығы күштер түзулерінің қиылысатын O нүктесінен өтеді.

Теореманы дәлелдеу үшін алдымен салдарыны қолданып, күштерді O нүктесіне көшіреміз. Содан кейін бір нүктеде түсірілген

күштерге біртіндеп 3 аксиоманы 1.3.1,б-суретте көрсетілгендей қолданамыз. Нәтижесінде тең әсерлі күшті аламыз

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.3.1)$$

Абсолют қатты дене өзінің бастапқы тепе-теңдік күйін сақтап қалу үшін \bar{R} тең әсерлі күштің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті

$$\bar{R} = 0, \text{ яғни } \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (1.3.2)$$

(1.3.2) теңдігі жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуының векторлық түріндегі шартын өрнектейді.

\bar{R} нөлге тең болғанда соңғы күш векторының ұшы бірінші күш векторының басымен түйіседі, яғни күштер көпбұрышы тұйықталады. Сонымен, жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуының геометриялық шарты мынадай: жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін жүйе күштерінен құрылатын көпбұрыш тұйық болуы қажетті және жеткілікті.

1.4 Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін аналитикалық әдіспен табу. Жинақталатын күштер жүйесінің аналитикалық тепе-теңдік шарты

Бас нүктесі, күш сызықтары қиылысатын, O нүктесінде $Oxyz$ координаталар өстерінің тік бұрышты жүйесін аламыз. Осыдан кейін (1.3.1) теңдеуінің екі жағын да осы өстерге проекциялаймыз

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.4.1)$$

Тең әсерлі күштің модулі оның проекциялары арқылы белгілі формуламен есептеледі

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (1.4.2)$$

\bar{R} векторының координаталық өстермен жасайтын бұрыштарын α, β, γ деп белгілейтін болсақ, онда тең әсерлі күштің бағыттаушы косинустарын тауып алуға болады

$$\cos \alpha = R_x / R, \quad \cos \beta = R_y / R, \quad \cos \gamma = R_z / R. \quad (1.4.3)$$

Енді күштердің жинақталатын жүйесінің тепе-теңдік шарттарын аналитикалық әдіспен анықтайық. Егер бұл күштер жүйесі тепе-теңдікте болса, онда оның тең әсерлі күші нөлге тең болуы керек

$$\bar{R} = 0, \quad R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k} = 0.$$

Күш нөлге тең болса, оның әр координаттық құраушылары да, яғни оның өстердегі проекциялары да нөлге тең болады

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$\text{немесе } \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \quad (1.4.4)$$

(1.4.4) теңдеулері жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары болып табылады. Жинақталатын күштердің кеңістіктегі жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін бұл күштердің координаттар өстерінің әрбіреуіндегі проекцияларының қосындыларының нөлге тең болулары қажетті және жеткілікті.

1.4.1-мысал. Салмағы $P = 200 \text{ Н}$ біртекті цилиндр көлденең жазықтықтың бетінде жатыр. Әсер етуші сызығы ауырлық центрі арқылы өтетін $F = 500 \text{ Н}$ вертикаль күш цилиндрді үстінен қысады (1.4.1-сурет). Цилиндрдің көлденең жазықтықты қысатын күшін табу керек.

Шешуі: Цилиндрге бір түзудің бойында түсірілген \bar{P} салмақ күшін және \bar{F} қысатын күшті көрсетеміз. Денені байланыстан босатамыз, оның әсерін реакция күшімен ауыстырамыз. Реакция күші \bar{R} жазықтыққа перпендикуляр жоғары бағытталады. Осы күштердің геометриялық тепе-теңдік шартын жазамыз

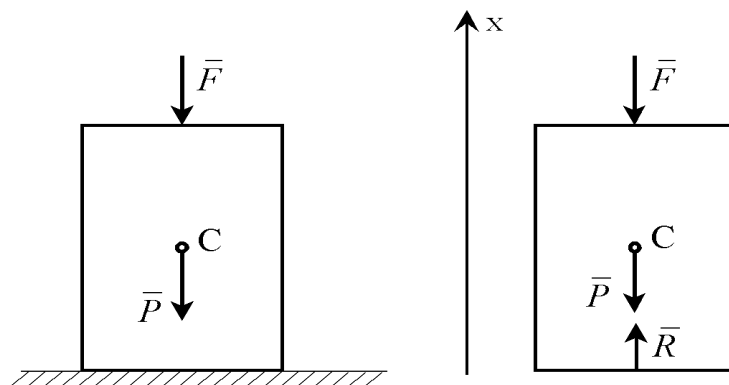
$$\bar{F} + \bar{P} + \bar{R} = 0.$$

Күштерді параллель өске проекциялап, алатынымыз:

$$R - F - P = 0 \text{ немесе } R = F + P = 700 \text{ Н}.$$

1.4.2-мысал. Салмағы P –ға тең жүк, суретте көрсетілгендей, C нүктесіне ілінген. A, B және C нүктелерінде сырықтар топсалармен бекітілген. $P = 1000 \text{ Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ болғанда AC және BC сырықтарының реакция күштерін табу керек (1.4.2,а-сурет).

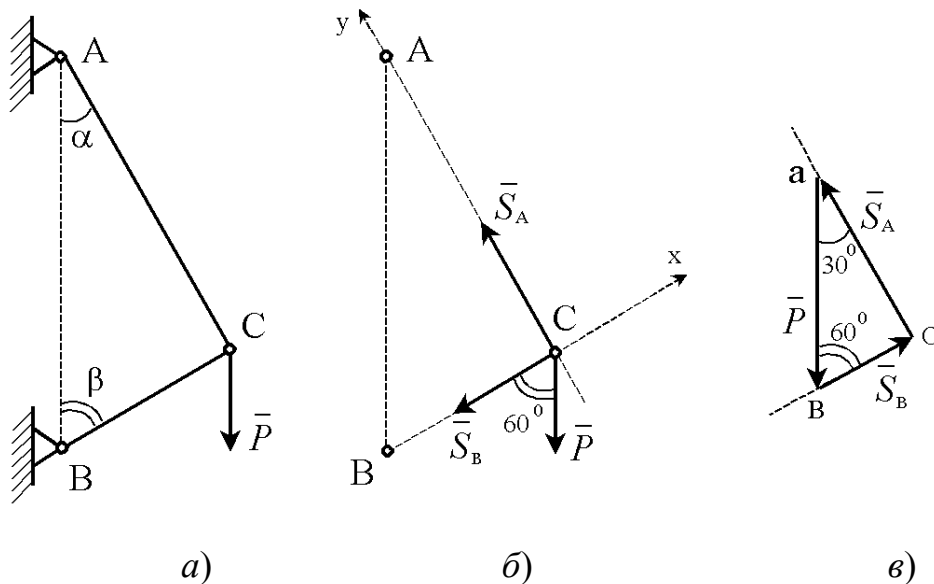
Шешуі: C нүктесінің тепе-теңдігін қарастырамыз, оған түсірілген белсенді күш \bar{P} . C нүктесін байланыстардан, яғни AC, BC сырықтарынан ойша босатамыз. Бұлардың реакция күштерін \bar{S}_A, \bar{S}_B



1.4.1-сурет

деп белгілейміз және екеуі де созылады деп сырықтар бойымен C нүктесінен тыс бағыттаймыз.

Сонымен, C нүктесі \bar{P} , \bar{S}_A , \bar{S}_B күштерінің әсерінен тепе-теңдікте тұрған нүкте болып табылады.



1.4.2-сурет

Есепті алдымен проекция әдісімен, яғни аналитикалық әдіспен шешеміз. Координаттар жүйесінің бас нүктесін C топсасына орналастырамыз. x өсін BC бойымен оң жаққа, ал y өсін AC бойымен жоғары бағыттаймыз.

C нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -S_B - P \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad S_A - P \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Осы теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз

$$S_A = P \cdot \cos 30^\circ = 866 \text{ H}, \quad S_B = -P \cdot \cos 60^\circ = -500 \text{ H}.$$

(-) таңбасы \bar{S}_B күшінің бағыты, суретте көрсетілген бағытына қарама-қарсы бағытталаатынын көрсетеді, яғни BC сырығы сығылады.

Бұл есеп геометриялық әдіспен де тез шешіледі. C нүктесіне түсірілген үш күш тепе-теңдік жағдайында тұйықталған көпбұрышты (мұнда үшбұрышты) құрайды. Үшбұрышты құру белгілі \bar{P} күшінен басталады. Кез келген бір a нүктесінен бастап берілген масштабта алынған, \bar{P} күшіне тең және оған параллель av кесіндісін тұрғызамыз (1.4.2,в-сурет). Кесіндінің бір a ұшы арқылы реакция күштерінің бірінің (мысалы \bar{S}_A реакция күшінің) бағытына параллель түзу

жүргізіп, оның екінші v ұшы арқылы қалған реакция күші (бізде \bar{S}_B) бағытына параллель түзуін жүргіземіз. Сонда осы екі түзудің қиылысқан нүктесі, күштердің abc үшбұрышының үшінші c төбесін береді. Үшбұрыштан \bar{S}_A, \bar{S}_B күштерінің шынайы бағыттары анықталып тұр.

Осыдан кейін, \bar{S}_A, \bar{S}_B күштерінің модульдерін анықтау үшін abc үшбұрышынан оның белгісіз қабырғаларын табу керек.

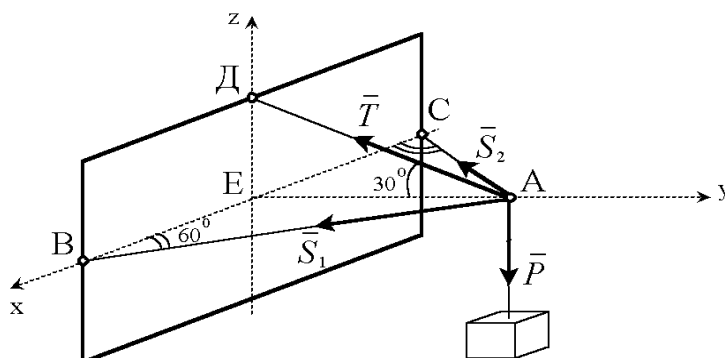
Күштер үшбұрышының ab қабырғасы белгілі. Оның бұрыштарын анықтағаннан кейін, синустар теоремасына сүйене отырып, мына қатынастарды жазамыз

$$\frac{S_B}{\sin 30^\circ} = \frac{S_A}{\sin 60^\circ} = \frac{P}{\sin 90^\circ}.$$

Осы өрнектен

$$S_A = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} P = 866 \text{ H}, \quad S_B = P \cdot \sin 30^\circ = 500 \text{ H}.$$

1.4.3-мысал. Салмағы P -ға тең жүк, 1.4.3 суретте көрсетілгендей, A нүктесіне ілінген. AB және AC сырықтары C, B нүктелерінде топсалармен, AD сым арқаны D нүктесіне бекітілген. Сырықтардың реакция күштерін және сым арқанның керілу күшін табу керек. Берілгені: $P=3000\text{H}$, $\angle CBA = \angle BCA = 60^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$.



1.4.3-сурет

Шешуі: Нүкте деп алуға болатын, A топсасының тепе-теңдігін қарастырамыз. A нүктесіне түсірілген белсенді күш \bar{P} .

A нүктесін байланыстардан ойша босатамыз. AB, AC сырықтары және AD сым арқаны A -дағы байланыстар. Бұлардың реакция күштерін $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{T}$ деп белгілейміз. Егер бір нүктеге жинақталатын күштер жүйесі кеңістікте орналасқан күштер жүйесі болса, онда есеп шығарудың аналитикалық тәсілін пайдалану тиімді. A нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad S_1 \cdot \cos 60^\circ - S_2 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

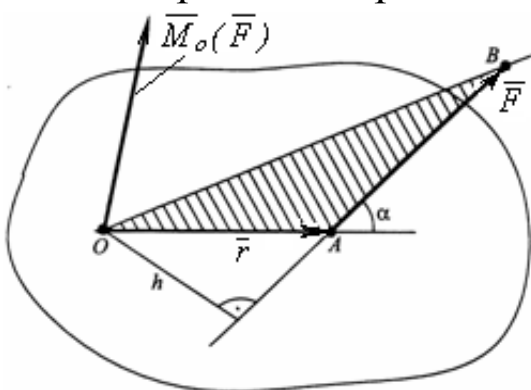
$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -S_1 \cdot \cos 30^\circ - S_2 \cdot \cos 30^\circ - T \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad T \cdot \sin 30^\circ - P = 0.$$

Бұл құрылған тендеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $T = 6000 \text{ H}$, $S_1 = S_2 = -3000 \text{ H}$. S_1 және S_2 күштері теріс таңбалы болып шықты. Сондықтан олар суретте біз көрсеткен бағытқа қарама-қарсы бағытталуы тиіс, яғни AB және AC сырықтары сығылады.

1.5 Күштің нүктеге қатысты және өске қатысты моменттері

\vec{F} күштің O нүктеге қатысты (1.5.1-сурет) векторлық моменті деп, O нүктесінен OAB үшбұрышына перпендикуляр бағытталған және O нүктесінен күштің түсу нүктесіне тұрғызылған радиус-векторы \vec{r} мен \vec{F} күшінің векторлық көбейтіндісіне тең векторды айтады



1.5.1-сурет

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.5.1)$$

$\vec{M}_O(\vec{F})$ векторының модулі,

күштің модулі F және O нүктесі мен күштің әсер сызығының ең қысқа h

арақашықтығының көбейтіндісіне тең (h арақашықтығы күштің O нүктеге қатысты иіні деп аталады)

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha = F \cdot h. \quad (1.5.2)$$

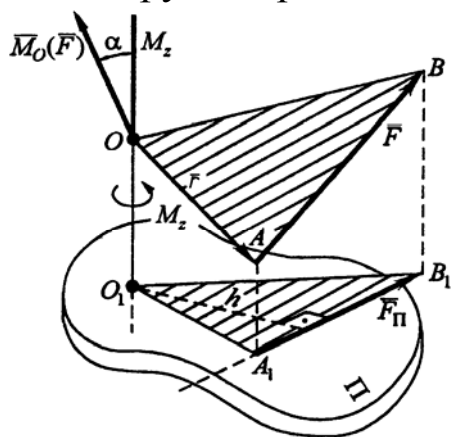
$\vec{M}_O(\vec{F})$ моменті \vec{F} күштің O нүктесінен айналдыру әсерін сипаттайды. Бұнда \vec{r} радиус-векторын O нүктесінен күштің түсу A нүктесіне ғана емес, күштің әсер сызығында жатқан кез келген нүктеге тұрғызуға болады. Күштің нүктеге қатысты моменті, күштің әсер сызығы сол нүктеден өтетін болса, нөлге тең.

Жазық күштер жүйесі жағдайында күштің нүктеге қатысты векторлық моментінің орнына күштің нүктеге қатысты алгебралық моментін қолданған ыңғайлы, өйткені барлық күштердің векторлық моменттері бір біріне параллель болады. Күштің нүктеге қатысты

алгебралық моменті деп, оң немесе теріс таңбамен алынған күштің модулі мен сол нүктеге қатысты иінінің көбейтіндісі аталады

$$M_o = \pm F \cdot h. \quad (1.5.3)$$

Сонда күш денені сағат тілі қозғалысына қарама-қарсы айналдыруға тырысса “+”, сағат тілі қозғалысына бағытас айналдыруға тырысса “-” таңбасы қойылады.



1.5.2-сурет

\bar{F} күшінің өске қатысты моменті деп, күштің өсте жатқан кез келген нүктесіне қатысты векторлық моментінің сол өске проекциясы аталады

$$M_z(\bar{F}) = (\bar{r} \times \bar{F})_z \quad (1.5.4)$$

Сонда күштің нүктеге қатысты векторлық моментінің өске проекциясы нүктенің өс үстінде орналасуына тәуелсіз.

Анықтаманы осылай да беруге болады: \bar{F} күшінің өске қатысты моменті деп, күштің өске перпендикуляр жазықтыққа \bar{F}_Π проекциясының жазықтық пен өс қиылысатын нүктеге қатысты алгебралық моменті аталады (1.5.2-сурет)

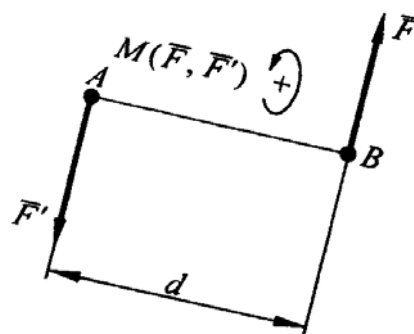
тыққа \bar{F}_Π проекциясының жазықтық пен өс қиылысатын нүктеге қатысты алгебралық моменті аталады (1.5.2-сурет)

$$M_z(\bar{F}) = M_{O_1}(F_\Pi) = \pm F_\Pi \cdot h. \quad (1.5.5)$$

Күштің өске қатысты моменті, күш пен өс бір жазықтықта орналасса, нөлге тең.

1.6 Қос күш. Қос күш моменті

Қос күш (немесе күштер жұбы) деп, абсолют қатты денеге әсер етуші шамалары тең, өзара параллель және қарама-қарсы бағытталған екі күштің жүйесі аталады (1.6.1-сурет). Күштердің векторлық қосындысы нөлге тең болғанмен, қос күш теңгерілмейді. Күштердің әсер сызықтарының ең қысқа ара қашықтығы, қос күштің иіні деп аталады, ал күштер орналасқан жазықтық, қос күштің әсер жазықтығы деп аталады. Денеге әсер етуші бірнеше қос күштер жиынтығы, қос күштер жүйесі деп аталады. Қос күш тең әсерлі күшке келтірілмейді. Қос күштің денеге әсері оның, $\pm F \cdot d$ тең моментімен, әсер жазықтығының кеңістікте



1.6.1-сурет

орналасуымен және қос күш денені айналдыруға тырысатын бағытымен сипатталады, олай болса, қос күш моменті векторлық шама болып келеді.

Қос күштің векторлық моменті – шамасы күш модулі мен қос күш иінінің көбейтіндісіне тең және қос күштің әсер жазықтығына перпендикуляр бағытталған вектор, сонда оның ұшынан қарағанда, қос күш денені сағат тілінің қозғалысына қарама-қарсы айналдыруға тырысады. Қос күшті, күш модулі мен қос күш иінін өзгертіп, бірақ қос күш моментінің модулін және айналдыруға тырысатын бағытын сақтап, жазықтық үстінде немесе басқа параллель жазықтыққа, көшіруге болады. Сондықтан қос күш векторы – еркін вектор болып келеді.

Екі қос күш, олардың орналасуына (бір жазықтықта немесе параллель жазықтықтарда болса да) және күш модульдері мен қос күш иіндеріне тәуелсіз, векторлық моменттері тең жағдайында бір-біріне баламалы болады.

Егер қос күштер бір жазықтықта орналасса, олардың векторлық моменттері сол жазықтыққа перпендикуляр және қос күштің айналдыруға тырысатын бағытына сәйкес бірінші немесе екінші жағына бағытталады. Сондықтан қос күш моменттерін, оларды алгебралық шамалар ретінде қарастырып, бір-бірінен тек ғана модулі мен таңбасы арқылы, айыруға болады. Қос күш моменті денені сағат тілінің қозғалысына бағыттас айналдыруға тырысса, ол оң шама, ал керісінше жағдайда – теріс шама болып саналады. Сонда жазықтықтағы қос күштер жүйесі үшін

$$M_i = M_i(\overline{F}_i, \overline{F}_i') = \pm F_i \cdot d_i \quad (1.6.1)$$

және

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n \pm F_i \cdot d_i. \quad (1.6.2)$$

Қос күштерді қосу туралы теорема. Қатты денеге әсер етуші қос күштер жүйесі бір қос күшке эквивалент болады, оның векторлық моменті жүйедегі барлық қос күштердің векторлық моменттерінің

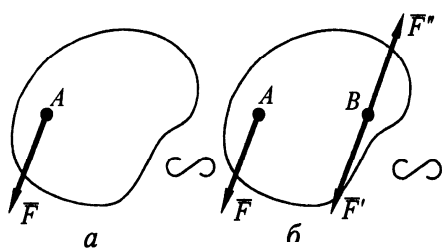
геометриялық қосындысына тең: $\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k$.

Сонда қатты денеге әсер етуші қос күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары келесі түрде жазылады: $\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{M}_k = 0$.

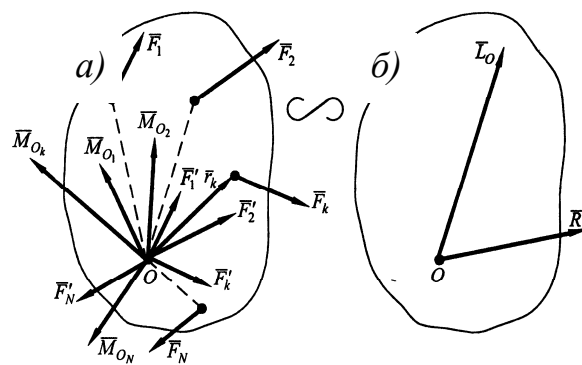
1.7 Күшті параллель орын ауыстыру туралы теорема.

Кез келген күштер жүйесін бір центрге келтіру

Абсолют қатты денеге түсірілген \vec{F} күшін, оның денеге әсерін өзгертпей, өзіне параллель басқа нүктеге көшіру болады, бірақ сонда моменті, күштің жаңа нүктеге қатысты моментіне тең қос күшті қосу керек (1.7.1-сурет).



1.7.1-сурет



1.7.2-сурет

Пуансо теоремасы. Абсолют қатты денеге әсер етуші күштер жүйесін, оның бас векторына тең және келтіру центрі ретінде алынған нүктеге түсірілген бір күшке және моменті бас моментке тең бір қос күшке ауыстырып, бір центрге келтіруге болады (1.7.2-сурет)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (1.7.1)$$

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) = \vec{L}_O. \quad (1.7.2)$$

Сонда \vec{R} келтіру центрін таңдауына тәуелсіз, ал \vec{L}_O – оған тәуелді.

Механикада Вариньон теоремасы кең қолданылады: егер күштер жүйесінің тең әсерлі күші болса, онда тең әсерлі күштің кез келген нүктеге немесе кез келген өске қатысты моменті жүйе күштерінің сол нүктеге немесе өске қатысты моменттерінің қосындысына тең.

1.8 Күштер жүйелерінің тепе-теңдік шарттары

Күштердің кез келген жүйесі оның \vec{R} бас векторына тең бір күшке және моменті, кез келген O центріне қатысты \vec{L}_O бас моментіне тең бір қос күшке баламалы. Сонда күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін \vec{R} мен \vec{L}_O нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті. Сондықтан тепе-теңдік шарттары векторлық түрде келесідей жазылады

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0, \quad \bar{L}_O = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k) = 0.$$

Бұл шарттар келесі аналитикалық шарттарға баламалы болады

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ L_x = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad L_y = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad L_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.8.1)$$

Сонымен кез келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары келесі түрде жазылады

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.8.2)$$

(1.8.2)-тепе-теңдік шарттарын сөзбен былай айтамыз. Күштердің кез келген жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, жүйедегі барлық күштердің әрбір координаттар өстеріндегі проекцияларының қосындылары нөлге тең болулары және барлық күштердің әрбір координаттар өстеріне қатысты алынған моменттерінің қосындылары нөлге тең болулары қажетті және жеткілікті.

Дербес жағдайларды қарастырайық:

1) Кеңістік параллель күштер жүйесі үшін (күштер z өсіне параллель) тепе-теңдік шарттар келесідей жазылады

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.8.3)$$

2) Кез келген жазық күштер жүйесі үшін тепе-теңдік шарттарының үш түрі бар. Негізгі (бірінші) түрі

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.8.4)$$

мұнда O нүктесі кез келген.

Екінші түрі

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.8.5)$$

мұнда A, B нүктелері кез келген, бірақ оларды қосатын AB түзуі x өсіне перпендикуляр емес болу керек.

Үшінші түрі

$$\sum_{k=1}^n M_A(\overline{F_k}) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\overline{F_k}) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_C(\overline{F_k}) = 0, \quad (1.8.6)$$

мұнда A, B, C нүктелері кез келген, бірақ бір түзудің бойында жатпау керек.

3) Жазық параллель күштер жүйесі үшін тепе-теңдік шарттарының екі түрі бар. Негізгі (бірінші) түрі

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_O(\overline{F_k}) = 0, \quad (1.8.7)$$

мұнда x өсі күштерге перпендикуляр болмау керек.

Екінші түрі

$$\sum_{k=1}^n M_A(\overline{F_k}) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\overline{F_k}) = 0, \quad (1.8.8)$$

мұнда A мен B нүктелерінен өтетін түзу күштерге параллель болмау керек.

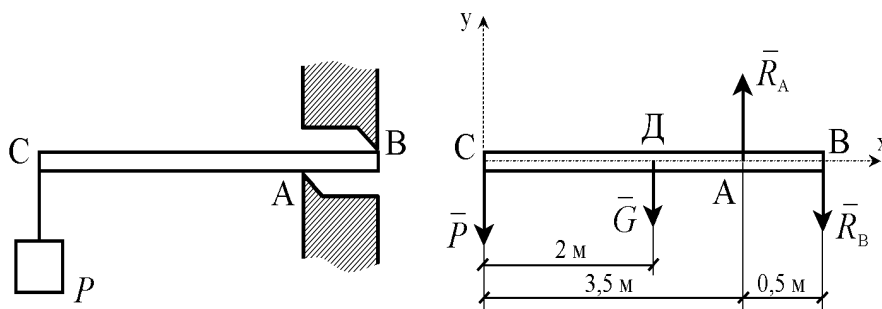
Кейбірде бірнеше денеден құрылған құрылымдардың тепе-теңдігін қарастыру керек. Сонда денелер жүйесінің бөліктерін қосатын байланыстарды ішкі байланыстар деп атайды. Егер сыртқы байланыстарды реакция күштеріне ауыстырып, тепе-теңдік шарттарын қолданса, олар реакцияларды анықтауға жеткіліксіз болып келеді. Сонда екі әдістің біреуін қолдануға болады:

а) қосымша тепе-теңдік шарттарын құрайды, мысалы, ішкі топсаға қатысты моменттерінің қосындысы түрінде;

б) құрылымды бөліктерге ойша жіктеп, оның ішкі байланыстарын реакцияларға ауыстырады да әр бөлік үшін тепе-теңдік теңдеулерін құрайды.

Егер байланыстар реакцияларының белгісіз құраушыларының саны тәуелсіз тепе-теңдік теңдеулерінің санына тең болса, қарастырылатын жүйе статикалық түрде анықталатын, одан артық болса - статикалық түрде анықталмайтын жүйе деп аталады. Статикалық түрде анықталмайтын жүйелердегі реакцияларды абсолют қатты дене үшін қолданылатын әдістермен табу мүмкін емес. Мұндай есептерді шешу үшін денелердің деформациялануын есепке алу керек.

1.8.1-мысал. Ұзындығы $4m$ және салмағы $0,5H$ біртекті арқалық қалыңдығы $0,5m$ қабырғаға A және B нүктелерінде тірелетіндей болып енгізіліп қойылған. Арқалықтың C шетіне салмағы $P=4H$ жүк ілінген. A және B нүктелеріндегі реакция күштерін табу керек (1.8.1-сурет).



1.8.1-сурет

Шешуі: CB арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Оған әсер етуші белсенді \bar{P} , \bar{G} күштер векторларын суретте көрсетеміз. CB арқалығын байланыстардан босатамыз. A және B тіректерінің \bar{R}_A және \bar{R}_B реакция күштері арқалыққа перпендикуляр бағытталады.

Түсірілген күштер өзара параллель және бір жазықтықта орналасады, жазық параллель күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін 2 теңдеуді құрамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -P - G + R_A - R_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad P \cdot 3,5 + G \cdot 1,5 - R_B \cdot 0,5 = 0.$$

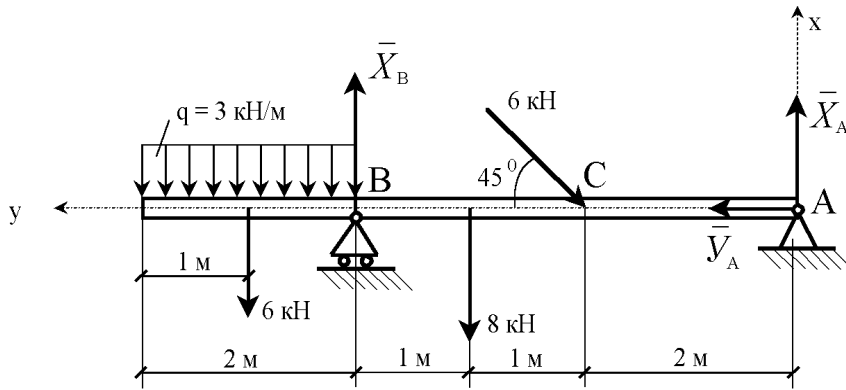
Осыдан белгісіз күштерді табамыз

$$R_B = 7 \cdot P + 3 \cdot G = 29,5H, \quad R_A = R_B + P + G = 34H.$$

Табылған шешімнің дұрыстығын тексеру үшін қосымша тепе-теңдік теңдеу құрамыз, мысалы, C нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = R_A \cdot 3,5 - G \cdot 2 - R_B \cdot 4 = 34 \cdot 3,5 - 0,5 \cdot 2 - 29,5 \cdot 4 = 0.$$

1.8.2-мысал. Екі қадалған күш пен бірқалыпты таралған күштердің әсеріндегі арқалықтың A және B тіректерінің реакция күштерін табу керек. Бірқалыпты таралған күштердің қарқындылығы, түсірілген күштердің шамалары және өлшем бірліктері суретте көрсетілген (1.8.2-сурет).



1.8.2-сурет

Шешуі: AB арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Арқалыққа түсірілген белсенді қадалған күштер: 6кН , 8кН . Бірқалыпты q қарқындылығымен таралған күштерді тең әсерлі күшке ауыстырамыз, оның шамасы $q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6\text{кН}$ және оны таралған аралық ортасында түсіреміз. Арқалықты байланыстардан босатамыз. Ол үшін A және B топсаларын ойша алып тастап, олардың орнына \bar{X}_A , \bar{Y}_A және \bar{X}_B реакция күштерін түсіреміз.

Алынған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін үш теңдеу жүйесін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad 6 \cdot 5 - X_B \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A - 8 + X_B - 6 - 6 \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -6 \cdot \cos 45^\circ + Y_A = 0.$$

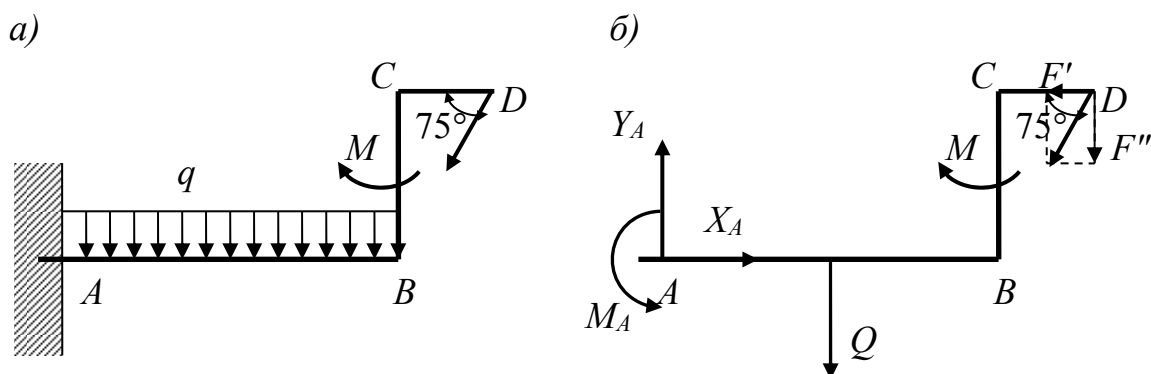
Бұл құрылған үш теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз

$$X_A = 2,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 4,2 \text{ кН}, \quad X_B = 15,6 \text{ кН}.$$

Шешімнің дұрыстығын қосымша теңдеу жазып тексеруге болады, мысалы, C нүктесіне қатысты моменттер теңдеуі арқылы

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 6 \cdot 3 - X_B \cdot 2 + 8 \cdot 1 + X_A \cdot 2 = 18 - 15,6 \cdot 2 + 8 + 2,6 \cdot 2 = 0.$$

1.8.3-мысал. Сынық сырықтың бір шеті 1.8.3,*a*-суретте көрсетілгендей қатты бекітілген. $F=10\text{кН}$, $q=5\text{кН/м}$, $M=1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $AB=4\text{м}$, $BC=2\text{м}$, $CD=1\text{м}$ болғанда қатты бекітпенің реакцияларын анықтау керек.



1.8.3-сурет

Шешуі: Сынық сырықтың тепе-теңдігін қарастырамыз, оған түсірілген белсенді күштер: қадалған F күші, M моментімен қос күш және q қарқындылығымен бірқалыпты таралған күштер. Таралған күштерді тең әсерлі күшке ауыстырамыз, оның шамасы $Q=q \cdot AB=20\text{кН}$ және ол AB аралық ортасында түсіріледі. A қатты бекітпесінің реакцияларын 1.8.3,б–суретте көрсетілгендей түсіреміз: реакция күшінің \bar{X}_A, \bar{Y}_A құраушыларын және қатты бекітпенің M_A моментін.

Алынған жазық күштер жүйесі үшін 3 тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - F \cdot \cos 75^\circ = 0, \quad X_A = F \cdot \cos 75^\circ = 2,59 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q - F \cdot \cos 15^\circ = 0, \quad Y_A = Q + F \cdot \cos 15^\circ = 29,7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A(F_k) = 0,$$

$$M_A - Q \cdot \frac{AB}{2} - M - F \cdot \cos 15^\circ \cdot (AB + CD) + F \cdot \cos 75^\circ \cdot BC = 0.$$

$$M_A = Q \cdot \frac{AB}{2} + M + F \cdot \cos 15^\circ \cdot (AB + CD) - F \cdot \cos 75^\circ \cdot BC = 98,1 \text{ кНм.}$$

Есеп дұрыстығын тексеру үшін, қосымша тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

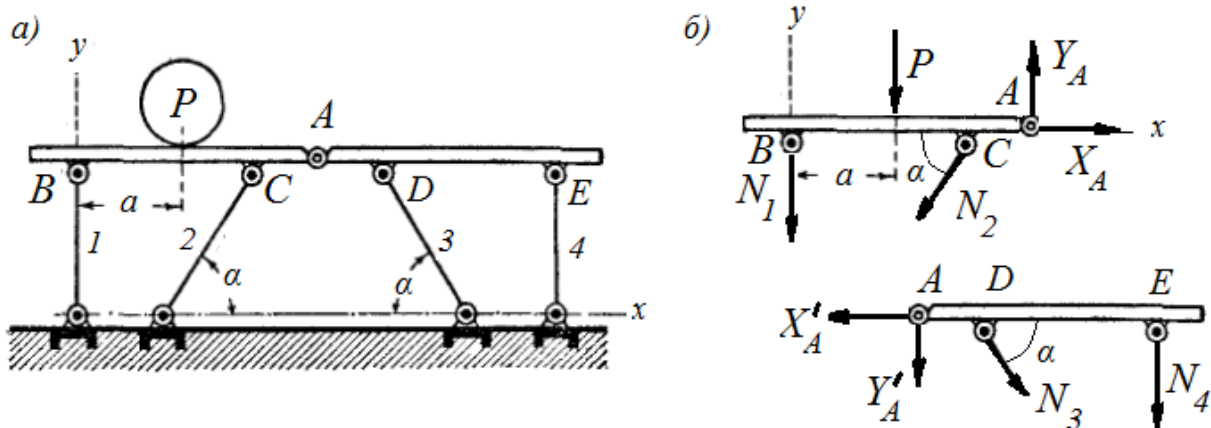
$$\begin{aligned} \sum M_D(F_k) = 0, \quad M_A + X_A BC - Y_A (AB + CD) - M + Q \left(\frac{AB}{2} + CD \right) = \\ = 98,1 + 2,58 \cdot 2 - 29,7 \cdot 5 - 15 + 20 \cdot 3 = 163,3 - 163,5 = -0,2 \approx 0. \end{aligned}$$

Сонымен қатты бекітпенің табылған реакциялары

$$X_A = 2,59 \text{ кН}, \quad Y_A = 29,7 \text{ кН}, \quad M_A = 98,1 \text{ кНм.}$$

1.8.4-мысал. Көпір A топсамен біріктірілген екі бірдей арқалықтан құрылған және табанға төрт сырық көмегімен бекітіліп

түр (1.8.4,а-сурет). $\alpha=60^\circ$, $AB=8$ м, $BC=6$ м, $a=4$ м, $P=15$ кН болғанда көпірдің сыртқы және ішкі байланыстарының реакцияларын табу керек.



1.8.4-сурет

Шешуі: Көпірді екі бөлікке жіктеп, әр бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз (1.8.4,б-сурет). Сырықтарды созылу әсерінде деп болжамдап, реакцияларын сырықтар бойымен арқылықтан тыс бағыттаймыз. A топсасының реакциясын екі күшке жіктейміз, сонда әсер мен кері әсер теңдігі аксиомасы бойынша сәйкес күштердің модульдері тең: $X_A' = X_A$, $Y_A' = Y_A$, ал бағыттары қарама қарсы. Әр арқалық үшін 3 тепе-теңдік теңдеу құруға болады, оларға 6 белгісіз кіреді, яғни есеп статикалық түрде анықталады.

AB арқалығы үшін тепе-теңдік теңдеулер

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - N_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - N_1 - N_2 \sin \alpha - P = 0,$$

$$\sum M_B(F_k) = 0, \quad -P \cdot a - N_2 \sin \alpha \cdot BC + Y_A \cdot AB = 0.$$

AE арқалығы үшін тепе-теңдік теңдеулер

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -X_A + N_3 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -Y_A - N_3 \sin \alpha - N_4 = 0,$$

$$\sum M_E(F_k) = 0, \quad N_3 \sin \alpha \cdot DE + Y_A \cdot AE = 0.$$

Алынған теңдеулер жүйесін Mathcad бағдарламасында 1.8.5-суретте көрсетілгендей шешуге болады.

Есеп шешімі дұрыстығын тексеру үшін көпірге түсірілген барлық күштердің y осіне проекциялар теңдеуін құрамыз

$$\sum F_{ky} = -P - N_1 - N_2 \sin \alpha - N_4 - N_3 \sin \alpha.$$

1.8.5-суретте көсетілгендей, тексеру шарты орындалып тұр.

Сонымен сыртқы байланыстардың реакциялары $N_1 = -6,25кН$, $N_2 = -5,77кН$, $N_3 = -5,77кН$, $N_4 = 1,25кН$, ішкі байланыс реакциясының құраушылары $X_A = -2,89кН$, $Y_A = 3,77кН$.

```

P := 15      α := 60·deg      a := 4      BC := 6      AB := 8      DE := BC      AE := AB

      ( N1 )      ( 0 )
      ( N2 )      ( 0 )
      ( N3 )      ( 0 )
      ( N4 )      ( 0 )
      ( XA )      ( 0 )
      ( YA )      ( 0 )
      =

Given

XA - N2·cos(α) = 0                      -XA + N3·cos(α) = 0
YA - N1 - N2·sin(α) - P = 0              -YA - N3·sin(α) - N4 = 0
-P·a - N2·sin(α)·BC + YA·AB = 0          YA·AE + N3·sin(α)·DE = 0

      ( N1 )      ( N1 )
      ( N2 )      ( N2 )
      ( N3 )      ( N3 )
      ( N4 )      ( N4 )
      ( XA )      ( XA )
      ( YA )      ( YA )
      = Find

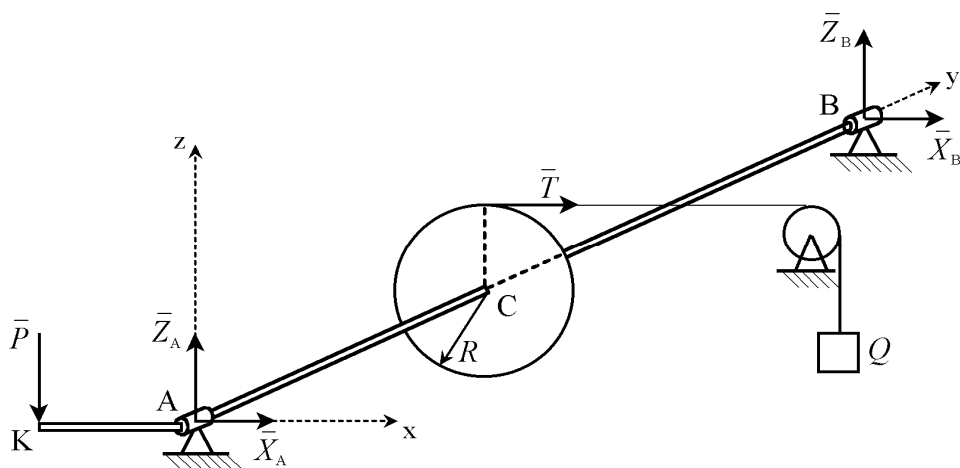
      ( N1 )      ( -6.25 )
      ( N2 )      ( -5.774 )
      ( N3 )      ( -5.774 )
      ( N4 )      ( 1.25 )
      ( XA )      ( -2.887 )
      ( YA )      ( 3.75 )

ТЕКСЕРУ      SY := -N1 - N2·sin(α) - P - N3·sin(α) - N4      SY = -5.107 × 10-15

```

1.8.5-сурет

1.8.5-мысал. 1.8.6-суретте сұлбасы бейнеленгендей, $Q = 800 Н$ жүкті жұмысшы \overline{P} күшін түсіріп шығырдың көмегімен ұстап тұр; дөңгелектің радиусы $R = 5см$, саптың ұзындығы $AK = 40см$, $AC = CB = 50см$. Сап көлденең болғандағы, сапқа түсірілген вертикаль \overline{P} күшін және A, B тіректердің білік өсіне түсіретін қысым күштерін табу керек.



1.8.6-сурет

Шешуі: Белгісіз күштерді табу үшін шығырдың тепе-теңдігін қарастырамыз. Шығырға түсірілген күштер: шамасы Q -ге тең арқанның тартылыс күші \bar{T} , актив күш \bar{P} және цилиндрлік топсалардың реакция күштері $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$.

Күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін тендеулер жүйесін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad T + X_A + X_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad -P + Z_A + Z_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cdot AK + T \cdot R = 0,$$

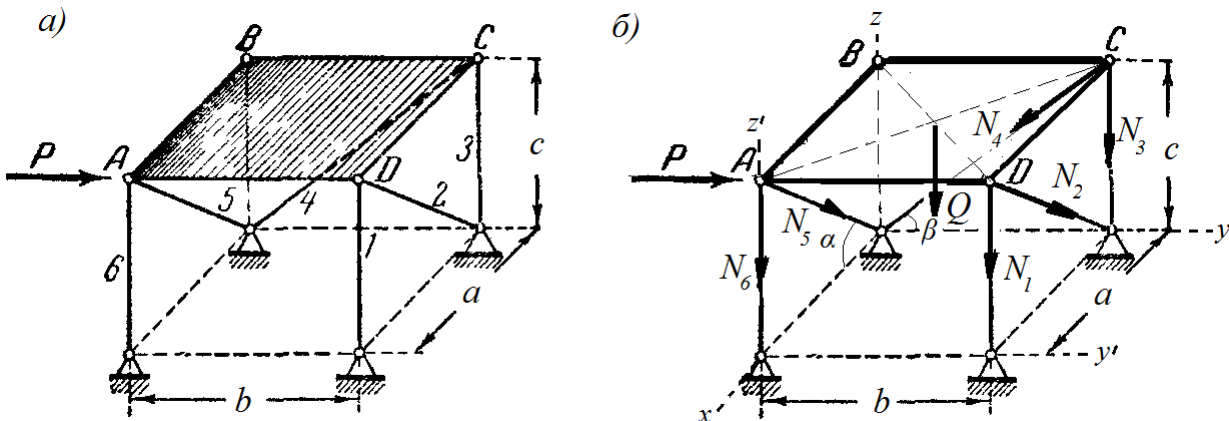
$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad -T \cdot AC - X_B \cdot AB = 0.$$

Құрылған тендеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $P = 100H, X_A = 400H, Z_A = -100H, X_B = -400H, Z_B = 0$.

1.8.6-мысал. Салмағы $Q=10кН$ тақтаны ұстап тұрған сырықтардың реакцияларын горизонталь $P=6кН$ күші әсерінен анықтау керек (1.8.7,а-сурет). Өлшемдер: $a=4 м, b=3м, c=2,5м$.

Шешуі: тақтаның тепе-теңдігін қарастырамыз, оған берілген күштер мен сырықтардың реакцияларын көрсетеміз (1.8.7,б-сурет). Бұрыштар үшін:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \sin \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$



1.8.7-сурет

$P = 6$ $Q = 10$
 $a = 4$ $b = 3$ $c = 2.5$

Given

$$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-N5 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0 \quad P - N4 \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$$

$$-Q - N1 - N6 - N5 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N2 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N3 - N4 \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$$

$$-P \cdot c - Q \cdot \frac{b}{2} - N1 \cdot b - N2 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b - N3 \cdot b = 0 \quad N1 \cdot a + N6 \cdot a + Q \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad P \cdot a + N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b = 0$$

Find

$$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9.434 \\ -10 \\ 7.81 \\ 9.434 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$M_y = -Q \cdot \frac{a}{2} - N3 \cdot a - N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot c - N5 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot c - N4 \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot a$$

$$M_y = 2.132 \times 10^{-14}$$

$$M_z = N4 \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot a + N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b \quad M_z = 0$$

1.8.8-сурет

Тақтаға түсірілген күштер кеңістіктік күштер жүйесін құрайды, оған 6 тепе-теңдік теңдеу жазамыз. Шешім дұрыстығын тексеру үшін y' және z' осьтеріне қатысты моменттер теңдеулерін құруға болады. 1.8.8-суретте есепті Mathcad бағдарламасында шешуі және тексеру теңдеулері орындалатыны көрсетілген.

1.9 Сырғанау үйкелісі

Сырғанау үйкелісінің Кулон – Амонтон заңдары:

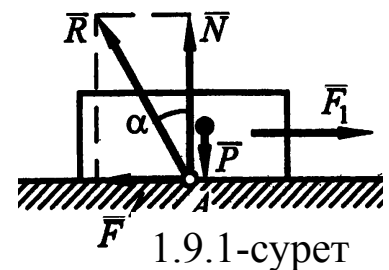
1. Бір денені басқа дененің үстінде жылжытуға тырысқан жағдайда олардың жанасу жазықтығында \overline{F} үйкеліс күші пайда болады, оның модулі $0 \leq F \leq F_{max}$. Денеге түсірілген үйкеліс күші күш түскен нүктесінің мүмкіндік жылдамдығына қарама-қарсы болады.

2. Максималды үйкеліс күші f үйкеліс коэффициенті мен N нормаль қысым күшінің көбейтіндісіне тең

$$F_{max} = f \cdot N. \quad (1.9.1)$$

f - жанасатын денелердің материалдары мен беттерінің қалпына (кедір-бұдырлығына, температурасына, ылғалдылығына және т.б.) тәуелді, ол тәжірибе арқылы анықталады. Мәндері: ағаш пен ағаш - 0,4-0,7; металл мен металл - 0,15-0,25; болат пен мұз - 0,027.

Тыныштық үйкелісі мен сырғанау үйкелісі айыра танылады. Тыныштық үйкелісінің коэффициенті F_{max} үйкеліс күші арқылы анықталады. Әдетте ол сырғанау үйкелісінің коэффициентінен артық. Сырғанау жылдамдығының өсуімен сырғанау үйкелісінің коэффициенті басында шамалы азаяды, содан кейін айтарлықтай өзгермейді.



3. Максималды үйкеліс күші жанасатын беттердің ауданына тәуелсіз.

Тегіс емес беттің реакциясы екі құраушы арқылы анықталады, олар \overline{N} (модулі нормаль қысым күшіне тең) және \overline{F} үйкеліс күші (1.9.1-сурет). Толық $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}$ реакциясы нормаль бағыттан α бұрышына ауытқиды ($\operatorname{tg} \alpha = F/N$).

Горизонталь тегіс беттің үстінде тұрған денеге ауырлық күштен басқа сыртқы күш түспесе, онда $F = 0$, толық реакция $R = N$ және ол тіреуіш бетіне перпендикуляр болады. Денеге шамасы аз \overline{F}_1 күшін түсіріп, біз оны қозғалтуға тырыссақ, қозғалыс бола қалмайды, өйткені $\overline{F} = -\overline{F}_1$ үйкеліс күші пайда болады, және $F < F_{max}$. \overline{F}_1 күші артқан сайын \overline{F} үйкеліс күші де артады. $F_1 = F_{max}$ болғанда тепе-теңдіктің шеткі қалпы орын алады, сонда толық реакция \overline{R} вертикальдан үйкеліс бұрышы деп аталатын α_{max} бұрышына ауытқиды. Оны φ арқылы белгілеп, мынаны анықтаймыз

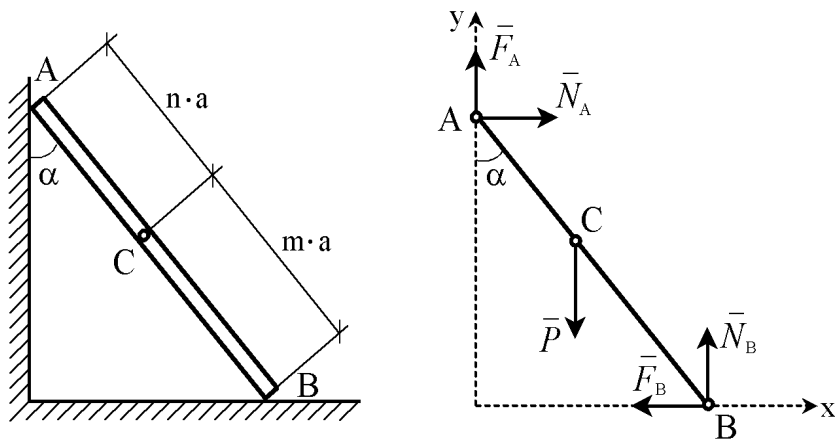
$$\operatorname{tg} \varphi = F_{max}/N = f. \quad (1.9.2)$$

Идеалды емес байланыстың реакциясының бағыты үйкеліс

бұрышымен шеттеледі. Әдетте үйкеліс күші ескерілуімен денелер тепе-теңдігінің шеткі (үйкеліс күші максималды болғандағы) қалпы қарастырылады.

1.9.1-мысал. Саты AB вертикаль қабырғаға сүйеп қойылған (1.9.2-сурет). Саты мен қабырға және еденнің арасындағы үйкеліс коэффициенттері f_1 және f_2 . Сатының адаммен бірге салмақ күші \bar{P} , сатыны $m:n$ қатынасына бөлетін C нүктесіне түсірілген. Сатының тепе-теңдік жағдайында, саты мен қабырға арасындағы α бұрыштың ең үлкен мәнін, сонымен қатар қабырға және еденнің нормаль құраушы реакция күштерін табу керек.

Шешуі: Сатыға әсер етуші бір ғана актив күш бар. Ол сатының салмақ күші \bar{P} , оны суретте көрсетеміз. Сатыны байланыстардан босатамыз. Еден мен қабырғаның сатыға жасайтын әсерлерін \bar{N}_A, \bar{N}_B нормаль реакция күштерімен және \bar{F}_A, \bar{F}_B үйкеліс күштерімен ауыстырамыз. Үйкеліс күшінің шекті шамасында бұрыш α_{\max} болады, сондықтан $F_A = f_1 \cdot N_A$, $F_B = f_2 \cdot N_B$.



1.9.2-сурет

Күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad N_A - F_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad F_A - P + N_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0,$$

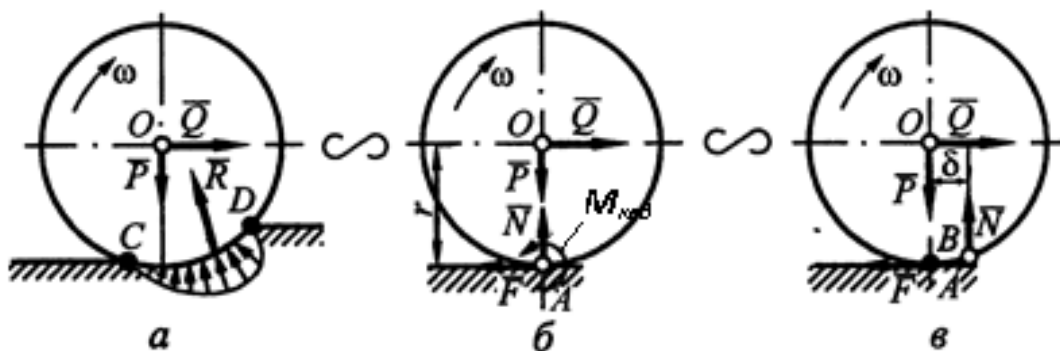
$$-P \cdot n \cdot \sin \alpha_{\max} + N_B \cdot (n + m) \cdot \sin \alpha_{\max} - F_B \cdot (n + m) \cdot \cos \alpha_{\max} = 0.$$

Құрылған теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді және α_{\max} табамыз

$$N_B = \frac{P}{1 + f_1 \cdot f_2}, \quad N_A = \frac{P \cdot f_2}{1 + f_1 \cdot f_2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{f_2(m+n)}{m - n \cdot f_1 \cdot f_2}.$$

1.10 Домалау үйкелісі

1.10.1,а-суретте домалау кезінде цилиндр тіреуші бетке жаншылып, онымен домалау бағыты жағына ығысқан CD доғасымен кескінделетін бетпен әрекеттескені көрсетілген.



1.10.1-сурет

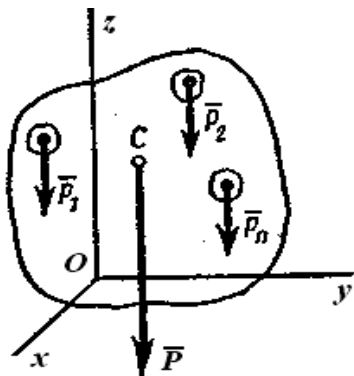
Тіреуші беттің \bar{R} толық реакциясы беттің деформациясынан туындаған таралған күштердің қосындысы ретінде цилиндрдің домалауына кедергі жасайды. Бір дененің басқа дененің бетінде домалау кезінде пайда болатын кедергі домалау үйкелісі деп аталады. Инженерлік есептеулер жүргізуде керегі - домалауға кедергі моменті (1.10.1,б-сурет). Құбылыстың сұлбасын жасағанда, домалау деформацияланбайтын бетінде қарастырылады, ал \bar{R} толық реакциясы A нүктесінен δ шамасына ауытқыған B нүктесіне түсетін екі құраушы күш арқылы көрсетіледі (1.10.1,в-сурет). \bar{F} күші – сырғанау үйкеліс күші, ал \bar{N} - нормаль реакциясы. Онда тепе-теңдік жағдайында

$$N = P, \quad F = Q, \quad Q \cdot r = \delta \cdot N. \quad (1.10.1)$$

Мұндағы $\delta \cdot N = M_{кед}$ домалауға кедергі моменті деп аталады. Q күші аз болса, N күшінің δ ауытқуы да аз болады; Q өсуімен ауытқу артады. Q_{max} болғанда цилиндр тепе-теңдіктің шеткі қалыпына жетеді, сонда N вертикаль диаметрден домалау үйкелісінің коэффициенті деп аталатын, δ_k шеткі қашықтығында өтеді. Сол кезде кедергі момент максималды мәніне ие болады: $M_{кед} = \delta_k \cdot N$. Домалау үйкеліс коэффициенті денелер материалдарына және жанасатын беттердің қалыпына тәуелді, ол тәжірибелік түрде анықталады (мысалы, рельс үстімен домалайтын дөңгелек үшін $\delta_k = 0,005$ см).

1.11 Қатты дененің ауырлық центрі

Қатты дене n бөлшектерден тұрады дейік (1.11.1-сурет). Сонда, жердің центріне қарай бағытталған, бөлшектердің n ауырлық күштері $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ аламыз. Егер дененің өлшемдері жердің радиусына



1.11.1-сурет

қарағанда әлдеқайда кіші шама болса, онда $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ күштерін өзара параллель бағытталған күштер деп алуға болады.

Дене бөлшектерінің ауырлық күштерінен тұратын $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ параллель күштер жүйесінің центрін дененің ауырлық центрі деп атаймыз.

Демек, қатты дененің ауырлық центрінің орны мына формуламен табылады

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (1.11.1)$$

Дененің ауырлық центрі C -ның координаттарын x_C, y_C, z_C , деп белгілесек, онда (1.11.1) векторлық теңдеуден мына формулаларды табамыз

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{\sum_{k=1}^n P_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{\sum_{k=1}^n P_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{\sum_{k=1}^n P_k}. \quad (1.11.2)$$

(1.11.2)–формулалар дененің ауырлық центрінің координаттарын береді.

Біртекті дене үшін оның бөлшектерінің ауырлық күштері меншікті салмақ γ және көлем арқылы табылады: $P_k = \gamma V_k$. Сонда біртекті дененің (яғни көлемнің) ауырлық центрінің координаталары (1.11.2) формуладан келесідей өрнектеледі

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{\sum_{k=1}^n V_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k y_k}{\sum_{k=1}^n V_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k z_k}{\sum_{k=1}^n V_k}. \quad (1.11.3)$$

Біртекті жұқа пластина үшін бөлшектердің көлемі бөлшек ауданы мен пластинаның h қалыңдығы арқылы анықталады: $V_k = S_k h$. Сонда біртекті жұқа пластинаның (немесе ауданның) ауырлық

центрінің координаталары (1.11.3) формуладан келесідей өрнектеледі:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k z_k}{\sum_{k=1}^n S_k}. \quad (1.11.4)$$

Біртекті жіңішке сырық үшін бөлшектердің көлемі бөлшек ұзындығы мен сырық көлденең қимасының S ауданы арқылы анықталады $V_k = l_k S$.

Сонда біртекті жіңішке сырықтың (немесе сызықтың) ауырлық центрінің координаталары (1.11.3) формуладан келесідей өрнектеледі

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{\sum_{k=1}^n l_k}. \quad (1.11.5)$$

Ауырлық центрдің орнын анықтаудың келесі тәсілдері бар:

а) симметриялықты қолдану, яғни біртекті дененің симметриялық жазықтығы (симметриялық өсі немесе симметриялық центрі) болса, онда дененің ауырлық центрі сол жазықтықта (сол өсте немесе сол центрде) орналасады;

б) қарапайым денелерге жіктеу, яғни денені бөлшектерге емес, ауырлық центрлерінің орны белгілі қарапайым денелерге жіктеп, (1.11.2)-(1.11.5) формулаларында солардың ауырлық күштерін (көлемдерін, аудандарын немесе ұзындықтарын) және ауырлық центрлерінің координаталарын ескеру керек;

в) теріс массалар (көлемдер, аудандар) тәсілі, яғни денеде ойықтар мен тесіктер болса, олардың ауырлық күштері (көлемдері, аудандары) (1.11.2)-(1.11.5) формулаларында теріс таңбамен алынады.

1.11.1-мысал. Радиусы $AO = 30$ см болатын ADB дөңгелек сегмент ауданының C ауырлық центрін табу керек. $\angle AOB = 60^\circ$ (1.11.2-сурет).

Шешуі: Ауырлық центрі DO симметрия осінің бойында жатыр. Берілген сегмент AOB ауданын ойша $ADBO$ сектор ауданына дейін толықтырамыз. Сонда берілген аудан орнына сектор ауданы мен ауданы теріс таңбалы $\triangle ADB$ шығады.

Координаттар өстерінің бас нүктесі ретінде O -ны аламыз да, өстерді суреттегідей бағыттаймыз. Есеп шартына сай топтау әдісінен шығатын өрнек, мынадай түрде жазылады

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}.$$

Өрнектегі белгісіз шамалар:

S_1 – сектор ауданы;

S_2 – AOB үшбұрышының ауданы;

x_1 – сектор ауданының ауырлық центрінің абсциссасы;

x_2 – ABO үшбұрышы ауданының ауырлық центрінің абсциссасы.

Осыларды есептейік

$$S_1 = r^2 \cdot \alpha, \quad S_2 = r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cdot \cos \alpha.$$

Осы шамаларды негізгі өрнекке қойсақ алатынымыз

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} r^3 \cdot \sin \alpha - \frac{2}{3} r^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{r^2 \alpha - r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

$r = 30 \text{ см}$ және $\alpha = 30^\circ$ болғанда $x_c = 27,7 \text{ см}$.

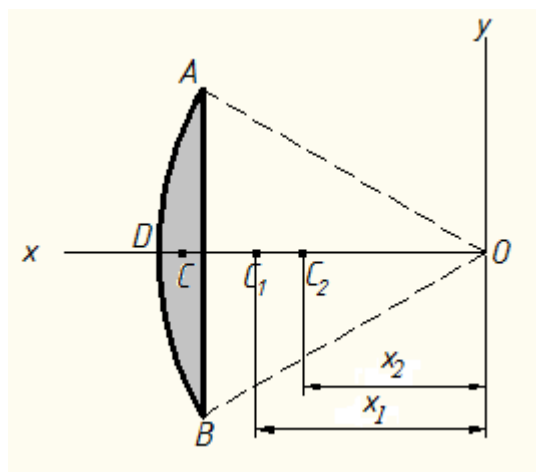
1.12 «Статика» тақырыбы бойынша есептер

1.12.1-есеп. Салмағы 3 кН біртекті шардың тегіс бетке түсіретін қысымын және оны ұстап тұрған сырықтың реакциясын табу керек.

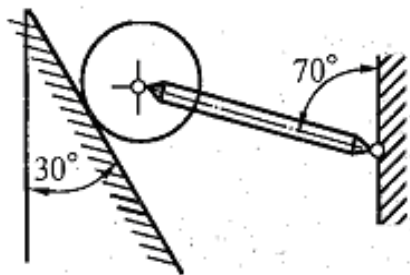
Жауабы: $3,6 \text{ кН}$, $3,39 \text{ кН}$ (сырық сығылуда).

1.12.2-есеп. $ABCD$ тіреуіші төрт өзара қосылған сырықтан құрылған. A топсасына салмағы 8 кН жүк ілінген. Түйіндерді ойып алу тәсілін қолданып, барлық сырықтарға түсірілген күштерді анықтау керек.

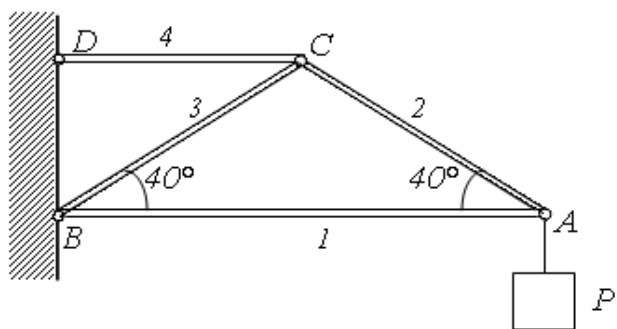
Жауабы: $S_1 = 9,5 \text{ кН}$ (сығылуда), $S_2 = 12,4 \text{ кН}$ (созылуда), $S_3 = 12,4 \text{ кН}$ (сығылуда), $S_4 = 19 \text{ кН}$ (созылуда).



1.11.2-сурет



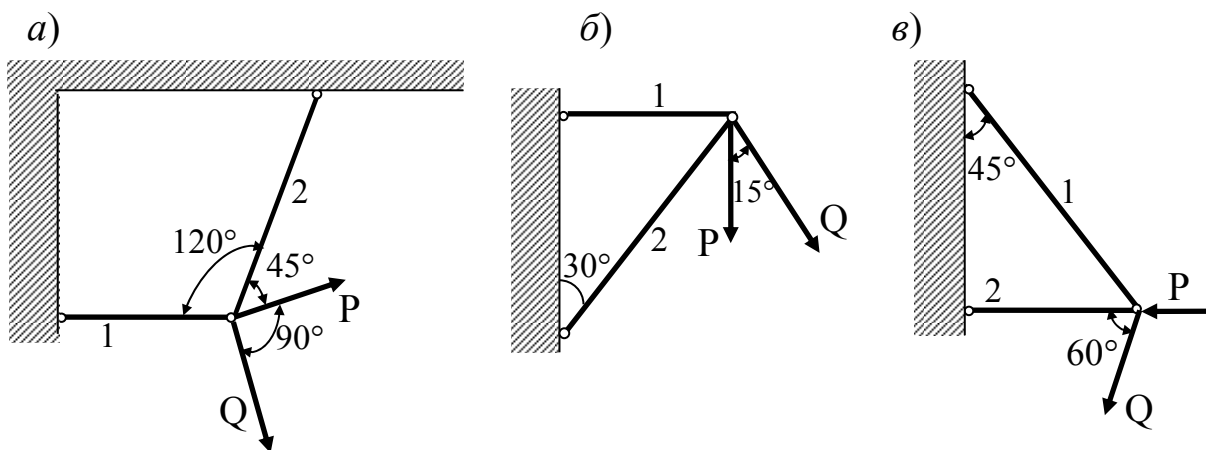
1.12.1-есепке сурет



1.12.2-есепке сурет

1.12.3-есеп. Суретте көрсетілген құрылымдар сырықтарына түсірілген күштерді анықтау керек. Берілгені: $P=5\text{ кН}$, $Q=8\text{ кН}$.

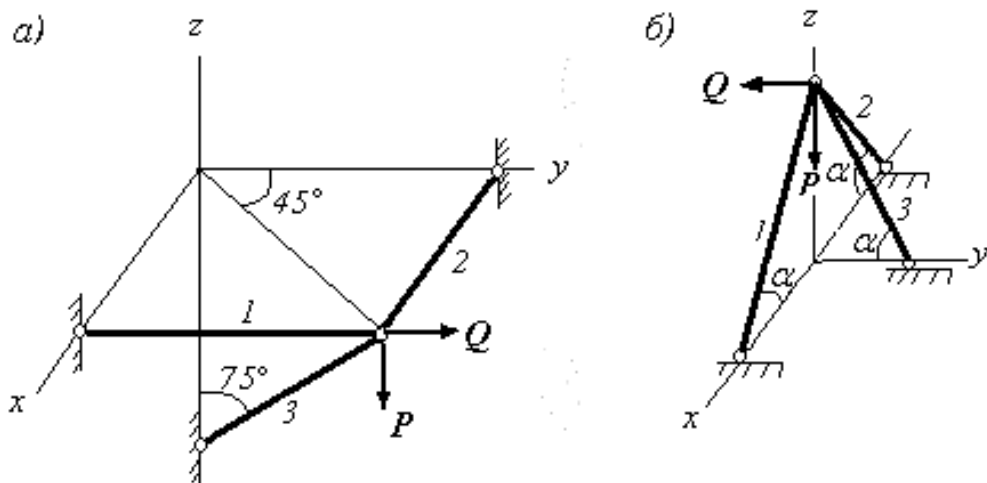
- Жауабы:** а) $S_1 = 10,6\text{ кН}$, $S_2 = 7,43\text{ кН}$ (екеуі де созылуда);
 б) $S_1 = 9,42\text{ кН}$ (созылуда), $S_2 = 14,7\text{ кН}$ (сығылуда);
 в) $S_1 = 9,8\text{ кН}$ (созылуда), $S_2 = 15,9\text{ кН}$ (сығылуда).



1.12.3-есепке сурет

1.12.4-есеп. Кеңістік құрылымдар сырықтарына түсірілген күштерді анықтау керек. Берілгені: $P=4\text{ кН}$, $Q=6\text{ кН}$, $\alpha=60^\circ$.

- Жауабы:** а) $S_1 = 16,5\text{ кН}$, $S_2 = 10,5\text{ кН}$ (созылуда), $S_3 = 15,4\text{ кН}$ (сығылуда).
 б) $S_1 = S_2 = 8,3\text{ кН}$ (сығылуда), $S_3 = 12\text{ кН}$ (созылуда).

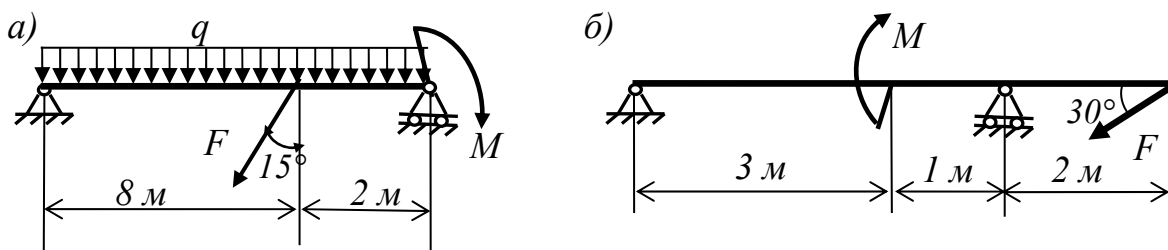


1.12.4-есепке сурет

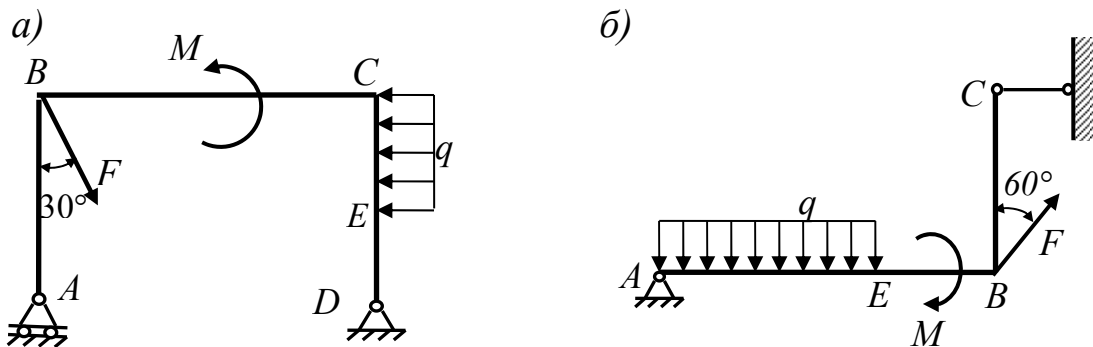
1.12.5-есеп. $M=8\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=12\text{кН}$, $q=4\text{кН/м}$ болғанда арқалық тіректерінің реакцияларын анықтау керек.

Жауабы: а) $3,1\text{кН}$, $21,5\text{кН}$, $30,1\text{кН}$;

б) $10,4\text{кН}$, -5кН , 11кН .



1.12.5-есепке сурет



1.12.6-есепке сурет

1.12.6-есеп. Құрылымдар байланыстарының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=15\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=20\text{кН}$, $q=4\text{кН/м}$, $AB=CD=3\text{м}$, $BC=4\text{м}$, $CE=2\text{м}$;

б) $M=9\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=12\text{кН}$, $q=2\text{кН/м}$, $AB=5\text{м}$, $BC=3\text{м}$, $BE=2\text{м}$.

Жауабы: а) $17,6\text{кН}$, -2кН , $-0,25\text{кН}$; б) $-14,4\text{кН}$, $0,4\text{кН}$.

1.12.7-есеп. Құрылымдар қатты бекітпелерінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=12\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=10\text{кН}$, $q=8\text{кН/м}$, $a=2\text{м}$, $b=1,5\text{м}$;

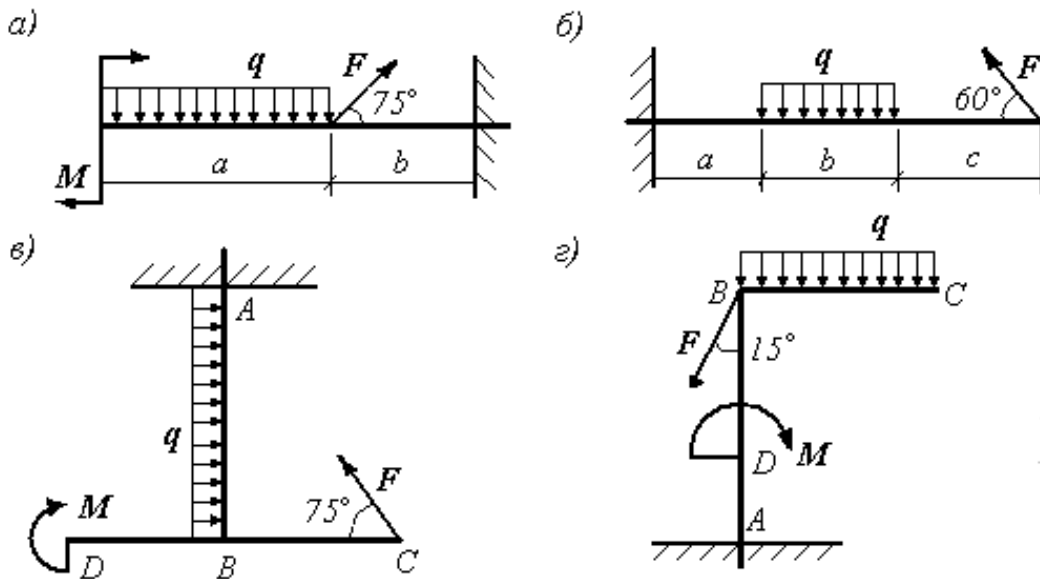
б) $F=20\text{кН}$, $q=6\text{кН/м}$, $a=1\text{м}$, $b=c=1,5\text{м}$;

в) $M=15\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=12\text{кН}$, $q=4\text{кН/м}$, $AB=CD=3\text{м}$, $BC=2\text{м}$;

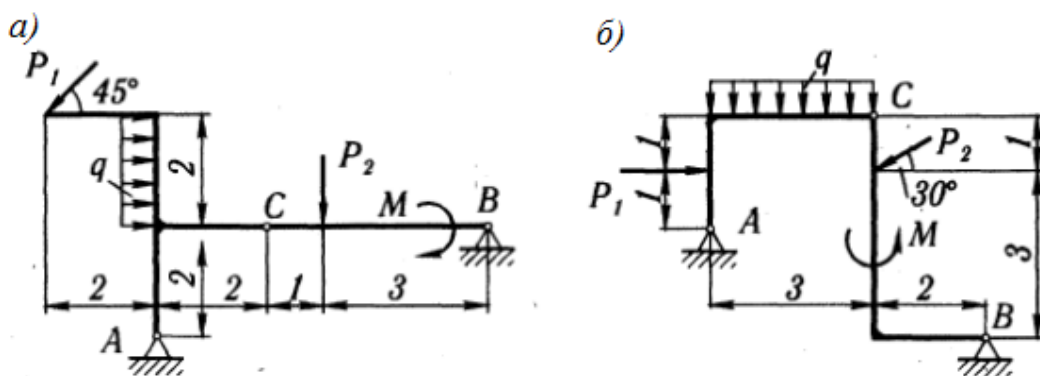
г) $M=6\text{кН}\cdot\text{м}$, $F=14\text{кН}$, $q=10\text{кН/м}$, $AB=5\text{м}$, $BC=BD=3\text{м}$.

Жауабы: а) $2,6\text{кН}$, $6,3\text{кН}$, $13,5\text{кН}\cdot\text{м}$; б) 10кН , $8,3\text{кН}$, $53,5\text{кН}\cdot\text{м}$;

в) $8,9\text{кН}$, $11,6\text{кН}$, $16,9\text{кН}\cdot\text{м}$; г) $3,6\text{кН}$, $43,5\text{кН}$, $32,9\text{кН}\cdot\text{м}$.



1.12.7-есепке сурет



1.12.8-есепке сурет

1.12.8-есеп. Құрама құрылымдардың сыртқы байланыстарының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=7\text{кН}\cdot\text{м}$, $P_1=6\text{кН}$, $P_2=8\text{кН}$, $q=3\text{кН/м}$;

б) $M=4\text{кН}\cdot\text{м}$, $P_1=10\text{кН}$, $P_2=12\text{кН}$, $q=5\text{кН/м}$.

Жауабы: а) $X_A=-1,23\text{кН}$, $Y_A=8,49\text{кН}$, $X_B=-0,52\text{кН}$, $Y_B=3,75\text{кН}$;

б) $X_A=2,91\text{кН}$, $Y_A=12,8\text{кН}$, $X_B=-2,52\text{кН}$, $Y_B=8,23\text{кН}$.

1.12.9-есеп. Білікті тепе-теңдікте ұстап тұрған P күшін және білік тіректерінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $Q=2\text{кН}$, $G=3\text{кН}$, $r=R/2$, $a=b=1\text{м}$, $c=0,3\text{м}$;

б) $Q=8\text{кН}$, $G=4\text{кН}$, $r=0,4\text{м}$, $R=0,5\text{м}$, $a=2\text{м}$, $b=1\text{м}$, $c=3\text{м}$;

в) $T=4\text{кН}$, $G=5\text{кН}$, $r=0,3\text{м}$, $R=0,4\text{м}$, $a=1\text{м}$, $b=3\text{м}$, $c=2\text{м}$;

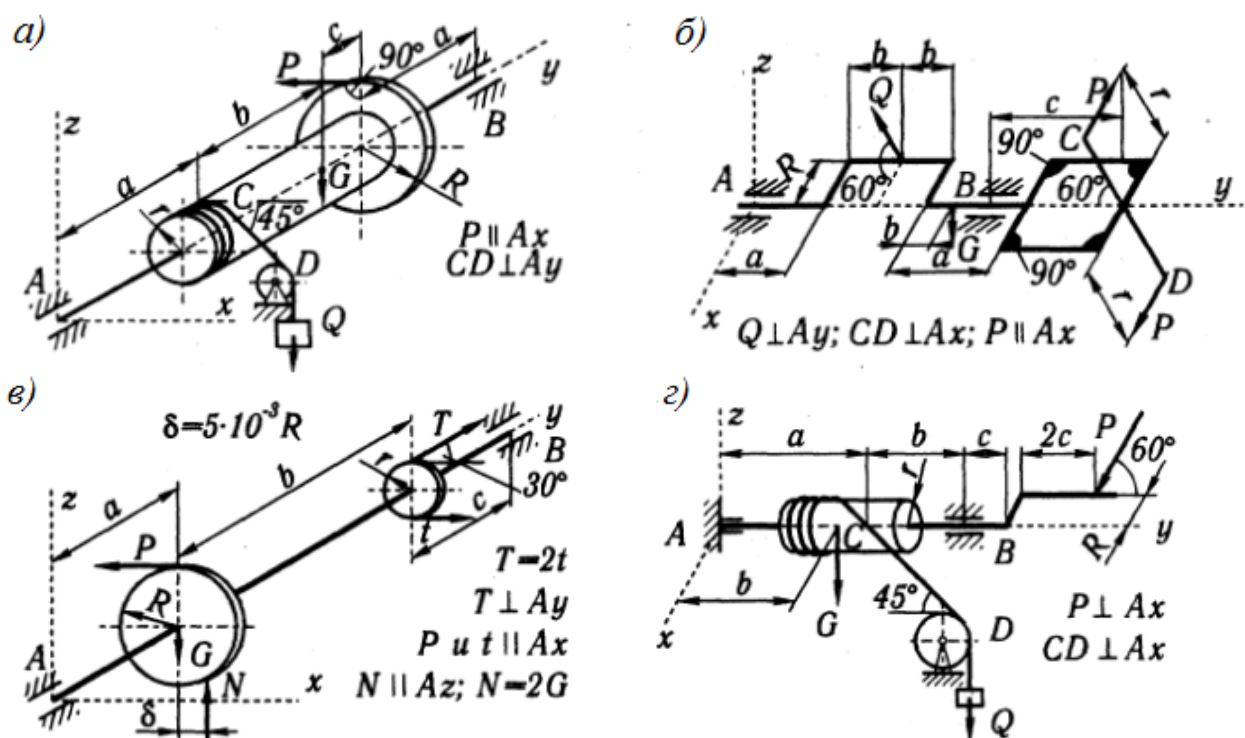
г) $Q=18\text{кН}$, $G=10\text{кН}$, $r=0,1\text{м}$, $R=0,3\text{м}$, $a=4\text{м}$, $b=3\text{м}$, $c=1\text{м}$.

Жауабы: а) $P=1\text{кН}$, $X_A=-0,68\text{кН}$, $Z_A=2,16\text{кН}$, $X_B=0,27\text{кН}$, $Z_B=2,16\text{кН}$;

б) $P=5\text{кН}$, $X_A=-2\text{кН}$, $Z_A=-2,8\text{кН}$, $X_B=-2\text{кН}$, $Z_B=-0,13\text{кН}$;

в) $P=1,45\text{кН}$, $X_A=-0,61\text{кН}$, $Z_A=-4,83\text{кН}$, $X_B=-3,4\text{кН}$, $Z_B=-2,17\text{кН}$;

г) $P=4,9\text{кН}$, $X_A=-0,3\text{кН}$, $Z_A=9,35\text{кН}$, $X_B=0,3\text{кН}$, $Z_B=17,6\text{кН}$.



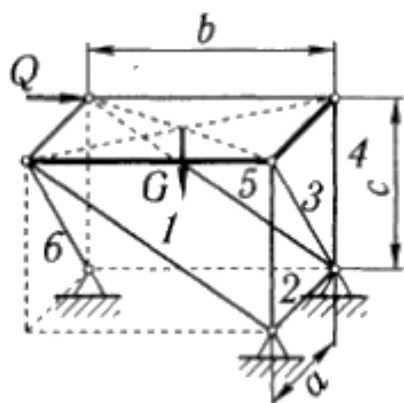
1.12.9-есепке сурет

1.12.10-есеп. Салмағы $G=6\text{кН}$ тақтаны ұстап тұрған сырықтардың реакцияларын табу керек. Берілгені: $Q=3\text{кН}$, $a=3\text{м}$, $b=5\text{м}$, $c=4\text{м}$.

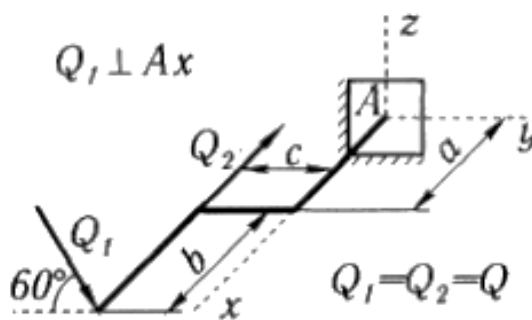
Жауабы: $S_1=-0,96\text{кН}$, $S_2=-2,4\text{кН}$, $S_3=0,75\text{кН}$, $S_4=-1,2\text{кН}$, $S_5=-2,88\text{кН}$, $S_6=-0,75\text{кН}$ (теріс таңба сырық сығылатынын білдіреді).

1.12.11-есеп. A қатты бекітпесінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені: $Q_1=Q_2=10\text{кН}$, $a=2\text{м}$, $b=3\text{м}$, $c=1\text{м}$.

Жауабы: $X_A=10\text{кН}$, $Y_A=-5\text{кН}$, $Z_A=-8,66\text{кН}$, $M_{Ax}=-8,66\text{кН}\cdot\text{м}$, $M_{Ay}=-43,3\text{кН}\cdot\text{м}$, $M_{Az}=-15\text{кН}\cdot\text{м}$.



1.12.10-есепке сурет



1.12.11-есепке сурет

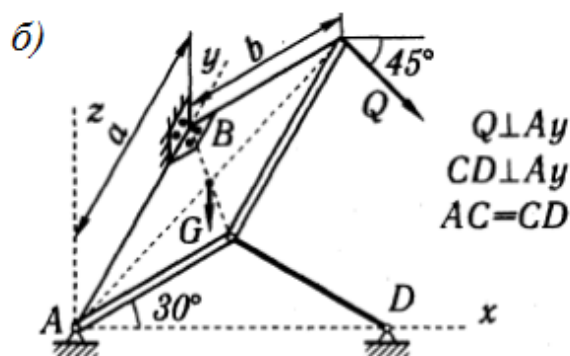
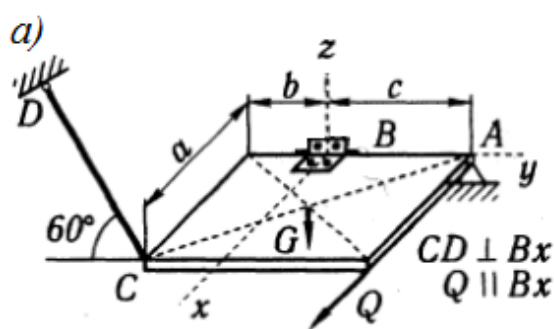
1.12.12-есеп. Сфералық A топса мен цилиндрлік B топсасының және салмағы G тақтаны ұстап тұрған CD сырығының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $Q=10\text{кН}$, $G=8\text{кН}$, $a=5\text{м}$, $b=1\text{м}$, $c=3\text{м}$;

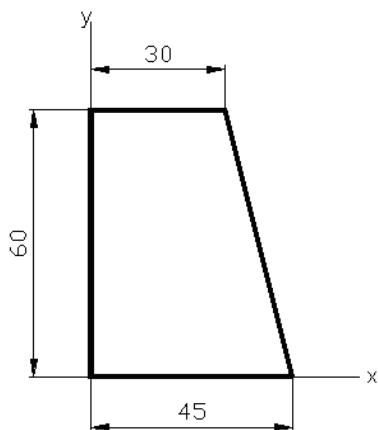
б) $Q=5\text{кН}$, $G=3\text{кН}$, $a=4\text{м}$, $b=3\text{м}$.

Жауабы: а) $X_A = -13,85\text{кН}$, $Y_A = 2,31\text{кН}$, $Z_A = 4\text{кН}$, $X_B = 3,85\text{кН}$, $Z_B = 0$, $S_{CD} = 4,62\text{кН}$;

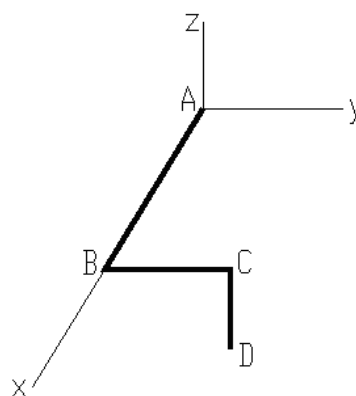
б) $X_A = 6,13\text{кН}$, $Y_A = 0$, $Z_A = -2,04\text{кН}$, $X_B = -3,54\text{кН}$, $Z_B = 5,04\text{кН}$, $S_{CD} = -7,08\text{кН}$.



1.12.12-есепке сурет



1.12.13-есепке сурет



1.12.14-есепке сурет

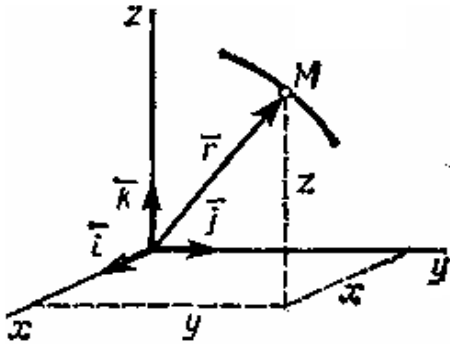
1.12.13-есеп. $ABCD$ трапециясы ауырлық центрінің координаталарын табу керек.

Жауабы: 19, 28.

1.12.14-есеп. Біртекті $ABCD$ сынық сырығы ауырлық центрінің координаталарын табу керек. Берілгені: $AB=1м, BC=0,6м, CD=0,4м$.

Жауабы: 0,75м, 0,21м, -0,04м.

1.13 Кинематика. Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері



1.13.1-сурет

Кинематикада нүктелердің, денелердің және денелер жүйелерінің қозғалысы олардың инерциялық қасиеттері және оларға түсірілген күштер ескерілмей қарастырылады. Кинематикада нүктелер мен денелердің кез келген t уақыт мезгілінде орналасулары, жылдамдықтары және үдеулері анықталады. Ол үшін олардың қозғалысы берілу керек. Нүкте қозғалысы үш тәсілдің біреуімен берілуі мүмкін.

1. Векторлық тәсіл. Бұл тәсілде нүктенің орны $\vec{r} = \overline{OM}$ радиус-векторымен анықталады (1.13.1-сурет). Қозғалыс кезінде \vec{r} – өзінің модулін де, бағытын да өзгертеді. Демек, ол t -ның бір мәнді, үздіксіз, дифференциалданатын функциясы болып келеді. (1.13.1) өрнегі нүкте қозғалысының векторлық теңдеуі болып келеді

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.13.1)$$

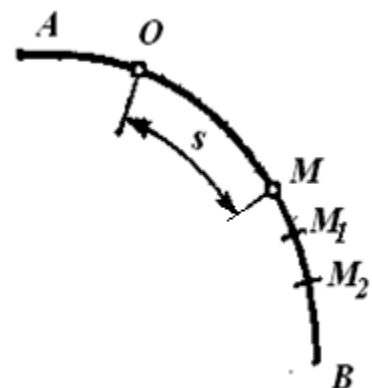
Сонда нүктенің траекториясы \vec{r} – векторының географы болып табылады.

2. Координаталық тәсіл. Бізге декарт координат жүйесіне қатысты M нүктесінің қозғалысын қарастыру керек болсын. Егер осы нүктенің x, y, z координаталары t уақыттың үздіксіз бірімәнді функциялары болып келсе, яғни

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1.13.2)$$

онда нүктенің әрбір уақыт сәтіндегі орны толық анықталады.

Осы тәсілде нүктенің координаталары полярлық, цилиндрлік немесе сфералық координат жүйелерінде де берілуі мүмкін.



1.13.2-сурет

3. Табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысының берілуінің табиғи тәсілінде нүктенің кез келген бір санақ жүйесіне қатысты траекториясы, санақ O нүктесі мен бағыты беріледі. M нүктенің траектория бойындағы орнын әрбір уақыт сәтінде де таба алуымыз үшін, доға ұзындығы $s = OM$ және уақыт t -ның әрбір мәніне сәйкес келетін s -тің мәнін беретін бір сарынды, үздіксіз уақыт функциясы берілуі керек

$$s = f(t). \quad (1.13.3)$$

Доға ұзындығы s пен уақыт t -ның арасындағы функциялық тәуелділік (1.13.3) нүктенің траектория бойымен қозғалуының заңы деп аталады.

1.14 Қозғалысы векторлық

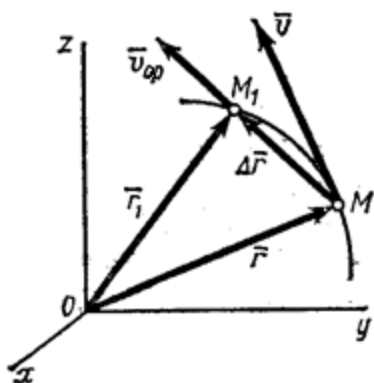
тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі

Нүкте M -нің қозғалысы $\vec{r} = \vec{r}(t)$ векторлық теңдеуімен берілісін.

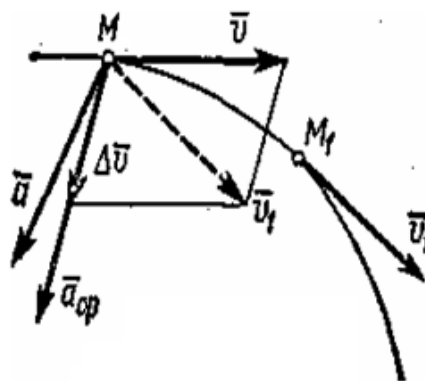
M нүктесінің $\Delta t = t_1 - t$ уақыт аралығындағы орын ауыстыру векторы $\overline{MM_1} = \Delta \vec{r}$ және орташа жылдамдығы $\vec{v}_{opt} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Орташа жылдамдық векторы \vec{v}_{opt} хорда MM_1 бойымен қозғалыс болатын жаққа қарай бағытталады (1.14.1 сурет). Нүктенің t уақыт мезгіліндегі жылдамдығы \vec{r} радиус-векторының t аргументі бойынша бірінші ретті туындысы болып табылады

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.14.1)$$

Жылдамдық векторы \vec{v} нүкте траекториясына жанама болып келеді.



1.14.1-сурет



1.14.2-сурет

Жылдамдықтың уақыт өтуіне байланысты өзгеруінің тездігін сипаттаушы физикалық шаманы үдеу деп атайды. Нүктенің Δt уақыт

аралығындағы орташа үдеуі $\bar{a}_{opt} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$. Нүктенің t уақыт мезгіліндегі үдеуі деп, Δt уақыт өсімшесі нөлге ұмтылғандағы орташа үдеудің ұмтылған шегін айтамыз

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{opt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (1.14.2)$$

Сонымен, берілген уақыт мезгіліндегі нүктенің үдеуі жылдамдық векторының уақыт бойынша алынған бірінші ретті туындысына немесе нүктенің радиус-векторының уақыт бойынша алынған екінші ретті туындысына тең. Үдеу векторы \bar{a} әрқашан траекторияның ойыс жағына қарай бағытталады (1.14.2-сурет).

1.15 Қозғалысы координаттық

тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі

M нүктесінің қозғалысы координаттық тәсілмен берілген болсын

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Сонда нүктенің $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус-векторын оның $Oxuz$ өстеріндегі құраушылары, яғни координаталары арқылы өрнектеуге болады

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (1.15.1)$$

(1.15.1) өрнегін (1.14.1)–теңдікте қолданып келесіні аламыз

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (1.15.2)$$

Сонда жылдамдық векторының өстерге проекциялары сәйкес координаталарының бірінші ретті туындларына тең

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{немесе} \quad v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \quad (1.15.3)$$

мұнда шама үстінде қойылған нүкте уақыт бойынша туындыны білдіреді.

Жылдамдық модулі

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.15.4)$$

Жылдамдық векторының бағыттаушы косинустары:

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = v_x/v, \quad \cos(\bar{v}, \bar{j}) = v_y/v, \quad \cos(\bar{v}, \bar{k}) = v_z/v. \quad (1.15.5)$$

(1.15.2) өрнегін (1.14.2)–теңдікте қолданып келесіні аламыз

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k}. \quad (1.15.6)$$

Сонда \bar{a} үдеу векторының өстерге проекциялары келесідей анықталады

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (1.15.7)$$

$$\text{немесе } a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Үдеу модулі

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.15.8)$$

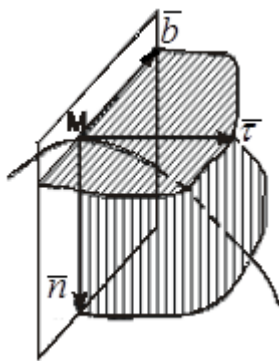
Үдеу векторының бағыттаушы косинустары

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = a_x/a, \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = a_y/a, \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = a_z/a. \quad (1.15.9)$$

1.16 Қозғалысы табиғи

тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі

Қозғалыс табиғи тәсілмен берілген жағдайда нүктенің жылдамдығы мен үдеуі олардың *Mπb* табиғи үшжақтықтың өстеріне



проекциялары арқылы табады. Өстердің бағыттары: *Mτ* - *s* санағының оң бағытына сәйкес траекторияға жанама бойынша; *Mn* бас нормалі – траекториямен жанасу жазықтығында траекторияның ойыс жағына жүргізілген нормалі бойынша; *Mb* бинормалі – алдыңғы екі өске перпендикуляр бойынша, олармен оң өстер жүйесін құрайтын болып, бағытталады (1.16.1-сурет).

1.16.1-сурет

Нүктенің жылдамдығын анықтаймыз

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}. \quad (1.16.1)$$

Жылдамдықтың нүкте траекториясының жанамасына проекциясы

$$v_\tau = \dot{s}. \quad (1.16.2)$$

Жылдамдықтың модулі $v = |\dot{s}|$ және бағыты траекторияға жанама болып келеді, сонда $v_\tau > 0$ болса, жылдамдық векторы *s* санағының оң бағытына сәйкес, $v_\tau < 0$ болса, *s* санағының теріс бағытына сәйкес бағытталады.

Нүктенің үдеуі үшін

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d(v_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \cdot \bar{\tau} + v_\tau \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt} = \ddot{s} \cdot \bar{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (1.16.3)$$

Мұнда $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \frac{1}{\rho} \bar{n}$ (ρ – қарастырылатын орнында нүкте

траекториясының қисықтық радиусы), сонда

$$\bar{a} = \dot{s} \cdot \bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \bar{n}, \quad (1.16.4)$$

яғни үдеу векторы жанама және нормаль құраушыларының қосындысына тең

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (1.16.5)$$

\bar{a} векторы жанасу жазықтығында, яғни $M\tau$ жазықтығында жатады.

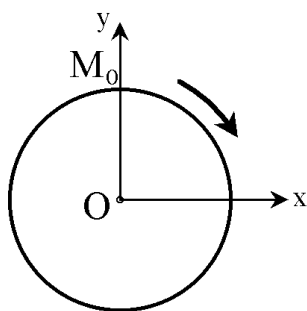
(1.16.4) теңдігін $M\tau$, Mn және Mb өстеріне проекциялап, келесіге келеміз

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (1.16.5)$$

Нүкте бірқалыпты қозғалған жағдайда, оның жылдамдық векторының модулі тұрақты болып үдеудің жанама құраушысы (жанама үдеуі) нөлге тең болады $a_\tau = 0$, сонымен нүктенің жанама үдеуі оның жылдамдық шамасының өзгеруін сипаттайды.

Нүкте түзу сызықпен қозғалған жағдайда, оның жылдамдық векторының бағыты өзгермейді. Түзу сызықтың қисықтық радиусы шексіз сан болғандықтан нүкте үдеуінің нормаль құраушысы (нормаль үдеуі) нөлге тең болады $a_n = 0$, яғни нүктенің нормаль үдеуі оның жылдамдық бағытының өзгеруін сипаттайды.

1.16.1-мысал. Нүкте қозғалысының берілген $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$ теңдеулерінен оның траекториясының теңдеуін анықтау, сонымен қатар нүктенің бастапқы орнынан саналатын қашықтығын траектория бойында нүкте қозғалысының заңдылығы арқылы көрсету қажет.



1.16.2-сурет

Шешуі: Теңдеулердің екі жағын квадраттап және олардың мүшелерін қоссақ, алатынымыз $x^2 + y^2 = 9 \cdot \sin^2 t + 9 \cdot \cos^2 t$, немесе $x^2 + y^2 = 9$. Сонымен, нүкте траекториясы - центрі бас нүктесінде болатын радиусы 3 бірлікті ұзындықтағы шеңбер (1.16.2-сурет).

Траектория бойында қозғалыс заңдылығын анықтаймыз. x және y координаттарынан t бойынша туынды таба отырып, алатынымыз

$$\dot{x} = 3 \cdot \cos t, \quad \dot{y} = -3 \cdot \sin t.$$

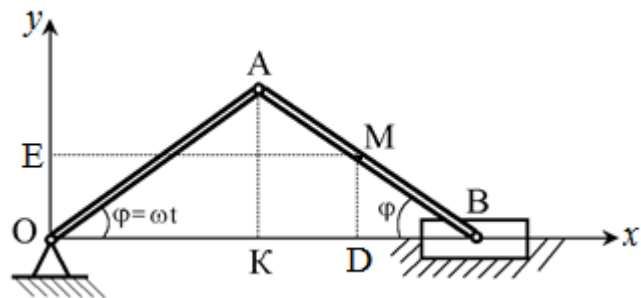
Осыны қолданып, келесіні аламыз

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_0^t 3 dt \quad \text{немесе} \quad s = 3 \cdot t.$$

Алынған теңдеу траектория бойында нүкте қозғалысының заңдылығын береді. Берілген теңдеулерден $t=0$ болғанда $x=0$, $y=3$, яғни нүкте M_0 орнында болатындығын және t өсіп бастағанда оң таңбаны қабылдап x өсетінін, ал y кемитінін көреміз.

1.16.2 мысал. Қосиін OA тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады және $OA = AB = a$ (1.16.3-сурет). Қосиін-бұлғақты механизм бұлғағының ортасында орналасқан M нүктесінің және жылжыма B -ның жылдамдықтарын табу керек.

Шешуі: M және B нүктелерінің қозғалыс теңдеулері берілмеген, сондықтан, оларды құру қажет. Механизмді кез келген орнында кескіндейміз.



1.16.3 сурет

M және A нүктелерінен өстерге MD , ME және AK перпендикуляр түзулерді тұрғызамыз. Онда алатынымыз

$$x_M = OD = OK + KD = OA \cdot \cos \varphi + AM \cdot \cos \varphi,$$

$$y_M = MD = MB \cdot \sin \varphi,$$

$$x_B = OB = 2 \cdot OK = 2 \cdot AB \cdot \cos \varphi.$$

Мұнда $AB = OA = a$, $AM = a/2$, $\varphi = \omega \cdot t$ ескере отырып, M және B нүктелерінің қозғалыс теңдеулерін құрамыз

$$x_M = \frac{3 \cdot a \cdot \cos(\omega t)}{2}, \quad y_M = \frac{a \cdot \sin(\omega t)}{2}, \quad x_B = 2 \cdot a \cdot \cos(\omega t).$$

M және B нүктелерінің жылдамдықтарын анықтаймыз

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2} a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t), \quad v_{My} = \dot{y}_M = \frac{a}{2} \omega \cdot \cos(\omega t),$$

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{a}{2} \cdot \omega \cdot \sqrt{8 \cdot \sin^2(\omega t) + 1},$$

$$v_B = \dot{x}_B = -2a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t).$$

1.16.3-мысал. Дизельдің қосиін жұдырықшасының қозғалысы $x = 75 \cdot \cos 4t^2$, $y = 75 \cdot \sin 4t^2$ теңдеулерімен берілген (t – секундамен,

x, y – сантиметрмен өлшенеді). Жұдырықша жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін табу керек.

Шешуі: Нүкте жылдамдығының осьтерге проекцияларын анықтаймыз

$$v_x = \dot{x} = -600 \cdot t \cdot \sin 4t^2, \quad v_y = \dot{y} = 600 \cdot t \cdot \cos 4t^2.$$

Жылдамдық модулі

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{600^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 600^2 \cdot t^2 \cdot \cos^2 4t^2} = 600 \cdot t \text{ см/с}.$$

Нүктенің жанама үдеуі жылдамдықтың жанама өске проекциясынан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d(600 \cdot t)}{dt} = 600 \text{ см/с}^2.$$

Нүкте толық үдеуінің координаттар остерінде проекцияларын анықтаймыз

$$a_x = \dot{v}_x = -4800 \cdot t^2 \cdot \cos 4t^2 - 600 \cdot \sin 4t^2,$$

$$a_y = \dot{v}_y = -4800 \cdot t^2 \cdot \sin 4t^2 + 600 \cdot \cos 4t^2.$$

Үдеу модулі мынадай өрнектермен анықталады

$$\begin{aligned} a^2 = a_x^2 + a_y^2 = & 4800^2 \cdot t^4 \cdot \cos^2 4t^2 + 2 \cdot 4800t^2 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin 4t^2 + \\ & + 600^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 4800^2 \cdot t^4 \cdot \sin^2 4t^2 - 2 \cdot 4800t^2 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin 4t^2 + \\ & + 600^2 \cdot \cos^2 4t^2 = 4800^2 \cdot t^4 + 600^2. \end{aligned}$$

Толық үдеу мен жанама және нормаль құраушыларының арасында мынадай байланыс бар

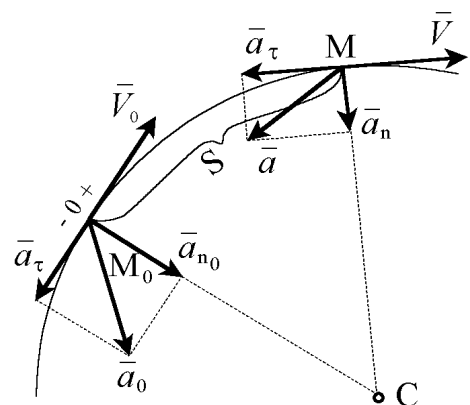
$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2.$$

Онда нүктенің нормаль үдеуі

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 4800 \cdot t^2.$$

1.16.4-мысал. Пойыз радиусы $R=800$ м шеңбер доғасы бойымен тең кемімелі қозғалыс жасайды және $s=800$ м жол жүргенде, бастапқы жылдамдығы $v_0=54$ км/сағ, ал соңғы жылдамдығы $v=18$ км/сағ тең болады (1.16.4-сурет). Пойыздың бастапқы және соңғы орнындағы толық үдеулерін, сонымен қатар осы доғаның ұзындығын жүріп өтетін уақытын анықтау қажет.

Шешуі: пойыздың бір нүктесінің қозғалысын қарастырамыз, мысалы ауырлық центрінің. Доғалық координаттың бас O нүктесін



1.16.4-сурет

қозғалатын нүктенің бастапқы M_0 орнына қойып, қозғалыстың бағытын оң бағыт ретінде қабылдаймыз (1.16.4-сурет). Онда $s_0=0$.

Нүктенің тең айнымалы қозғалысы үшін, қозғалыс теңдеуі және жылдамдығы төмендегі формулалармен анықталады

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}, \quad v = v_0 + a_\tau \cdot t.$$

Мұндағы жанама кернеу тең кемімелі қозғалыс жағдайында теріс сан болып келеді.

Осы екі теңдеуден аламыз

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t}, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{(v - v_0) \cdot t}{2}, \quad t = \frac{2s}{v + v_0}$$

Есептің берілгені бойынша нүктенің жүрген жолы $s=800$ м, бастапқы жылдамдығы $v_0=54$ км/сағ=15 м/с, соңғы жылдамдығы $v=18$ км/сағ=5 м/с, шеңбер доғасының қисықтық радиусы $R=800$ м. Осыны ескере отырып табамыз

$$t = \frac{2 \cdot 800}{15 + 5} = 80 \text{ с}, \quad a_\tau = \frac{5 - 15}{80} = -0,125 \text{ м/с}^2.$$

Нүктенің бастапқы және соңғы орнындағы нормаль үдеуінің шамалары

$$a_{n_0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{15^2}{800} \approx 0,28 \text{ м/с}^2, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{800} \approx 0,03 \text{ м/с}^2.$$

Толық үдеудің бастапқы және соңғы орнындағы шамалары

$$a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n_0}^2} = \sqrt{0,125^2 + 0,28^2} \approx 0,308 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0,125^2 + 0,03^2} \approx 0,129 \text{ м/с}^2.$$

1.17 Қатты дененің қарапайым қозғалыстары

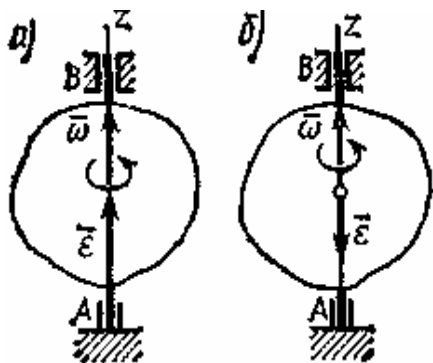
Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы деп оның әрбір екі нүктесін қосатын түзудің өзіне-өзі тек параллель қозғалатындай қозғалыс түрін айтамыз.

Ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің траекториялары бірдей, берілген бір уақыт мезгіліндегі жылдамдықтары өзара тең және үдеулері өзара тең болады.

Сонымен, ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт мезгіліндегі сәйкес кинематикалық сипаттамалары бірдей, яғни олардың біреуінің ғана қозғалысын білген жеткілікті.

Қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын дене деп, екі нүктесі қозғалмайтын денені айтамыз. Қозғалмайтын нүктелерді қосатын түзу оның айналу өсі болады.

Дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі орны бір параметрмен анықталады. Мұндай параметр рөлін айналу бұрышы φ атқарады. Ол



1.17.1-сурет

уақыттың бірімәнді функциясы болып келеді

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.17.1)$$

Бұл (1.17.1) теңдеуі қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі деп аталады.

Айналу бұрышы φ –дің таңбасын анықтауда оң бұранда ережесіне сүйенеміз. Айналу бұрышы радианмен өлшенеді.

Дененің қозғалмайтын өсті айналу бағыты мен шапшаңдығын сипаттайтын шама бұрыштық жылдамдық деп аталады, оның алгебралық шамасы айналу бұрышының уақыт бойынша бірінші туындысына тең

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \text{ немесе } \omega = \dot{\varphi}. \quad (1.17.2)$$

Бұрыштық жылдамдық векторлық шама, $\bar{\omega}$ –векторы дененің айналу өсінің бойында орналасып, оң бұранда ережесіне сәйкес келетін бағытпен бағытталады.

Бұрыштық жылдамдықтың уақыт өтуімен өзгеруін сипаттайтын шама бұрыштық үдеу деп аталады. Оның алгебралық шамасы бұрыштық жылдамдықтың уақыт бойынша бірінші туындысына, яғни айналу бұрышының уақыт бойынша екінші ретті туындысына тең

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ немесе } \epsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.17.3)$$

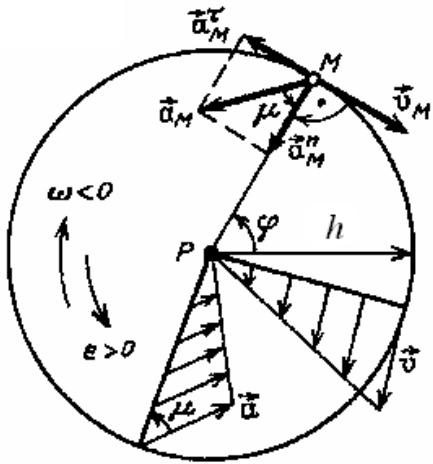
Бұрыштық үдеу векторы $\bar{\epsilon}$ де айналу өсінің бойында орналасады. Бұрыштық жылдамдықтың шамасы артқан кезде $\bar{\epsilon}$ бағыты $\bar{\omega}$ бағытымен бірдей (1.17.1,а-сурет), кемитын кезде қарама-қарсы бағытталады (1.17.1,б-сурет).

Қозғалыс кезінде $\omega = const$ болса, айналу бірқалыпты деп аталады, оның заңы келесі болады

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t.$$

Қозғалыс кезінде бұрыштық үдеу тұрақты болса $\varepsilon = \text{const}$, айналу тең айнымалы деп аталады, оның заңы келесі

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$



1.17.2-сурет

Айналу кезінде дененің кез келген M нүктесі радиусы h тең, жазықтығы айналу өсіне перпендикуляр және P центрі өсте жататын шеңберді кескіндейді (1.17.2-сурет). dt уақыт ішінде дене $d\varphi$ бұрышына бұрылады, M нүктесі $ds = h \cdot d\varphi$ орын ауыстыру жасайды. Сонда нүкте жылдамдығының шамасы

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega. \quad (1.17.4)$$

Жылдамдық \vec{v} векторы радиусы h , центрі P нүктесінде жататын шеңберге

жанамамен, айналыс болатын жаққа қарай бағытталады.

Бұл нүктенің толық үдеуін екі құраушыға жіктеу арқылы анықтай аламыз. Нүктенің жанама үдеуі

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = h \frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon, \quad (1.17.5)$$

және оның нормаль үдеуі

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h. \quad (1.17.6)$$

\vec{a}_τ үдеуі траекторияға жанама бағытталады (үдемелі айналу кезінде айналу бағытына сәйкес және кемімелі айналу кезінде айналу бағытына қарсы), оны айналу үдеуі деп те атайды, ал \vec{a}_n үдеуі әрқашан MP радиусы бойымен өске қарай бағытталады, оны центрге тартқыш үдеу деп те атайды.

Нүкте толық үдеуінің модулі

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.17.7)$$

Толық үдеу векторының радиуспен жасайтын μ бұрышы (1.17.2-сурет) нүкте орналасуына тәуелсіз және кез келген нүкте үшін келесі формуламен анықталады

$$\text{tg } \mu = a_\tau / a_n = \varepsilon / \omega^2. \quad (1.17.8)$$

1.17.1-мысал. Атанаққа оралған жіпке ілінген жүк A , атанақты айналмалы қозғалысқа келтіре отырып, тыныштық қалпынан бірқалыпты үдемелі төменгі бағытта қозғалады (1.17.3,а-сурет). Атанақ бірінші 3 сек аралығында 9 айналыс жасайды. Атанақтың диаметрі $D=30$ см. Атанақ бетіндегі нүктенің және жүктің 5 сек уақыт мезгіліндегі жылдамдығын және үдеуін табу керек.

Шешуі: атанақтың тең айнымалы айналмалы қозғалыс теңдеуін және бұрыштық жылдамдығының формуласын жазамыз

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

Бастапқы $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ мәндерін ескере отырып, аламыз

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad \omega = \varepsilon \cdot t.$$

Атанақтың $t=3$ с уақыт мезгілінде айналу бұрышы белгілі: $\varphi = 2\pi \cdot N = 18\pi$ рад. Сонда атанақтың бұрыштық үдеуі $\varepsilon = \frac{2 \cdot \varphi}{t^2} = 4\pi$ рад/с² және $t=5$ с уақыт мезгіліндегі бұрыштық жылдамдығы $\omega = \varepsilon \cdot t = 4\pi \cdot 5 = 20\pi$ рад/с.

Атанақтың бетіндегі B нүктесінің (1.17.3,б-сурет) сызықтық жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін осы уақыт мезетінде анықтаймыз

$$v_B = R \cdot \omega = 0,15 \cdot 20\pi = 9,42 \text{ м/с},$$

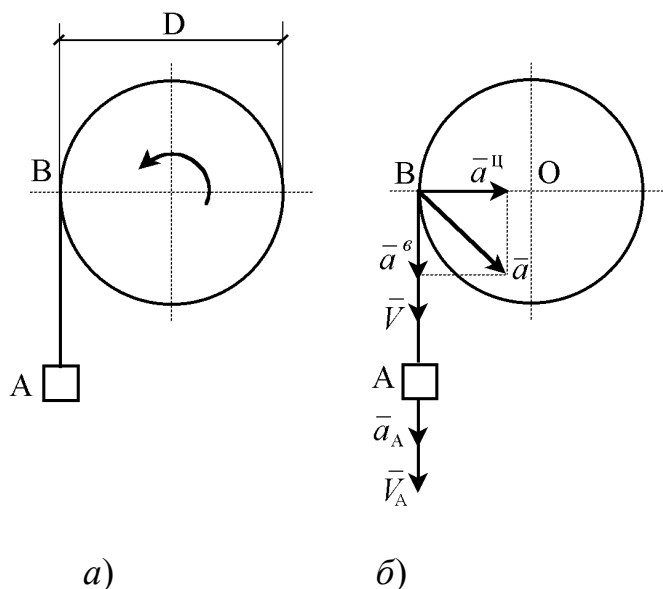
$$a_{B\tau} = R \cdot \varepsilon = 0,15 \cdot 4\pi = 1,88 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Bn} = R \cdot \omega_5^2 = 0,15 \cdot (20\pi)^2 = 591,6 \text{ м/с}^2.$$

Атанақтың бетіндегі нүктенің толық үдеуінің модулі

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = \sqrt{1,88^2 + 591,6^2} \approx 592 \text{ м/с}^2.$$

Жүктің жылдамдығы атанақтың бетіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығына тең

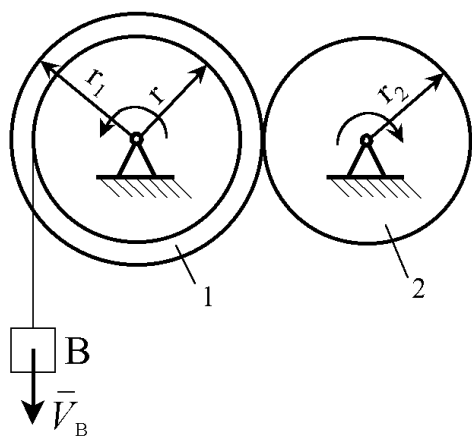


1.17.3-сурет

$$v_A = v_B = 9,42 \text{ м/с.}$$

Жүктің үдеуі атанақтың бетіндегі нүктенің жанама үдеуіне тең $a_A = a_{B\tau} = 1,88 \text{ м/с}^2$.

1.17.2-мысал. Радиусы r_1 тістегеріш 1-ге отырғызылған радиусы r білікті жүк B айналмалы қозғалысқа келтіреді. Жүк тыныштық қалпынан қозғалып бастайды және тұрақты a үдеуімен қозғалады. Тістегеріш 1-мен іліністе болатын радиусы r_2 тістегеріш 2-нің қозғалыс заңдылығын табу керек (1.17.4-сурет).



1.17.4-сурет

Шешуі: жүк B бастапқы жылдамдықсыз тұрақты a үдеуімен қозғалады, сондықтан кез келген уақыт мезетінде $v_B = a \cdot t$ болады.

Біліктің бетіндегі нүкте жылдамдығы осы жылдамдыққа және $\omega_1 r$ -ге тең. Сондықтан $\omega_1 \cdot r = a \cdot t$,

$$\omega_1 = \frac{a \cdot t}{r}.$$

Іліністегі нүкте C -ның сызықтық жылдамдығы екі тістегерішке ортақ

$$v_C = r_1 \cdot \omega_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad \text{осыдан}$$

$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1 = \frac{r_1 \cdot a \cdot t}{r_2 \cdot r}$. Осыны интегралдау арқылы айналу бұрышын өрнектейміз

$$\varphi_2 = \int \omega_2 dt = \int \frac{r_1 \cdot a \cdot t}{r_2 \cdot r} dt = \frac{r_1 \cdot a \cdot t^2}{2r_2 \cdot r} + C.$$

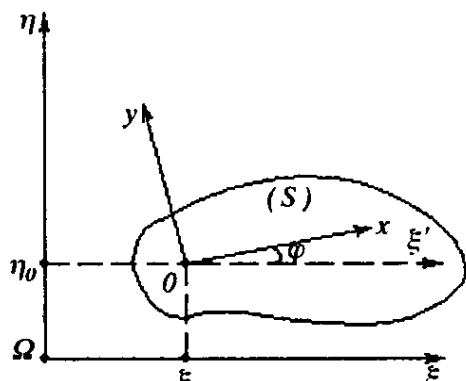
Егер айналу бұрышын бастапқы уақыт мезгілінен бастап есептесек, алынған өрнекке $t=0$ және $\varphi_2=0$ қою керек, сонда $C=0$ шығады. Нәтижесінде тістегеріш 2-нің айналмалы қозғалыс заңдылығын табамыз

$$\varphi_2 = \frac{r_1 \cdot a \cdot t^2}{2r_2 \cdot r}.$$

1.18 Қатты дененің жазық параллель қозғалысының теңдеулері

Егер қатты дененің барлық нүктелері қандайда бір қозғалмайтын жазықтыққа параллель қозғалатын болса, онда дененің мұндай қозғалысын жазық-параллель қозғалыс дейміз. Қатты дененің

жазық – параллель қозғалысын зерттеу оның қозғалмайтын жазықтыққа параллель қималарының бірінің, мысалы (S) –тің, жазықтық бетімен қозғалуын зерттеуге кел-тіріледі. Қозғалмайтын $\Omega\xi\eta$ және жазық фигура (S) –ке қатаң бекітілген $Oxuz$ координаттар жүйелерін таңдап алайық (1.18.1-сурет).



1.18.1-сурет

Қозғалмалы $Oxuz$ координаттар жүйесінің бас нүктесі O -ны бұдан былай «полюс»-дейміз.

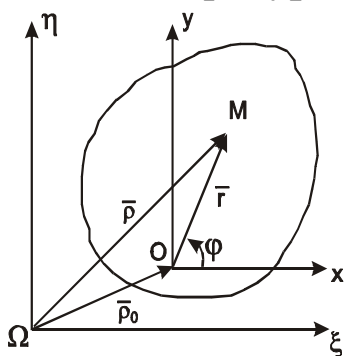
Полюс O -ның өстеріне қатысты координаттарын ξ_0 және η_0 деп белгілейік. Сонда, мына теңдеулер

$$\xi_0 = \xi_0(t), \quad \eta_0 = \eta_0(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

жазық фигураның қозғалмайтын $\Omega\xi\eta$ координаттар жазықтығындағы қозғалысын анықтайды. Демек, бұлар жазық фигураның өз жа-

зықтығындағы қозғалысының, күрделі қозғалыс екенін көрсетеді. Оны негізгі екі құрауышы қозғалысқа жіктеуге болады. Олардың біреуі, жылдамдығы полюс жылдамдығына тең, ілгерілемелі қозғалыс, ал екіншісі, қозғалмайтын центр ретінде қарастырылатын полюс O арқылы өтіп, жазық фигура жазықтығына перпендикуляр орналасатын лездік өс жанындағы, лездік айналыс.

1.19 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене (жазық фигураның) нүктелерінің жылдамдықтары



1.19.1-сурет

Полюс ретінде алынған нүктені O деп белгілейік (1.19.1-сурет). Мұндағы, $\bar{\rho} = \overline{\Omega M}$, $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{\rho}_0 = \overline{\Omega O}$.

Бұл үш вектор қозғалыстың кез келген мезгілінде мынадай векторлық теңдікті қанағаттандырып отырады

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}. \quad (1.19.1)$$

(1.19.1)-теңдіктің екі жағын да дифференциалдасақ, мынадай теңдік аламыз

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (1.19.2)$$

мұндағы $\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_M$, $\frac{d\bar{\rho}_0}{dt} = \bar{v}_0$.

Ал (1.19.2) теңдігінің оң жағындағы екінші қосылғыш вектор, қозғалысы қарастырылып отырған, M нүктесінің қозғалмалы Ox жүйесіне қатысты жылдамдығын өрнектейді. Бұл жылдамдық векторын \vec{v}_{MO} -деп белгілейміз. Оқығанда оны M нүктесінің полюс O -ға қатысты алынған жылдамдығы деп атаймыз. Осы белгілеулер арқылы (1.19.2)–теңдікті мына түрде жазамыз

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}. \quad (1.19.3)$$

1-теорема. Жазық фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен осы нүктенің полюске қатысты алынған жылдамдығының геометриялық қосындысына тең.

M нүктесінің полюске қатысты жылдамдығы келесі формуламен анықталады

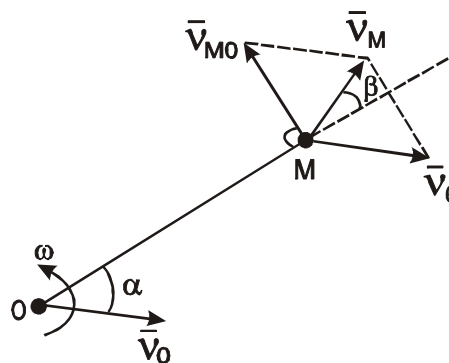
$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \overline{OM} \quad (1.19.4)$$

Оның шамасы $v_{MO} = \omega \cdot OM$, бағыты $\vec{v}_{MO} \perp \overline{OM}$ және бұрыштық жылдамдық бағытына сәйкес (1.19.2-сурет).

Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын есептеуге қолданылатын екінші теореманы (1.19.3) теңдіктен оңай алуға болады. Оның екі жағын да OM түзуіне проекциялаймыз. Сонда

$$v_M \cos \beta = v_O \cos \alpha. \quad (1.19.5)$$

2-теорема. Жазық фигураның кез келген екі нүктесінің жылдамдықтарының осы нүктелер арқылы жүргізілген түзуге проекциялары өзара тең болады.



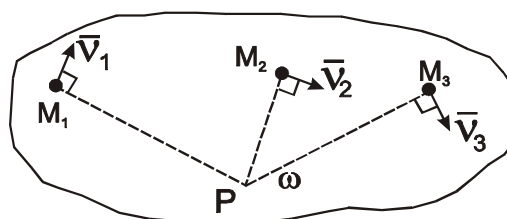
1.19.2-сурет

1.20 Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын

жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану арқылы есептеу

Жылдамдықтардың лездік центрі деп, берілген лездік уақыт t мезгілінде, жылдамдығы нөлге тең болатын жазық фигура жазықтығының бір нүктесін айтамыз.

Егер жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жылдамдығы берілсе және оның екінші бір нүктесінің жылдамдығының бағыты ғана белгілі болса, онда бұл фигура



1.20.1-сурет

жазықтығының кез келген нүкте-лерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрі арқылы табуға болады.

Жазық фигура (S)–тің бір нүктесі M_1 –дің жылдамдық векторы \bar{v}_1 берілсін және оның екінші бір нүктесі M_2 –нің жылдамдық векторы жататын түзу бағыты белгілі болсын дейік (1.20.1-сурет).

M_1 және M_2 нүктелерінің жылдамдықтарының берілген бағыттары арқылы лездік центр P –ның орнын табамыз.

Олардың жылдамдықтары лездік радиустар PM_1 , PM_2 , PM_3 ұзындықтарына пропорционал болып келеді

$$v_1 = \omega \cdot PM_1, \quad v_2 = \omega \cdot PM_2, \quad v_3 = \omega \cdot PM_3,$$

мұндағы, ω жазық фигураның P центрді айналысының лездік бұрыштық жылдамдығы. Оны белгілі жылдамдық арқылы табуға

болады: $\omega = \frac{v_1}{PM_1}$. Осыдан қалған екі теңдіктердегіні орнына қойсақ

$$v_2 = v_1 \frac{PM_2}{PM_1}, \quad v_3 = v_1 \frac{PM_3}{PM_1}.$$

Жылдамдықтар бағыттары: $\bar{v}_{M1} \perp PM_1, \bar{v}_{M2} \perp PM_2, \bar{v}_{M3} \perp PM_3$.

1.21 Жазық параллель

қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері

Жазық фигураның кез келген M нүктесінің үдеуі осы фигураның лездік ілгерілемелі және полюсті айнала қозғалысының үдеулерінің қосындысынан тұрады, яғни

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{v}_{MO}}{dt^2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MO}. \quad (1.21.1)$$

Мұндағы \bar{a}_{MO} - M нүктесінің полюске қатысты үдеуі, ол \bar{a}_{MO}^r

жанама және \bar{a}_{MO}^n нормаль құраушыларына жіктеледі. Онда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MO}^r + \bar{a}_{MO}^n. \quad (1.21.2)$$

(1.21.2)–формула келесі теореманы береді.

Теорема. Жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жазық қозғалыс кезіндегі толық үдеуі полюс үдеуі мен бұл нүктенің полюске қатысты алынған үдеуінің векторлық қосындысына тең.

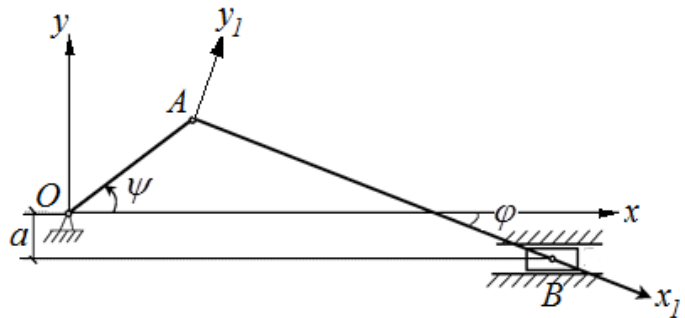
M нүктесінің полюске қатысты жанама және нормаль үдеулері келесі формулдармен анықталады

$$\bar{a}_{MO}^r = \bar{\varepsilon} \times \overline{OM}, \quad \bar{a}_{MO}^n = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OM}) \quad (1.21.3)$$

Олардың шамалары: $a_{MO}^r = \varepsilon \cdot OM$, $a_{MO}^n = \omega^2 \cdot OM$, бағыттары: $\bar{a}_{MO}^r \perp \overline{OM}$ және бұрыштық үдеу бағытына сәйкес, \bar{a}_{MO}^n полюске қарай бағытталады.

1.21.1-мысал. Қосиін-бұлғақты механизмде қосиіннің айналу центрі жылжыма B -ның көлденең траекториясынан a қашықтықта орналасқан (1.21.1-сурет). Қосиіннің бұрылу бұрышы $\psi = k \cdot t$ заңдылығымен өзгереді, мұндағы k – тұрақты коэффициент. Қосиіннің ұзындығы $OA = r$, ал бұлғақтың ұзындығы $AB = l$. Бұлғақ AB -ның жазық параллель қозғалыс теңдеулерін анықтау керек.

Шешуі: бас нүктесі O болатын қозғалмайтын xOy координаттар жүйесін жүргіземіз. Бас нүктесі A болатын қозғалмалы x_1Ay_1 координаттар жүйесін таңдап аламыз. Сонымен, қосиіннің A нүктесі полюс болады. Полюстің қозғалыс теңдеулерін жазамыз



1.21.1-сурет

$$x_A = OA \cdot \cos \psi = r \cdot \cos kt, \quad y_A = OA \cdot \sin \psi = r \cdot \sin kt.$$

Бұлғақтың бұрылу бұрышы мен уақыт арасындағы байланысы болатын үшінші теңдеуді табу үшін, AB кесіндісін y осіне проекциялаймыз. x_1 және x өстерінің арасындағы бұрышты φ арқылы белгілеп, мынадай теңдік аламыз

$$AB \cdot \sin \varphi = OA \cdot \sin \psi + a,$$

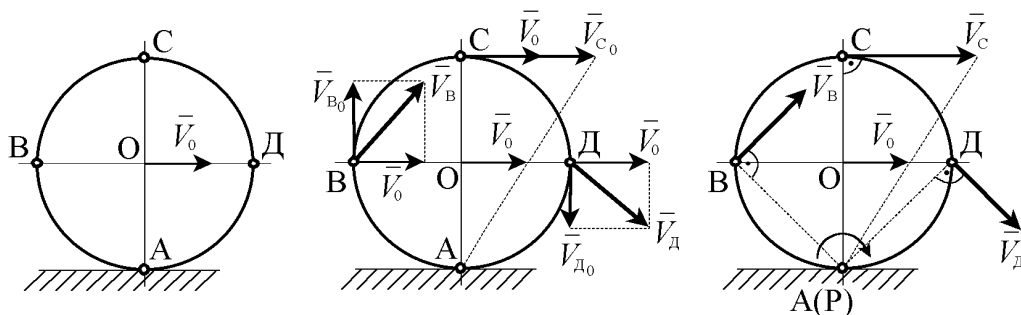
немесе, $AB = l$, $OA = r$, $\psi = k \cdot t$ болғандықтан

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \cdot \sin kt + \frac{a}{l}.$$

Бұлғақ AB -ның жазық параллель қозғалыс теңдеулері мынадай болады

$$x_A = r \cdot \cos kt, \quad y_A = r \cdot \sin kt, \quad \sin \varphi = \frac{r \cdot \sin kt}{l} + \frac{a}{l}.$$

1.21.2-мысал. Радиусы $R = 0,5$ м дөңгелек түзу рельс бойымен сырғанамай дөңгелеп қозғалады және оның центрінің жылдамдығы



1.21.2-сурет

тұрақты $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Дөңгелектің көлденең және вертикаль диаметрлерінің соңғы A, B, C, D нүктелерінің жылдамдықтарын және дөңгелектің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.

Шешуі: I-тәсіл (жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтары туралы теореманы пайдалану).

Полюс ретінде O центрін қабылдаймыз (1.21.2 сурет). Онда дөңгелектің кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен полюсті айнала қозғалыс жылдамдығының геометриялық қосындысына тең, мысалы $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO}$. Дөңгелек сырғанамай дөңгелеп қозғалатын болғандықтан дөңгелек пен рельстің жанасушы A нүктесінің жылдамдығы нөлге тең $v_A = 0$, яғни A нүктесі лездік жылдамдық центрі болып табылады. Бұл нүктеде полюсті айнала қозғалыс жылдамдығы \vec{v}_{AO} -мен полюс жылдамдығы \vec{v}_O -ның шамалары тең, ал бағыттары қарама-қарсы, яғни $\vec{v}_{AO} = -\vec{v}_O$.

A, B, C және D нүктелерінен полюске дейінгі ара қашықтықтары бірдей. Сондықтан, нүктелердің полюсті айнала қозғалыс жылдамдықтары өзара тең, яғни $v_{BO} = v_{CO} = v_{DO} = v_{AO} = v_0$.

Әрбір нүктеден полюс жылдамдығы \vec{v}_O -ны және дөңгелектің радиусына перпендикуляр полюсті айнала қозғалыс жылдамдығын тұрғызып алатынымыз

$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = v_0 \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с},$$

$$v_C = v_O + v_{AO} = 2v_0 = 20 \text{ м/с},$$

$$v_D = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = v_0 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с}.$$

Бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \frac{v_{BO}}{BO} = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ рад/с}.$$

II-тәсіл (жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану).

Дөңгелектің жылдамдықтардың лездік центрі A -ны полюс ретінде қабылдаймыз. Онда дөңгелектің барлық нүктелерінің жылдамдықтары лездік жылдамдық центрін айнала қозғалыс жылдамдықтары болады. Барлық нүктелердің жылдамдықтарының шамалары мынадай қатынастармен анықталады

$$v_C = v_O \frac{PC}{PO} = v_0 \cdot 2 = 20 \text{ м/с},$$

$$v_B = v_O \frac{PB}{PO} = v_0 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с},$$

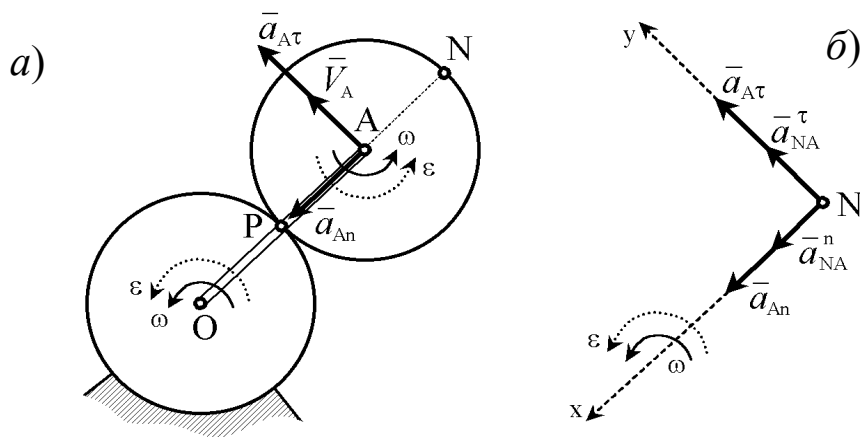
$$v_D = v_O \frac{PD}{PO} = v_O \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с.}$$

$$\text{Мұндағы } PB = PD = R \cdot \sqrt{2}.$$

Бұрыштық жылдамдығы мынадай қатынаспен анықталады

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ рад/с.}$$

1.21.3-мысал. Радиусы $R = 12 \text{ см}$ тістегерішті радиусы сондай қозғалмайтын тістегеріштің осі O -ға қатысты айнала қозғалатын қосиін OA қозғалысқа келтіреді. Қосиін $\varepsilon = 8 \text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады және бұрыштық жылдамдығы $\omega = 2 \text{ рад/с}$. 2-тістегеріштің N нүктесінің үдеуін анықтау керек (1.21.3,а-сурет).



1.21.3-сурет

Шешуі: Есепті шешу үшін 2-тістегеріштің қозғалысын қарастырамыз. Ондағы A нүктені полюс ретінде қабылдап, A нүктесінің жылдамдығын және үдеуінің құраушыларын анықтаймыз:

$$v_A = OA \cdot \omega = 2R \cdot \omega = 0,24 \cdot 2 = 0,48 \text{ м/с,}$$

$$a_{A\tau} = OA \cdot \varepsilon = 0,24 \cdot 8 = 1,92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{An} = OA \cdot \omega^2 = 0,24 \cdot 2^2 = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

\vec{v}_A , $\vec{a}_{A\tau}$, \vec{a}_{An} векторларының бағыттары 1.12.3-суретте көрсетілген.

Тістегеріш 2-нің бұрыштық жылдамдығы ω_2 – анықтаймыз. Тістегеріштің жанасу P нүктесі жылдамдықтардың лездік центрі

$$\text{болады, сондықтан } \omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{R} = \frac{0,48}{0,12} = 4 \text{ рад/с.}$$

ω_2 -ның бағытын (тістегеріштің айналу бағытын) \bar{v}_A анықтайды.

Тістегеріш 2-нің бұрыштық үдеуі ε_2 –ні анықтаймыз. $AP = R$ шамасы барлық уақытта тұрақты, сондықтан

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_{A\tau}}{R} = \frac{1,92}{0,12} = 16 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Нүкте N -нің үдеуін мынадай формуламен анықтаймыз

$$\bar{a}_N = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{NA}^\tau + \bar{a}_{NA}^n.$$

Бұл үшін \bar{a}_{NA}^τ және \bar{a}_{NA}^n үдеулерінің шамаларын анықтаймыз.

Біздің жағдайда $NA = R$, сонда

$$a_{NA}^\tau = NA \cdot \varepsilon_2 = 0,12 \cdot 16 = 1,92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{NA}^n = NA \cdot \omega_2^2 = 0,12 \cdot 16 = 1,92 \text{ м/с}^2.$$

Енді $\bar{a}_{A\tau}$, \bar{a}_{An} , \bar{a}_{NA}^τ , \bar{a}_{NA}^n векторларының бағыттарын көрсетеміз (1.21.3, б-сурет). Nx және Ny осьтерін жүргізіп, \bar{a}_N үшін векторлық теңдікті осы осьтерге проекциялаймыз

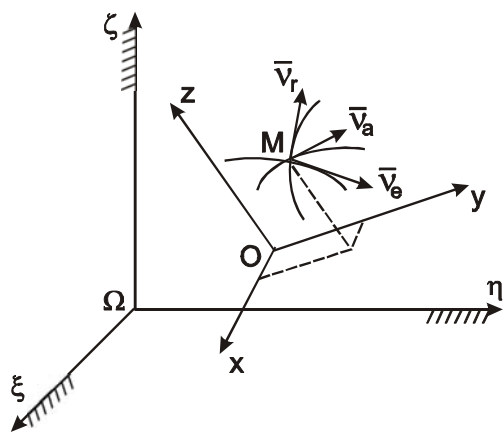
$$a_{Nx} = a_{An} + a_{NA}^n = 0,96 + 1,92 = 2,88 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ny} = a_{A\tau} + a_{NA}^\tau = 1,92 + 1,92 = 3,84 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Осыдан } a_N = \sqrt{a_{Nx}^2 + a_{Ny}^2} \approx 4,8 \text{ м/с}^2.$$

1.22 Нүктенің күрделі қозғалысы

Нүктенің күрделі қозғалысы деп оның екі немесе одан көп қозғалыстан тұратын қозғалысты атайды. 1.22.1-суреттегі M нүктесінің қозғалысын бір мезгілде екі координаттар жүйесіне қатысты қарастырайық. Осы екі жүйенің бірін $\Omega\xi\eta\zeta$ -деп белгілеп, оны шартты түрде қозғалмайтын (немесе негізгі) деп ұйғарайық. Екінші



1.22.1-сурет

координаттар жүйесі $Oxyz$, негізгі жүйеге қатысты кез келген түрдегі қозғалыс жасайтын болсын. Ал берілген нүкте M қозғалмалы жүйеге қатысты өзі де қозғалыс жасайды және оның бұл қозғалысы $Oxyz$ жүйе қозғалысына тәуелсіз болып келеді дейік.

Негізгі $\Omega\xi\eta\zeta$ -ға қатысты нүктенің қозғалысын шартты түрде абсолют қозғалыс деп атаймыз.

Оның абсолют жылдамдығын \bar{v}_a , үдеуін \bar{a}_a деп белгілейміз.

M -нүктесінің қозғалмалы $Oxuz$ жүйесіне қатысты қозғалысы салыстырмалы қозғалыс ретінде алынады. Салыстырмалы қозғалыс жылдамдығы \bar{v}_r , салыстырмалы үдеу \bar{a}_r деп белгіленеді.

Қозғалушы M нүктенің қозғалмалы жүйе $Oxuz$ -ке ілесе қозғалуы оның тасымал қозғалысы ретінде алынады. Тасымал қозғалыс жылдамдығы \bar{v}_e , тасымал үдеу \bar{a}_e деп белгіленеді.

M нүктесінің абсолют жылдамдығын өрнектейтін формула

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r \quad (1.22.1)$$

(1.22.1)–формула жылдамдықтарды қосу туралы теореманы береді.

Теорема. Нүктенің абсолют жылдамдығы тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың векторлық қосындысына тең болады.

Қозғалушы M нүктесінің абсолют үдеуін өрнектейтін формула

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (1.22.2)$$

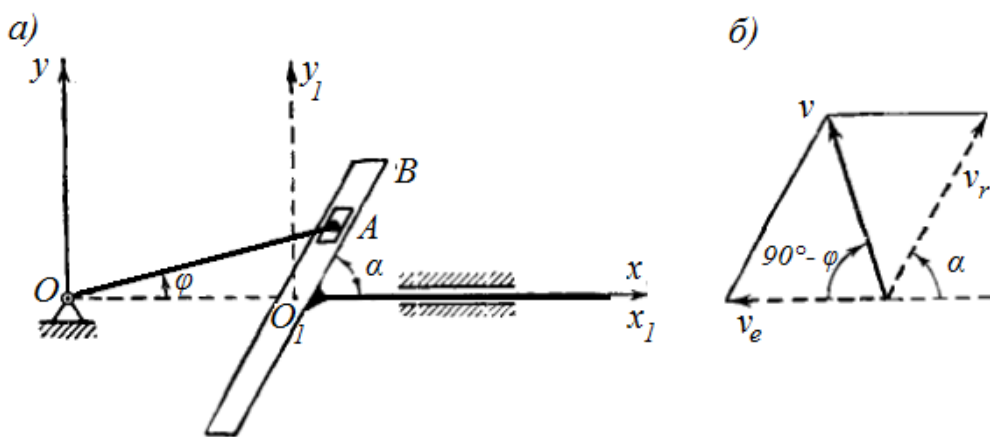
(1.22.2)–теңдікті Кориолистің үдеулерді қосу теоремасы деп атайды.

Кориолис теоремасы. Нүктенің абсолют үдеуі тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің векторлық қосындысына тең болады.

Кориолис үдеу векторы келесі формуламен анықталады: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$. Оның шамасы: $a_c = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$, бағыты векторлық көбейтіндісі ережесімен немесе Жуковский ережесімен анықталады. Жуковский ережесімен анықтау үшін \bar{v}_r векторын тасымал айналу осіне перпендикуляр жазықтыққа проекциялап, шыққан векторды сол жазықтықта тасымал айналу бағытымен 90° -ке айналдыру керек. Кориолис үдеуі келесі жағдайларда нөлге тең болады: тасымал қозғалыс ілгерілемелі болса немесе салыстырмалы жылдамдық векторы тасымал айналу осіне параллель болса.

1.22.1-мысал. Иіңтірек $OA=r$ сызба жазықтығында қозғалмайтын O нүктесіне қатысты $\varphi=kt$ заңымен айналады (1.22.2, а-сурет). Сол кезде A сырғағы B көлбеу кулисасы ішінде қозғалып, оны Ox осі бойымен орын ауыстыруға мәжбүр етеді. Кулисаның Ox өсімен жасайтын бұрышы α . A нүктесінің абсолют, салыстырмалы және тасымал жылдамдығын анықтау керек.

Шешуі: $O_1x_1y_1$ координат жүйесін B кулисамен байланыстырып, A нүктесінің қозғалысын күрделі, яғни екі қозғалыстан тұратын қозғалыс ретінде қарастырамыз. A нүктесінің қозғалатын $O_1x_1y_1$ координат жүйесімен бірге қозғалысы тасымал болып табылады, оның тасымал жылдамдығы \bar{v}_e кулисаның жылдамдығына тең және x оське параллель бағытталады. A нүктесінің $O_1x_1y_1$ координат жүйесіне қатысты қозғалысы, яғни кулиса ішіндегі қозғалысы, салыстырмалы қозғалыс болады, оның салыстырмалы жылдамдығы \bar{v}_r кулиса бойымен бағытталады. A нүктесінің қозғалмайтын Oxy координат жүйесіне қатысты қозғалысы абсолют қозғалыс болады, есепте берілген деректер бойынша абсолют жылдамдықты анықтауға болады: $v = \omega \cdot r = \dot{\varphi} \cdot r = kr$. A нүктесінің абсолют жылдамдығының \bar{v} векторы OA -ға перпендикуляр иіктірек айналу бағытына сәйкес бағытталады.



1.22.2-сурет

Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Тұрғызуды шамасы мен бағыты белгілі \bar{v} абсолют жылдамдық векторынан бастаймыз, содан кейін \bar{v} векторының басынан салыстырмалы \bar{v}_r векторына параллель түзуді, ал \bar{v} векторының ұшынан \bar{v}_e тасымал жылдамдығына параллель түзуді жүргіземіз. Нәтижесінде шыққан үшбұрышта жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша векторлардың нұсқамаларын қоямыз (1.22.2,б-суретті қараңыз). Синустар теоремасын қолданамыз

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{v_e}{\sin[180^\circ - \alpha - (90^\circ - \varphi)]},$$

$$\text{немесе } \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\cos \varphi} = \frac{v_e}{\sin[90^\circ + (\varphi - \alpha)]}.$$

Осыдан

$$v_r = \frac{v \cos \varphi}{\sin \alpha} = kr \frac{\cos(kt)}{\sin \alpha}, \quad v_e = \frac{v \sin[90^\circ + (\varphi - \alpha)]}{\sin \alpha} = kr \frac{\cos(kt - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

1.22.2-мысал. M нүктесі D дене үстінде $s_r = OM = 16 - 8\cos(3\pi \cdot t)$ см теңдеуі бойынша қозғалады, ал дене вертикаль оське қатысты $\varphi_e = 0,9t^2 - 9t^3$ рад теңдеуі бойынша айналады (1.22.3, а-сурет). $t_1 = 2/9$ с уақыт мезгілінде M нүктесінің абсолют жылдамдығы мен абсолют үдеуін анықтау керек.

Шешуі: Қарастырылатын уақыт мезгілінде сурет жазықтығы үшбұрыш D -ның жазықтығымен беттеседі деп алайық. M нүктесінің салыстырмалы жылдамдығы және салыстырмалы үдеуі келесідей тыбылады

$$v_r = \dot{s}_r = 24\pi \sin 3\pi t, \quad a_r^{\tau} = \dot{v}_r = 72\pi^2 \cos 3\pi t, \quad a_r^n = 0.$$

$t_1 = 2/9$ с болғанда

$$s_r = 16 - 8\cos(3\pi \cdot 2/9) = 20 \text{ см}, \quad v_r = 65,2 \text{ см/с}, \quad a_r^{\tau} = -355 \text{ см/с}^2.$$

Салыстырмалы жылдамдық шамасы оң болғандықтан, оның \bar{v}_r векторы s_r қашықтығының оң бағытымен бағытталады. Салыстырмалы үдеу \bar{a}_r^{τ} векторы оған қарсы бағытталады, өйткені оның шамасы теріс таңбамен шықты (1.22.3, б-сурет).

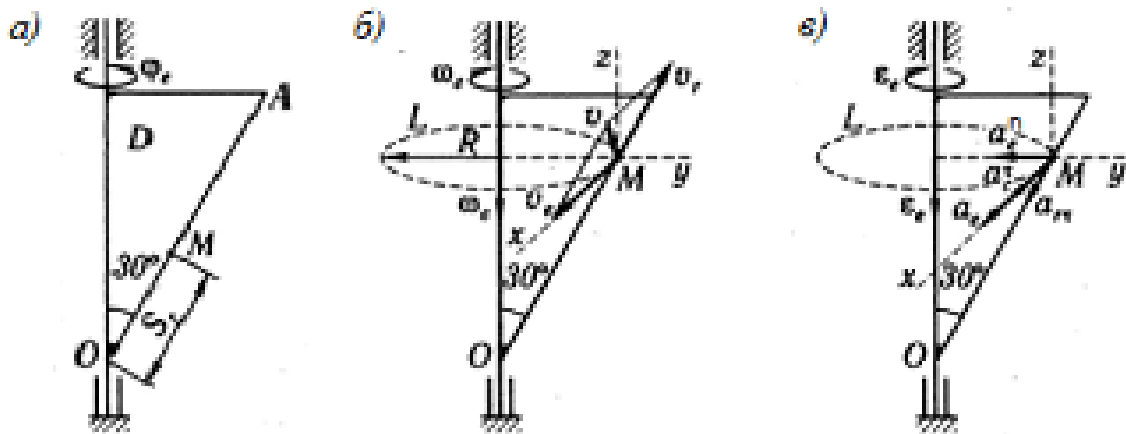
Енді M нүктесінің тасымал қозғалысын, яғни қарастырылатын уақыт мезгілінде M нүктесімен түйісетін D дене үстіндегі нүктенің қозғалысын қарастырамыз. Оның траекториясы радиусы $R = s_r \cdot \sin 30^\circ = 10$ см шеңбер L болып табылады. Сонда M нүктесінің тасымал жылдамдығы мен тасымал үдеуі келесі формулалармен анықталады

$$v_e = \omega_e R, \quad a_e^{\tau} = \varepsilon_e R, \quad a_e^n = \omega_e^2 R,$$

мұндағы $\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1,8t - 27t^2$, $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 1,8 - 54t$.

Уақыт $t_1 = 2/9$ с болғанда $\omega_e = -0,93$ рад/с, $\varepsilon_e = -10,2$ рад/с².

Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің теріс таңбалары, ω_e мен ε_e бағыттары бұрыш φ_e -ні есептеу бағытына қарсы екенін білдіреді. Тасымал жылдамдық модулі $v_e = 9,3$ см/с, оның \bar{v}_e векторы тасымал траекторияға жанама ω_e бағытына сәйкес бағытталады. Тасымал жанама және тасымал нормаль үдеулердің модульдері: $a_e^{\tau} = 102$ см/с², $a_e^n = 9$ см/с². Тасымал жанама үдеу векторы \bar{a}_e^{τ} тасымал жылдамдық \bar{v}_e векторымен бағыттас, тасымал нормаль үдеу векторы \bar{a}_e^n шеңбер L -дің центріне қарай бағытталады.



1.22.3-сурет

Кориолис үдеу векторы келесі формуламен анықталады:
 $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$. Сонда кориолис үдеу шамасы:
 $a_c = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$, мұндағы бұрыш $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 150^\circ$. Табылған мәндерді ескеріп аламыз: $a_c = 61 \text{ см/с}^2$. Кориолис үдеудің бағытын векторлық көбейтіндісі ережесімен немесе Жуковскийдің ережесімен анықтауға болады. Жуковский ережесімен анықтау үшін \bar{v}_r векторын тасымал айналу осіне перпендикуляр жазықтыққа проекциялаймыз, содан кейін шыққан векторды сол жазықтықта тасымал айналу бағытымен 90° -ке айналдырамыз, сонда ол x осі бойымен бағытталады (1.22.3, б-сурет).

Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, мұнда $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, сондықтан абсолют жылдамдық модулі

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 65,9 \text{ см/с}.$$

Үдеулерді қосу туралы теорема бойынша $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$ немесе $\bar{a} = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c$. Абсолют үдеуді проекциялар әдісімен табуға болады

$$a_x = a_e^\tau + a_c = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -a_e^n + a_r^\tau \cos 60^\circ = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = -a_r^\tau \cos 30^\circ = 308 \text{ см/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 395 \text{ см/с}^2.$$

1.23 «Кинематика» тақырыбы бойынша есептер

1.23.1-есеп. Нүктенің жазықтықта қозғалысының берілген теңдеулері бойынша нүкте траекториясын және оның t_1 уақыт мезгілінде жылдамдығын, толық, жанама, нормаль үдеулері мен траектория қисықтығы радиусын анықтау керек. Нүкте координаталары сантиметрмен, уақыт секундамен берілген.

а) $x=10 \cdot \sin(\pi \cdot t)$, $y=10 \cdot \cos(\pi \cdot t)$, $t_1 = 1/3$ с;

б) $x=30 \cdot \cos(\pi \cdot t/2)+10$, $y=10 \cdot \sin(\pi \cdot t/2)$, $t_1 = 1/2$ с;

в) $x=20 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$, $y=4 \cdot t$, $t_1 = 1/6$ с;

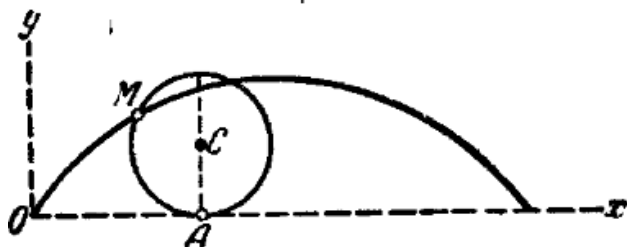
г) $x=10 \cdot \sin(\pi \cdot t)$, $y=20 \cdot \cos(2\pi \cdot t)$, $t_1 = 1/2$ с.

Жауабы: а) центрі координат басында орналасқан, радиусы 10 см тең шеңбер, $v = \text{const} = 31,4$ см/с, $a_\tau = 0$, $a = a_n = \text{const} = 98,6$ см/с², $\rho = 10$ см;

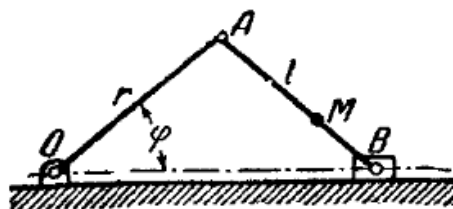
б) эллипс $\frac{(x-10)^2}{30^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$, $v=35,1$ см/с, $a=55,1$ см/с², $a_\tau=44,1$ см/с², $a_n=33$ см/с², $\rho=37,3$ см;

в) синусоида $x = 20 \sin(\pi y/2)$, $v = 62,9$ см/с, $a=683,1$ см/с², $a_\tau = -682$ см/с², $a_n = 38,8$ см/с², $\rho = 102$ см;

г) парабола $y = 20 - 0,2x^2$, $v=0$, $a = 795$ см/с², $a_\tau = -789$ см/с², $a_n = 99$ см/с², $\rho=0$.



1.23.2-есепке сурет



1.23.3-есепке сурет

1.23.2-есеп. Горизонталь x осі бойымен сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің M нүктесі үдеуінің шамасы мен бағытын және траекториясының қисықтық радиусын анықтау керек. Нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген: $x = 20t - \sin(20t)$, $y = 1 - \cos(20t)$. Мұнда t – секундамен, x, y – метрмен өлшенеді.

Жауабы: үдеу $a=400$ м/с² және MC бойымен дөңгелек центріне бағытталады, $\rho=2MA$.

1.23.3-есеп. Иіптіректі-сырғақты механизмнің M нүктесінің траекториясын анықтап, оның $\varphi=0$ болатын уақыт мезгілінде жылдамдығын, үдеуін және траекториясының қисықтық радиусын

табу керек. Берілгені: $r=l=60$ см, $MB=l/3$, $\varphi=4\pi \cdot t$ (t – секундамен өлшенеді).

Жауабы: эллипс $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$, $v = 80\pi$ см/с, $a = 1600\pi$ см/с², $\rho = 4$ см.

1.23.4-есеп. Снаряд вертикаль жазықтықта келесі теңдеулер бойынша қозғалады: $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t – секундамен, x, y – метрмен өлшенеді). Бастапқы уақыт мезгілінде снаряд жылдамдығы мен үдеуін, атыс биіктігі мен алыстығын, бастапқы және ең биік орнында снаряд траекториясының қисықтық радиусын табу керек.

Жауабы: $v_0=500$ м/с, $a_0=10$ м/с², $h=8$ км, $s=24$ км, $\rho_0=41,67$ км, $\rho=9$ км.

1.23.5-есеп. Нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген: $x=20\sin(3t^2)$, $y=20\cos(3t^2)$ (t – секундамен, x, y – сантиметрмен өлшенеді). Нүктенің жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтау керек.

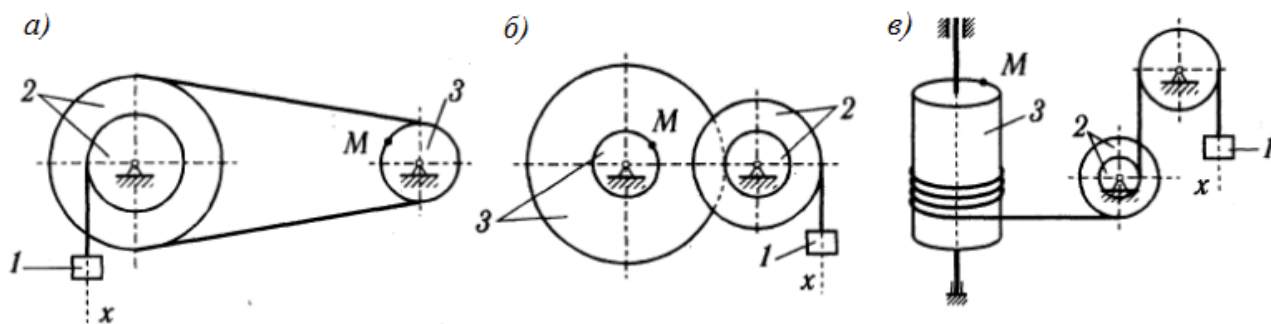
Жауабы: $v=120t$ см/с, $a_\tau=120$ см/с², $a_n=720t^2$ см/с².

1.23.6-есеп. Бастапқы айналу жиілігі $n_0=90$ айн/мин тең болған дөңгелек бір уақыт мезгілінен тең үдемелі айналып, $1,5$ мин өткен соң $n=150$ айн/мин айналу жиілігіне ие болады. Дөңгелектің бұрыштық үдеуін анықтап, оның $1,5$ мин ішінде жасаған айналым санын табу керек.

Жауабы: $\pi/45$ рад/с², 180 айналым.

1.23.7-есеп. Дененің айналу заңы берілген: $\varphi = 5t + 1,2t^3$ рад. Дененің бұрыштық жылдамдығы 70 рад/с тең болатын уақыт мезгілін анықтап, оның сол уақытта жасайтын айналым санын табу керек.

Жауабы: $4,25$ с, жуық 18 айналым.



1.23.8-есепке сурет

1.23.8-есеп. 1 жүгі $x=x(t)$ заңы бойынша төмен түсіп, 2 және 3 дөңгелектерді қозғалтады. t_1 уақыт мезгілінде M нүктесінің жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтау керек. Берілгені:

a) $x=5t^2-2t$ см, $t_1=1$ с, $R_2=30$ см, $r_2=10$ см, $R_3=15$ см;

б) $x=25t^2+10t+40$ см, $t_1=2$ с, $R_2=40$ см, $r_2=20$ см, $R_3=80$ см, $r_3=18$ см;

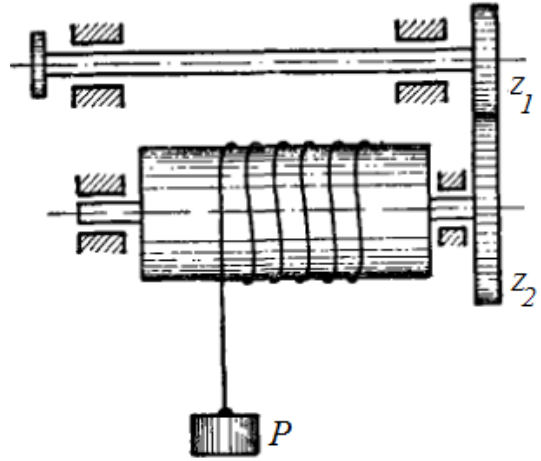
в) $x=0,4t^2-0,5t+0,3m, t_1=4c, R_2=0,3m, r_2=0,15m, R_3=0,4m.$

Жауабы: а) $v_M = 24 \text{ см/с}, a_{M\tau} = 30 \text{ см/с}^2, a_{Mn} = 38,4 \text{ см/с}^2;$

б) $v_M = 11 \text{ см/с}, a_{M\tau} = 5 \text{ см/с}^2, a_{Mn} = 7,56 \text{ см/с}^2;$

в) $v_M = 3,8 \text{ м/с}, a_{M\tau} = 1,6 \text{ м/с}^2, a_{Mn} = 36,1 \text{ м/с}^2.$

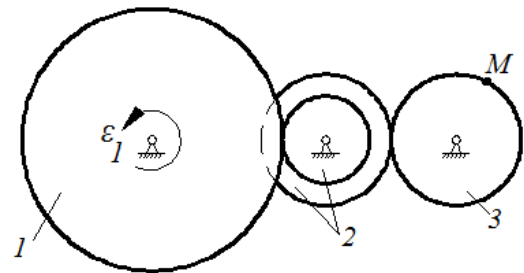
1.23.9-есеп. z_1 тісі бар дөңгелек орналасқан жетекші білік $\varphi_1=2\pi \cdot t^2 \text{ рад}$ заңымен айналып, z_2 тісі бар дөңгелек орналасқан жетектегі білікті айналдырады. Сол кезде P жүгі радиусы R цилиндрге оралатын арқан арқылы көтеріледі. P жүгінің үдеуін анықтау керек.



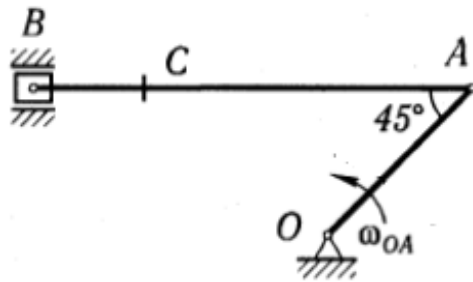
1.23.9-есепке сурет

Жауабы: $4\pi R \frac{z_1}{z_2}.$

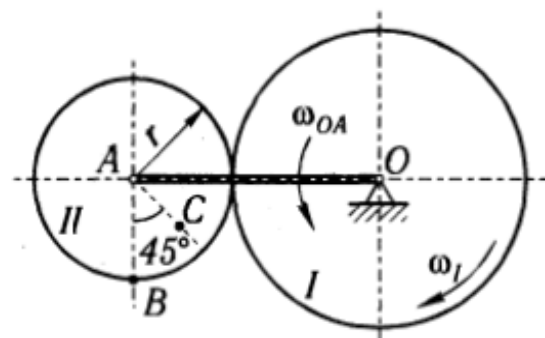
1.23.10-есеп. I дөңгелек тыныштық күйінен $\varepsilon_1 = 0,3t \text{ рад/с}^2$ бұрыштық үдеуімен айналып, 2 және 3 дөңгелектерді айналдырады. Дөңгелектердің радиустері: $R_1=0,6m, R_2=0,3m, r_2=0,2m, R_3=0,15m. t=4c$ уақыт мезгілінде M нүктесінің жылдам-дығын, жанама және нормаль үдеу-лерін анықтау керек.



1.23.10-есепке сурет



1.23.11-есепке сурет



1.23.12-есепке сурет

1.23.11-есеп. Механизмнің көрсетілген орналасуында AB буынының бұрыштық жылдамдығын және B, C нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA}=5 \text{ рад/с}, OA=40 \text{ см}, AB=70 \text{ см}, BC=20 \text{ см}.$

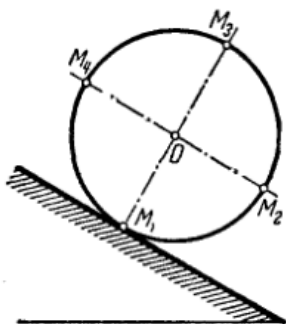
Жауабы: $\omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$, $v_B = 141 \text{ см/с}$, $v_C = 147 \text{ см/с}$.

1.23.12-есеп. I дөңгелектің және OA буынының бұрыштық жылдамдықтары $\omega_I = 3 \text{ рад/с}$ және $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$. II дөңгелектің бұрыштық жылдамдығын және B, C нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау керек. Берілгені: $OA = 60 \text{ см}$, $r = 20 \text{ см}$, $AC = 15 \text{ см}$.

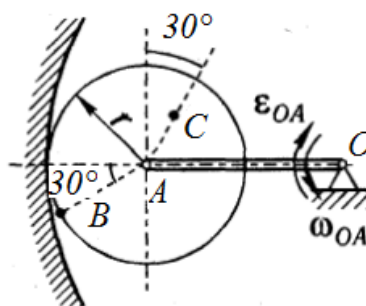
Жауабы: $\omega_{II} = 18 \text{ рад/с}$, $v_B = 433 \text{ см/с}$, $v_C = 197 \text{ см/с}$.

1.23.13-есеп. Радиусы $R = 0,5 \text{ м}$ дөңгелек вертикаль жазықтықта көлбеу түзу бойымен сырғанаусыз домалайды. Қарастырылатын уақыт мезгілінде дөңгелек центрінің жылдамдығы $v_O = 1 \text{ м/с}$, үдеуі $a_O = 3 \text{ м/с}^2$. Дөңгелектің M_1, M_2, M_3, M_4 нүктелерінің үдеулерін анықтау керек.

Жауабы: $a_{M1} = 2 \text{ м/с}^2$, $a_{M2} = 3,16 \text{ м/с}^2$, $a_{M3} = 6,32 \text{ м/с}^2$, $a_{M4} = 5,83 \text{ м/с}^2$.



1.23.13-есепке сурет

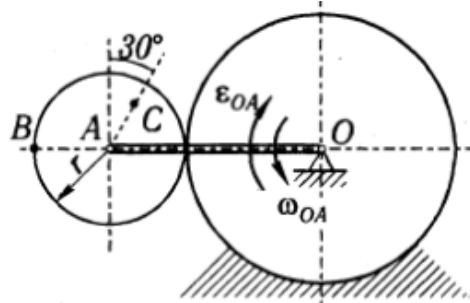


1.23.14-есепке сурет

1.23.14-есеп. Қозғалмайтын бет үстінде сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін, оның B, C нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA} = 2 \text{ рад/с}$, $\epsilon_{OA} = 6 \text{ рад/с}^2$, $OA = 0,6 \text{ м}$, $r = 0,4 \text{ м}$, $AC = 0,2 \text{ м}$.

Жауабы: $\omega = 3 \text{ рад/с}$, $\epsilon = 9 \text{ рад/с}^2$, $v_B = 0,6 \text{ м/с}$, $v_C = 1,6 \text{ м/с}$, $a_B = 7,67 \text{ м/с}^2$, $a_C = 2,94 \text{ м/с}^2$.

1.23.15-есеп. Қозғалмайтын дөңгелек үстінде сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін және оның B, C нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA} = 4 \text{ рад/с}$, $\epsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$, $OA = 1 \text{ м}$, $r = 0,4 \text{ м}$, $AC = 0,3 \text{ м}$.



1.23.15-есепке сурет

Жауабы: $\omega = 10 \text{ рад/с}$, $\epsilon = 5 \text{ рад/с}^2$, $v_B = 8 \text{ м/с}$, $v_C = 3,6 \text{ м/с}$, $a_B = 56,1 \text{ м/с}^2$, $a_C = 24,8,7 \text{ м/с}^2$.

1.23.16-есеп. Механизмдердің көрсетілген орналасуында олардың B , C нүктелерінің жылдамдықтарын және үдеулерін анықтау керек. Берілгені:

а) $\omega_{OA}=1\text{рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=2\text{рад/с}^2$, $OA=0,4\text{м}$, $AB=0,7\text{м}$, $AC=0,3\text{м}$;

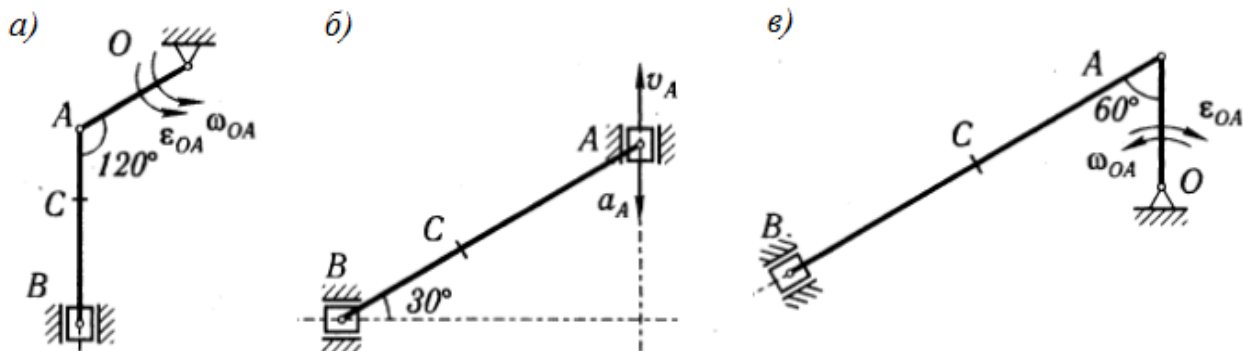
б) $v_A=10\text{м/с}$, $a_A=30\text{м/с}^2$, $AB=1\text{м}$, $AC=0,6\text{м}$;

в) $\omega_{OA}=2\text{рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=3\text{рад/с}^2$, $OA=0,3\text{м}$, $AB=1\text{м}$, $AC=0,5\text{м}$.

Жауабы: а) $v_B=0,35\text{м/с}$, $v_C=0,37\text{м/с}$, $a_B=0,44\text{м/с}^2$, $a_C=0,63\text{м/с}^2$;

б) $v_B=5,78\text{м/с}$, $v_C=5,29\text{м/с}$, $a_B=136,7\text{м/с}^2$, $a_C=82,9\text{м/с}^2$;

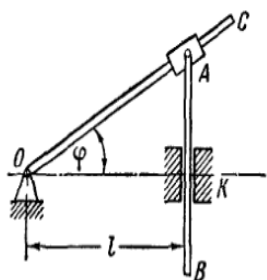
в) $v_B=0,52\text{м/с}$, $v_C=0,54\text{м/с}$, $a_B=0,27\text{м/с}^2$, $a_C=0,77\text{м/с}^2$.



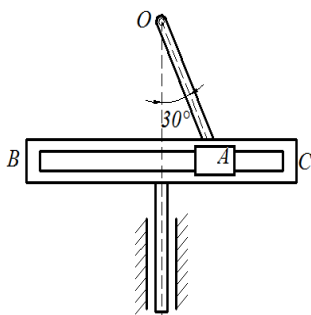
1.23.16-есепке сурет

1.23.17-есеп. Кулисасы механизмнің OC иітірегі O осі аймағында теңселгенде A сырғағы OC бойымен қозғалып, AB буынын вертикаль түзу бойымен қозғалтады. $OK=l$ болғанда A сырғақтың OC иітірегіне қатысты салыстырмалы қозғалысының жылдамдығын иітіректің ω бұрыштық жылдамдығы мен φ айналу бұрышының функциясы түрінде анықтау керек.

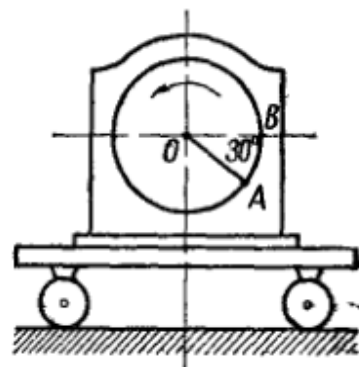
Жауабы: $v_r = \omega l \frac{\text{tg } \varphi}{\cos \varphi}$.



1.23.17-есепке сурет



1.23.18-есепке сурет



1.23.19-есепке сурет

1.23.18-есеп. Иітіректі-кулисасы механизмде ілгерілемелі қозғалыстағы BC кулисасы артында ұзындығы $OA=0,2\text{м}$ иітірек тұрақты 3рад/с бұрыштық жылдамдығымен айналады. Иітіректің A шеті топса арқылы кулиса бойымен қозғалатын денемен

байланысып, кулисаға қайтымды ілгерілемелі қозғалыс береді. Механизмнің көрсетілген орналасуында кулисаның жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: $0,942\text{ м/с}$.

1.23.19-есеп. $a=49,2\text{ см/с}^2$ үдеуімен оң жаққа қозғалып тұрған арба үстіндегі электрмотор роторы іске қосылғанда $\varphi=t^2$ теңдеу бойынша айналады (φ радианмен өлшенеді). Ротор радиусы 20 см тең. $t=1\text{ с}$ уақыт мезгілінде ротор A нүктесінің суретте көрсетілген орналасуында абсолют үдеуін табу керек.

Жауабы: $a_A = 74,6\text{ см/с}^2$, үдеу вертикаль жоғары бағытталған.

1.23.20-есеп. M нүктесінің t_1 уақыт мезгілінде абсолют жылдамдығы мен абсолют үдеуін анықтау керек. Берілгені:

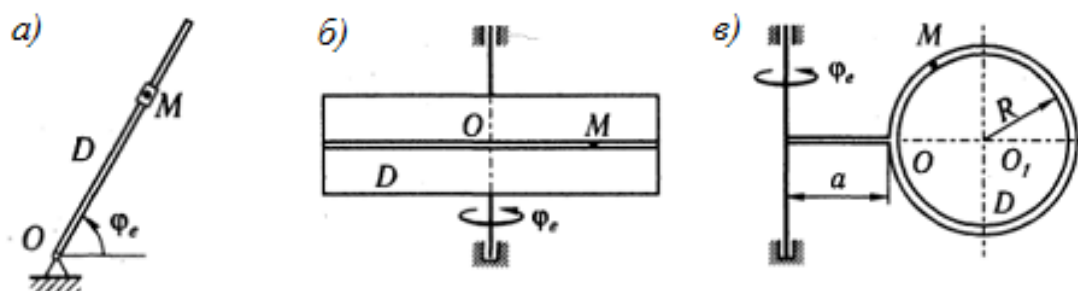
а) $\varphi_e = t(2-3t)\text{ рад}$, $OM=30t^2\text{ см}$, $t_1=1\text{ с}$;

б) $\varphi_e = 0,5t^2\text{ рад}$, $OM=20\sin(\pi \cdot t)\text{ см}$, $t_1=1/3\text{ с}$;

в) $\varphi_e = 4t^2\text{ рад}$, $OM=\pi R t^2\text{ см}$, $R=a=10\text{ см}$, $t_1=1/2\text{ с}$.

Жауабы: а) $v=134\text{ см/с}$, $a=782\text{ см/с}^2$; б) $v=31,9\text{ см/с}$, $a=177\text{ см/с}^2$;

в) $v=75,2\text{ см/с}$, $a=353\text{ см/с}^2$.



1.23.20-есепке сурет

1.24 Динамикаға кіріспе. Динамиканың негізгі заңдары.

Динамиканың бірінші және екінші есептері

Динамикада материялық нүктелер мен материялық денелердің қозғалыстары оларды болдыратын физикалық себептермен (күштермен) тығыз байланысты қарастырылады. Денеге түсірілген күштер мен олардың әсерлерінен болатын қозғалыс арасындағы тәуелділікті зерттеу, сөйтіп қозғалыстың жалпы заңдылығын табу мәселелері қаралады.

Динамиканың өзі екі бөлімге бөлінеді: бірінші бөлімі материялық нүкте динамикасы болса, екінші материялық нүктелер жүйесінің динамикасы.

Материялық нүкте деп қозғалыстың берілген жағдайларында өлшемдерін ескермеуге болатын денені айтамыз. Мұндай дененің

кеңістіктегі орны массасы дененің массасына тең массамен жабдықталған геометриялық нүкте орнымен анықталады.

Әрбір денені материялық нүктелердің жиынтығы деп қарауға болады. Ендеше динамиканы материялық нүкте динамикасынан бастаған жөн. Динамиканың бұл бөлімінде бір ғана материялық нүкте қозғалысының заңдылығы анықталады. Материялық нүкте қозғалысы үшін анықталған заңдылықтарды бірнеше материялық нүктелер жағдайына жалпылай отырып материялық нүктелер жүйесінің заңдылығын аламыз. Осының нәтижесінде қатты дене қозғалысы толық сипаттайтын заңдылықтарды да табуға болады

Динамиканың I-заңы (инерция заңы). Егер материялық нүктеге ешбір күш әсер етпесе, онда ол өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын сақтайды.

Бұл заң, басқа денелерден жеке дараланған, материялық нүктеге арнап айтылған. Жеке дара нүкте басқа денемен әсерлескенге дейін өзінің тыныштық күйінде қала береді немесе алғашқы қозғалысын сақтайды. Жеке дара (оңаша) алынған материялық нүкте деп отырған денеміз өз бетінше өзінің жылдамдығын өзгерте алмайды немесе тыныштық күйінен өз бетінше қозғалысқа келе алмайды. Бұл өзгеріс тек оған басқа бір дене әсер етсе, яғни бір күш әсер етсе пайда болады.

Инерция заңында айтылған материялық нүктенің түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын инерциялық қозғалыс дейміз.

Динамиканың заңдары әсіресе инерция заңы орынды болатын координаттар өстерінің жүйелерін инерциялық жүйелер деп атайды. Бұдан былай үнемі инерциялық жүйелер қолданылады. Мұндай жүйелерге қатысты қаралатын денелердің, материялық нүктелердің қозғалыстарын абсолют қозғалыстар деп атайды.

Динамиканың II-заңы (негізгі заң). Материялық нүктеге әсер етуші күш осы нүкте үдеуімен бағытталады және шамасы үдеуге пропорционал болады.

Материялық нүктеге түсірілген күшті \vec{F} деп, ал осыдан пайда болатын нүкте үдеуін \vec{a} -деп белгілейік, онда екінші заңды векторлық теңдеу түрінде жаза аламыз

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.24.1)$$

Динамиканың III-заңы (әсер және қарсы әсер заңы). Материялық екі нүкте бір–біріне оларды қосатын түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған, модульдері тең күштерімен әсер етеді.

Динамиканың IV-заңы (күш әсерінің тәуелсіздігі туралы заң). Егер материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күш әсер етсе, онда олардың әрқайсысының нүктеге беретін үдеуі сол күш шамасына пропорционал болып, күштердің өзгелеріне және кинематикалық күйіне тәуелсіз болады. Осыдан алатынымыз

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.24.2)$$

(1.24.2) теңдеу нүкте динамикасының негізгі теңдеуі деп аталады, ол инерциялық жүйелерде ғана орын алады.

1.25 Материялық нүкте

қозғалысының дифференциалдық теңдеулері

Материялық нүкте қозғалысының (1.24.2)-теңдеуі векторлық теңдеу болып табылады. Оны әр түрлі координаттар өстеріне проекциялап жазуға болады. Мысалы, оны қозғалмайды деп алынған декарттық координаттар жүйесіндегі өстерге проекциялайық

$$ma_x = \sum F_{kx}, \quad ma_y = \sum F_{ky}, \quad ma_z = \sum F_{kz}. \quad (1.25.1)$$

Мұндағы нүкте үдеуінің проекциялары үшін кинематикадан белгілі формулдарын қолданып, аламыз

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$$

немесе $m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}.$ (1.25.2)

(1.25.2)-теңдеулер материялық нүкте қозғалысының декарттық координаттар өстеріне қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері деп аталады.

Нүкте қозғалысының векторлық (1.24.2)-теңдеуін табиғи өстеріне проекциялайық

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \quad ma_n = \sum F_{kn}, \quad ma_b = \sum F_{kb}. \quad (1.25.3)$$

Нүкте үдеуінің табиғи өстеріне проекциялары келесі белгілі формулдарымен анықталады:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

Осыны қолданып, материялық нүкте қозғалысының табиғи өстеріне қатысты дифференциалдық теңдеулерін аламыз

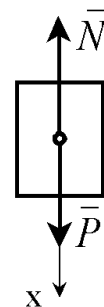
$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}. \quad (1.25.3)$$

Нүкте динамикасында негізгі екі есеп бар. Оның біріншісінде материялық нүкте қозғалысының заңы және оның массасы m

беріледі. Осы заңдылықта болатын қозғалысты тудыратын күшті табу керек болады. Екіншісінде берілген күштер және қозғалыстың бастапқы шарттары бойынша массасы m -ге тең нүкте қозғалысының заңын анықтау керек.

1.25.1-мысал. Массасы $1,02\text{кг}$ жүк жатқан көлденең (горизонталь) платформа 4 м/с^2 үдеуімен вертикаль төмен қозғалады. Олар бірге қозғалғанда жүктің платформаға түсіретін қысым күшін табу керек.

Шешуі: Жүкке бір ғана белсенді күш түсірілген – оның салмағы $\bar{P} = m\bar{g}$. Байланыстардан босату аксиомасын пайдаланып, ойша платформаны алып тастаймыз да, оның әсерін вертикаль жоғары бағытталған \bar{N} реакция күшімен ауыстырамыз (1.25.1 сурет). x өсін қозғалысқа бағытталған төмен қарай тік бағыттап, жүк қозғалысының векторлық теңдеуін x өсіне проекциялап жазамыз



1.25.1 сурет

$$m \cdot a = P - N,$$

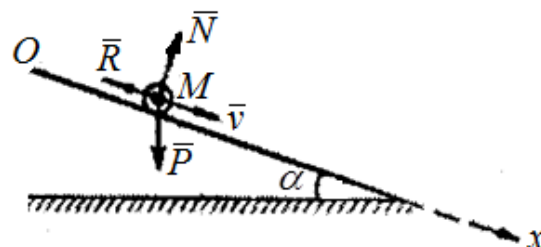
осы теңдеуден

$$N = P - m \cdot a = 1,02 \cdot 9,8 - 1,02 \cdot 4 = 5,92 \text{ Н}.$$

Сонда жүктің платформаға түсіретін қысым күші де $5,92\text{Н}$ -ға тең болады.

1.25.2-мысал. Массасы 2кг материялық нүктенің қозғалысы мынадай теңдеулермен анықталады

$x = 3 \cdot \cos 2\pi t$, $y = 4 \cdot \sin \pi t$ (x пен y метрмен өлшенеді). Нүктеге әсер етуші күштің проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін анықтау керек.



1.25.2 сурет

Шешуі: Алдымен нүкте үдеуінің проекцияларын табамыз. Ол үшін есептің шартында берілген қозғалыс теңдеулерінен уақыт бойынша екі рет туынды аламыз

$$\ddot{x} = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos 2\pi t, \quad \ddot{y} = -4 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi t.$$

Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін пайдалану арқылы күштің координаттар өстеріндегі проекцияларын табамыз

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = -12 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \cos 2\pi t, \quad F_y = m \cdot \ddot{y} = -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \sin \pi t$$

немесе $F_x = -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot x$, $F_y = -\pi^2 \cdot m \cdot y$.

Сан мәндерін орындарына қойып, аламыз

$$F_x = -0,0789x \text{ Н}, \quad F_y = -0,0197y \text{ Н}.$$

1.25.3-мысал. Массасы m -ге тең, бойында электрдің e заряды бар материялық нүкте кернеуі $E = A \cdot \sin kt$ болатын біртекті электр өрісінде орналасқан. Мұндағы A және k берілген тұрақты шамалар. Электр өрісінде материялық нүктеге $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$ бағыты \vec{E} кернеуіне қарай бағытталған күш әсер етеді. Салмақ күшінің әсерін ескермей, бастапқы жылдамдығын нөлге тең деп санау керек. Нүктенің бастапқы орнын координаттардың бас нүктесі ретінде қабылдап, оның қозғалысын анықтау керек.

Шешуі: Материялық нүктеге әсер етуші бір ғана күш бар, ол $F = e \cdot A \cdot \sin kt$. Бастапқы жылдамдығын нөлге тең болғандықтан нүкте қозғалысы – түзу сызықты қозғалыс болады. Бойымен нүкте қозғалатын түзуді Ox өсі ретінде қабылдаймыз. Нүкте қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеу біреу ғана

$$m \cdot \ddot{x} = e \cdot A \cdot \sin kt \quad \text{немесе} \quad \ddot{x} = \frac{e \cdot A}{m} \cdot \sin kt.$$

Осы теңдікті бір рет интегралдап, аламыз

$$\dot{x} = -\frac{e \cdot A}{k \cdot m} \cdot \cos kt + C_1.$$

C_1 тұрақтысын табу үшін бастапқы мәндер $t_0 = 0$, $v_0 = \dot{x}_0 = 0$

шамаларын жоғарыдағы \dot{x} өрнегіне қоямыз. Сонда $C_1 = \frac{e \cdot A}{k \cdot m}$.

Алдыңғы теңдікке C_1 мәнін қойып оны қайта жазуға болады

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e \cdot A}{k \cdot m} \cdot \cos kt + \frac{e \cdot A}{k \cdot m}.$$

Соңғы теңдеуді тағы бір рет интегралдап, аламыз

$$x = \frac{e \cdot A}{k \cdot m} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right) + C_2,$$

мұндағы тұрақты C_2 -нің нөлге тең екендігін, $t_0 = 0$ болғанда $x = x_0 = 0$ болатын бастапқы шартынан анықтаймыз.

Сонымен, M нүктенің қозғалыс заңдылығы мынадай өрнекпен

беріледі $x = \frac{e \cdot A}{k \cdot m} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right)$.

1.25.4-мысал. Массасы m -ге тең нүкте M үйкеліссіз көкжиекпен α бұрышын жасайтын көлбеу жазықтық пен кедергілі ортада

қозғалсын (1.25.2-сурет). Ортаның кедергі күші жылдамдықтың бірінші дәрежесіне пропорционал болсын $\overline{R} = -k \cdot m \cdot \overline{v}$, мұндағы k тұрақты шама. Нүктенің қозғалыс заңдылығын анықтау керек.

Шешуі: Ox өсін көлбеу жазықтық бойымен, басын нүктенің бастапқы орнына қойып бағыттайық. Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі

$$m \cdot \ddot{x} = P \cdot \sin \alpha - R \quad \text{немесе} \quad \ddot{x} = g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}. \quad (a)$$

(a) теңдеуіндегі \dot{x} және t айнымалыларды ажыратып жазамыз

$$\frac{d\dot{x}}{g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}} = dt. \quad (б)$$

(б) теңдеуді бір рет интегралдап мынадай теңдеу аламыз

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln(g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}) = t + C_1. \quad (в)$$

Бастапқы шарттарды қолданамыз

$$t = 0 \quad \text{болғанда} \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_0 = 0. \quad (г)$$

Бұл бастапқы мәндерді (в) теңдеуіне қойсақ

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln(g \cdot \sin \alpha) = C_1.$$

Олай болса (в) теңдеуі мына түрде қайта жазылады

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln(g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}) = t - \frac{1}{k} \cdot \ln(g \cdot \sin \alpha).$$

Осыны келесідей өрнектейміз

$$\ln(g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}) - \ln(g \cdot \sin \alpha) = -k \cdot t \quad \text{немесе}$$

$$\ln\left(\frac{g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}}{g \cdot \sin \alpha}\right) = -k \cdot t, \quad \text{яғни} \quad \frac{g \cdot \sin \alpha - k \cdot \dot{x}}{g \cdot \sin \alpha} = e^{-k \cdot t}.$$

$$\text{Осыдан} \quad \dot{x} = \frac{g \cdot \sin \alpha}{k} \cdot (1 - e^{-k \cdot t}). \quad (д)$$

(д) теңдеуді тағы бір рет интегралдап мынаны аламыз

$$x = \frac{g \cdot \sin \alpha}{k} \cdot \left(t + \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot t}\right) + C_2. \quad (е)$$

(г)-дегі бастапқы шарттарды пайдалана отырып (е) теңдеуінен C_2 тұрақтысын табамыз

$$C_2 = -\frac{g \cdot \sin \alpha}{k^2}.$$

Осыны ескеріп (е) теңдеуін қайта жазамыз

$$x = \frac{g \cdot \sin \alpha}{k} \cdot t - \frac{g \cdot \sin \alpha}{k^2} \cdot (1 - e^{-k \cdot t}). \quad (ж)$$

Сөйтіп, нүктенің кедергілі ортада көлбеу жазықтықпен қозғалысының заңын (ж) теңдеуі түрінде анықтадық. Орта кедергісінің нүктеге әсері k тұрақты кедергі коэффициентімен сипатталады. Мұнда нүкте қозғалысының (а) дифференциалдық теңдеуін келесі мысалда көрсетілген әдіспен де шығаруға болатынын айту керек.

1.25.5-мысал. Салмағы \bar{P} -ға тең дененің бағыты көкжиекпен α бұрышын жасайтын бастапқы жылдамдығы \bar{v} берілген. Бұдан әрі қарай дене тек салмақ күші және ауа кедергісі \bar{R} -дің әсерінен ғана қозғалады. Ауа кедергісін дене жылдамдығының бірінші дәрежесіне пропорционал деп есептеп ($\bar{R} = -k \cdot P \cdot \bar{v}$), оның қозғалыс теңдеулерін табу керек (1.25.3-сурет).

Шешуі: Координаттардың бас нүктесі ретінде нүктенің алғашқы орнын қабылдап, Ox , Oy өстерін суретте көрсетілгендей бағыттауымыз. Нүктенің кез келген бір орнын қарастырып, оған сол уақыт сәтінде әсер ететін күштерді көрсетейік. Нүкте қозғалысының негізгі теңдеуі

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P} + \bar{R} \quad \text{немесе} \quad m \cdot \bar{a} = \bar{P} - k \cdot P \cdot \bar{v}.$$

Бұл теңдеулерді Ox , Oy өстеріне проекциялаймыз

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot P \cdot \dot{x}, \quad m \ddot{y} = -P - k \cdot P \cdot \dot{y}.$$

Теңдеулердің екі жағын m массасына бөліп, оларды келесі түрде жазамыз

$$\ddot{x} + k \cdot g \cdot \dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + k \cdot g \cdot \dot{y} = -g. \quad (a)$$

Екі теңдеу де коэффициенттері тұрақты, сызықтық теңдеулер болып табылады. Сызықтық теңдеулерді интегралдаудың жалпы теориясы бойынша $x = e^{\lambda t}$ деп белгілеп, (а) жүйесіндегі бірінші теңдеудің сипаттаушы теңдеуін жазамыз

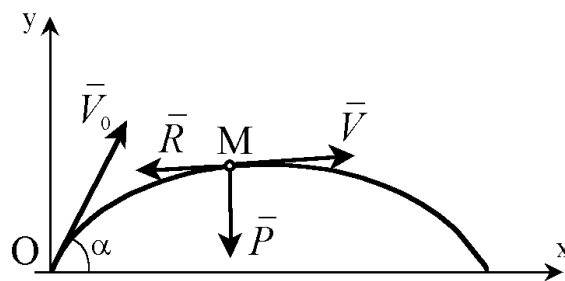
$$\lambda^2 + k \cdot g \cdot \lambda = 0.$$

Бұл сипаттаушы теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k \cdot g$ болғандықтан (а) жүйесіндегі бірінші теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады

$$x = C_1 + C_2 e^{-k \cdot g \cdot t}, \quad (б)$$

мұндағы C_1 және C_2 - интегралдау

тұрақтылары. Осынын туындысы арқылы нүкте жылдамдығының x өсіне проекциясының өрнегін жазамыз



1.25.3-сурет

$$v_x = \dot{x} = -k \cdot g \cdot C_2 e^{-k \cdot g \cdot t}. \quad (6)$$

Енді $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ бастапқы шамаларды (6) мен (6) өрнектерінде пайдалансақ, C_1 және C_2 арасындағы тәуелділікті беретін екі теңдеу аламыз

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -k \cdot g \cdot C_2 = v_0 \cdot \cos \alpha.$$

Осы жүйеден

$$C_2 = -\frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{k \cdot g}, \quad C_1 = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{k \cdot g}.$$

Сондықтан да (a) жүйесінің бірінші теңдеуінің интегралы мынадай

$$x = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{k \cdot g} (1 - e^{k \cdot g \cdot t}). \quad (2)$$

(a) жүйесіндегі екінші теңдеу біртекті емес сызықты дифференциалдық теңдеу болып табылады, сондықтан оның жалпы шешімі $y = y_1 + y_2$, мұндағы y_1 - сәйкес біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, ал y_2 - біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі. Дербес шешім y_2 -ні таңдау әдісін қолдану арқылы табамыз

$$y_2 = -\frac{1}{k} \cdot t. \quad (d)$$

Ал y_1 -ді сипаттаушы теңдеу арқылы, жоғарыда x -ті табуға қолданылған әдіспен анықтаймыз

$$y_1 = C_3 + C_4 e^{-k \cdot g \cdot t}.$$

Сөйтіп, (a) жүйесіндегі екінші дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мынадай

$$y = C_3 + C_4 e^{-k \cdot g \cdot t} - \frac{1}{k} \cdot t. \quad (e)$$

Нүкте жылдамдығының y өсіне проекциясының өрнегін жазамыз

$$v_y = \dot{y} = -k \cdot g \cdot C_4 e^{-k \cdot g \cdot t} - \frac{1}{k}. \quad (ж)$$

Енді C_3 , C_4 интегралдау тұрақтыларын табу қалды. Ол үшін бастапқы шарттарды пайдаланамыз: $t_0 = 0$ болғанда

$y_0 = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ болады. Осы шамаларды y және \dot{y} өрнегіне қойсақ

$$C_3 + C_4 = 0, \quad -kgC_4 - \frac{1}{k} = v_0 \sin \alpha,$$

тендеулерін аламыз. Бұлардан

$$C_3 = \frac{1}{k^2 \cdot g} + \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{k \cdot g}, \quad C_4 = -\frac{1}{k^2 \cdot g} - \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{k \cdot g}.$$

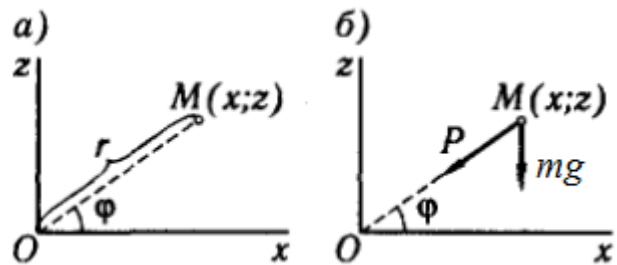
Сөйтіп, екінші біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімін таптық

$$y = \left(\frac{1}{k^2 \cdot g} + \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{k \cdot g} \right) \cdot (1 - e^{-k \cdot g \cdot t}) - \frac{1}{k} \cdot t. \quad (3)$$

Нүктенің қозғалысын анықтайтын кинематикалық теңдеулерді қатарлап жазамыз

$$x = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{k \cdot g} \cdot (1 - e^{-k \cdot g \cdot t}), \quad y = \left(\frac{1}{k^2 \cdot g} + \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{k \cdot g} \right) \cdot (1 - e^{-k \cdot g \cdot t}) - \frac{1}{k} \cdot t.$$

1.25.6-мысал. Массасы 1 кг тең M материялық нүктесі вертикаль xOz жазықтығында координат басына бағытталған $\bar{P} = -c\bar{r}$ тарту күші әсерінен қозғалады, мұнда \bar{r} – нүктенің радиус-векторы, пропорционалдық коэффициенті $c=4\text{ Н/м}$ (1.25.4,а-сурет). Ортаның кедергі күші жылдамдық шаршысына пропорционалды, яғни кедергі күші $\bar{R} = -\mu v\bar{v}$, мұнда $\mu=0,2\text{ кг/м}$. Нүктенің бастапқы координаталары $x_0=0$, $z_0=10\text{ м}$, бастапқы жылдамдығы $v_0=20\text{ м/с}$ горизонталь бағытталған. M нүктесінің қозғалыс теңдеулерін және траекториясын анықтау керек.



1.25.4-сурет

Шешуі: Материялық нүктеге келесі күштер түсірілген: $m\bar{g}$ ауырлық күші, \bar{P} тарту күші және нүкте жылдамдығына қарсы бағытталған ортаның кедергі \bar{R} күші (1.25.4,б-сурет). Нүктеге түсірілген күштер және оның бастапқы жылдамдығы xOz жазықтығында орналасады, сондықтан нүкте осы жазықтықта қозғалады. Нүкте қозғалысының теңдеуін векторлық түрде жазамыз:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{P} + \bar{R} \quad \text{немесе} \quad m\bar{a} = m\bar{g} - c\bar{r} - \mu v\bar{v}.$$

Осы теңдеуді координаттық осьтерге проекциялаймыз

$$ma_x = -cr_x - \mu v v_x, \quad ma_z = -mg - cr_z - \mu v v_z.$$

Мұнда нүкте үдеуінің проекциялары $a_x = \ddot{x}$, $a_z = \ddot{z}$, нүкте радиус-векторының проекциялары $r_x = r \cos \varphi = x$, $r_y = r \sin \varphi = y$, нүкте жылдамдығының модулі $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ және оның проекциялары $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ болатынын ескеріп, нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін келесі түрде аламыз

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}, \quad \ddot{z} = -g - \frac{c}{m}z - \frac{\mu}{m}\dot{z}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}.$$

Алынған дифференциалдық теңдеулер сызықты емес, олардың аналитикалық шешімі табылмайды. Теңдеулердің сандық шешімін Mathcad жүйесінде алуға болады. Ол үшін нүкте қозғалысының 2-ші ретті дифференциалдық теңдеулерін 1-ші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде жазу керек

$$\dot{x} = v_x,$$

$$\dot{v}_x = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}v_x\sqrt{v_x^2 + v_z^2},$$

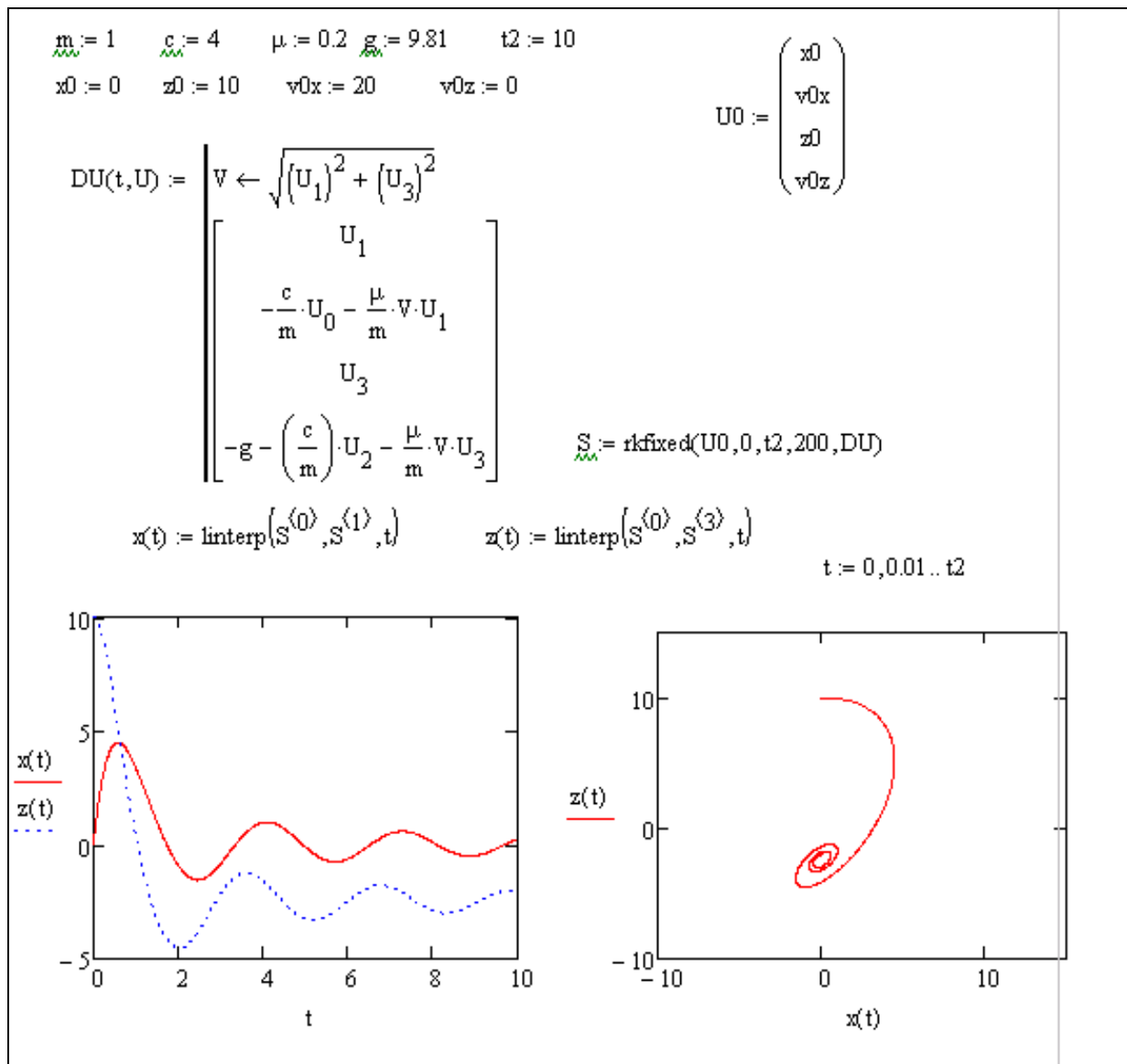
$$\dot{z} = v_z,$$

$$\dot{v}_z = -g - \frac{c}{m}z - \frac{\mu}{m}v_z\sqrt{v_x^2 + v_z^2}.$$

Сонда белгісіздер векторы келесі болады: $U = (x \quad v_x \quad z \quad v_z)^T$.

Mathcad жүйесінде Коши есебін, яғни бастапқы шарттармен дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған бірнеше әдіс бар. Біз мұнда тұрақты қадаммен Рунге-Кутт әдісін орындайтын $rkfixed(U0,0,t2,200,DU)$ функциясын қолданамыз. Функцияның бірінші параметрі $U0$ белгісіздер векторының бастапқы шамасын, 0 және $t2$ – интегралдау аралығын, 200 – интегралдаудағы қадамдар санын, DU – дифференциалдық теңдеулер жүйесін беретін векторлық функциясын білдіреді. Сандық шешім нәтижесі, $[0,t2]$ уақыт аралығында $\Delta t = t_2 / 200$ қадамымен есептелген t, x, z, v_x, v_z мәндірінің матрицасы болып келеді. Мұнда 1.25.5-суретте көрсетілгендей нәтижелер матрицасы S әрпімен белгіленді.

Қозғалыс графиктері мен траекторияны тұрғызу үшін айнымалылардың табылған мәндері бойынша интерполяцияны жүргізіп, олардың функцияларын табу керек. Mathcad жүйесінде сызықты интерполяция жүргізетін $linterp(x,y,t)$ функциясы бар. Соны қолданумен тұрғызылған қозғалыс графиктері және нүкте траекториясы 1.25.5-суретте көрсетілген.



1.25.5-сурет

1.26 Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы

Динамика заңдары тек қана инерциялық санақ жүйелерінде орындалады. Материялық нүктенің кейбір санақ жүйесіне қатысты қозғалысын қарастырайық және осы санақ жүйесі басқа инерциялық санақ жүйесіне қатысты еркінше қозғалатын болсын. P нүктесі $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_N\}$ күштер әсерінен қозғалатын болсын. Инерциялық санақ жүйесінде динамиканың негізгі (1.24.2) теңдеуі орындалады, яғни

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.26.1)$$

Мұндағы нүктенің абсолют үдеуі (1.22.2) формуласымен табылады, яғни

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c . \quad (1.26.2)$$

(1.22.2) теңдігін (1.26.1) теңдігіне қойып, түрлендіреміз

$$m \cdot \bar{a}_r = \sum \bar{F}_k - m \cdot \bar{a}_e - m \cdot \bar{a}_c . \quad (1.26.3)$$

Келесі белгілеулерді қабылдаймыз

$$\bar{\Phi}_e = -m \cdot \bar{a}_e , \quad (1.26.4)$$

$$\bar{\Phi}_c = -m \cdot \bar{a}_c . \quad (1.26.5)$$

$\bar{\Phi}_e$ мен $\bar{\Phi}_c$ тасымал және кориолис инерция күштері деп ата-

лады, олар сәйкес тасымал және кориолис үдеуіне қарама қарсы бағытталады.

(1.26.3) теңдігін келесі түрде жазуға болады

$$m \cdot \bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c . \quad (1.26.6)$$

(1.26.6) - теңдеуі материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының негізгі теңдеуі.

Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысының дербес жағдайлары

а) ілгерілемелі тасымал қозғалыс кезінде

$$m \cdot \bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e , \quad (1.26.7)$$

б) ілгерілемелі түзу сызықты бірқалыпты тасымал қозғалыс кезінде

$$m \cdot \bar{a}_r = \sum \bar{F}_k . \quad (1.26.8)$$

Мұнда (1.26.8) мен (1.26.1) бірдей болады, өйткені $\bar{a}_r = \bar{a}$.

Сондықтан, бұл санақ жүйесі инерциялық болады. Механикалық тәжірибелер арқылы санақ жүйесі тыныштықта екенін немесе ілгерілемелі бірқалыпты және түзу сызықты қозғалыста екенін анықтау мүмкін емес (Галилейдің салыстырмалылық принципі);

в) салыстырмалы

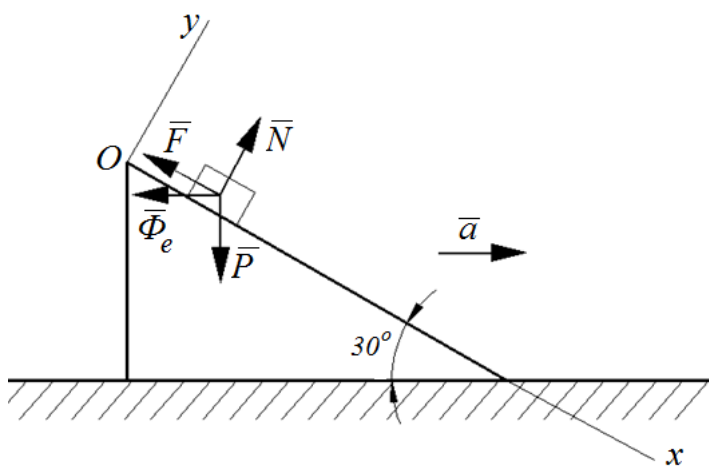
тыныштық қалпында

$$\sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e = 0 .$$

(1.26.9)

Бұл материялық нүктенің салыстырмалы тепе-теңдігінің теңдеуі.

1.26.1-мысал. Тұрақты $a=0,5\text{м/с}^2$ үдеуімен оң жаққа қарай қозғалатын призма бетінде салмағы $P=19,6\text{Н}$ тең



1.26.1-сурет

жүк тыныштық қалыпынан жылжып келеді (1.26.1-сурет). Жүк пен призма беті арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,1$ болғанда жүктің призмаға қатысты қозғалыс теңдеуін және оның призма бетіне түсіретін қысымын анықтау керек.

Шешуі: Материялық нүк-те ретінде алынатын жүк күр-делі қозғалыста болып тұр, оның призмамен бірге қозғалысы тасымал, ал призма бетінде қозғалысы – салыстырмалы қозғалыс болып келеді. Тасымал қозғалыс ілгерілемелі болғандықтан, материялық нүктенің кориолис үдеуі нөлге, тасымал үдеуі призма үдеуіне тең. Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысының теңдеуін (1.26.7) түрінде жазу керек. Нүктеге түсірілген күштер: ауырлық күші \bar{P} , призма бетінің нормаль реакциясы \bar{N} , сырғанау үйкелісі күші \bar{F} . Тасымал инерция күші $\bar{\Phi}_e$ тасымал үдеуге, яғни призма үдеуіне қарама-қарсы

бағытталады, оның модулі $\Phi_e = m \cdot a_e = \frac{P}{g} a = 1 \text{ Н}$.

Призмамен бірге қозғалатын xOy координат жүйесінің басын материялық нүктенің бастапқы орнына орналастырып, x осін жүктің қозғалу бағытымен, y осін оған перпендикуляр жүргіземіз. Сонда материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуі келесідей жазылады

$$\frac{P}{g} \cdot \bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi}_e . \quad (a)$$

Салыстырмалы үдеудің осьтерге проекциялары $a_{rx} = \ddot{x}$, $a_{ry} = 0$ болатынын ескеріп, (a) теңдеуін осьтерге проекциялаймыз:

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{x} = P \sin 30^\circ - F - \Phi_e \cos 30^\circ , \quad (б)$$

$$0 = -P \cos 30^\circ + N - \Phi_e \sin 30^\circ . \quad (в)$$

(в) теңдігінен нормаль реакция күшін анықтаймыз:

$$N = P \cos 30^\circ + \Phi_e \sin 30^\circ = P(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g) . \quad (г)$$

Сырғанау үйкеліс күші

$$F = fN = fP(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g) . \quad (д)$$

(б) теңдеуіне анықталған күштердің өрнектерін қоямыз

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{x} = P \sin 30^\circ - fP(\cos 30^\circ + \frac{a}{g} \sin 30^\circ) - \frac{P}{g} a \cos 30^\circ . \quad (е)$$

Осыдан

$$\ddot{x} = g \sin 30^\circ - f(g \cos 30^\circ + a \sin 30^\circ) - a \cos 30^\circ = 3,64 \text{ м / с}^2 .$$

Осыны екі рет интегралдап, аламыз

$$\dot{x} = 3,64t + C_1, \quad x = 1,82t^2 + C_1t + C_2. \quad (\text{ж})$$

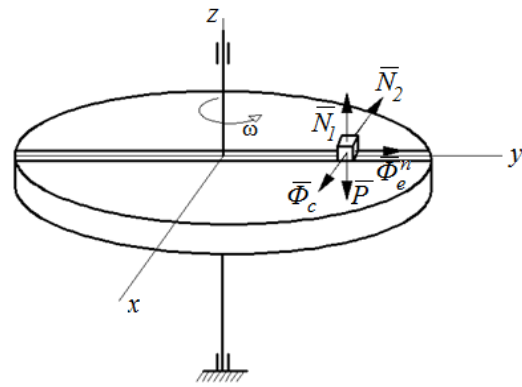
C_1 мен C_2 тұрақтыларын табу үшін бастапқы шарттарды қолданамыз: $t = 0$ болғанда $\dot{x} = v_0 = 0$ және $x = x_0 = 0$.

Осыны (ж) теңдеулеріне қойып, аламыз: $C_1 = C_2 = 0$.

Сонымен жүктің призма бетіндегі қозғалыс теңдеуі $x = 1,82t^2$ м. Жүктің призма бетіне түсіретін қысым күшінің шамасы нормаль реакция күшіне тең

$$N = P(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g) = 17,5 \text{ Н}.$$

1.26.2-мысал. Дөңгелек диск тұрақты ω бұрыштық жылдамдығымен вертикаль осьті айналады. Оның үстіндегі түзу сызықты және қимасы тік төртбұрышты ойыс жолмен массасы m -ге тең текше жылжыйды (1.26.2-сурет). Бастапқы уақыт мезгілінде текше осьтен d арақашықтығында тыныштық қалыпында болды. Сырғанау үйкелісін ескермей, текшенің диск үстіндегі қозғалысының теңдеуін және текше ойыстың жақтарына түсіретін қысымдарын анықтау керек.



1.26.2-сурет

Шешуі: Текшені материялық нүкте ретінде қарастырамыз, ол күрделі қозғалыста болып тұр.

Оның дискімен бірге қозғалысы тасымал, ал диск ойысы бойымен қозғалысы – салыстырмалы қозғалыс болып келеді. Дискімен бірге айналатын $Oxyz$ декарт координат жүйесін суретте көрсетілгендей таңдаймыз. Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуін (1.26.6) түрінде құрамыз. Нүктеге түсірілген күштер: ауырлық күші $\bar{P} = m\bar{g}$, ойыстың астыңғы бетінің нормаль реакциясы \bar{N}_1 және бүйір жағының нормаль реакциясы \bar{N}_2 .

Тасымал қозғалыс айналмалы болғандықтан, текшенің тасымал үдеуі екі құраушыдан тұрады, яғни $\bar{a}_e = \bar{a}_e^r + \bar{a}_e^n$. Дискінің бұрыштық жылдамдығы тұрақты, сонда оның бұрыштық үдеуі де, нүктенің жанама тасымал үдеуі де нөлге тең: $a_e^r = \varepsilon \cdot y = 0$. Нүктенің нормаль тасымал үдеуі (центрде тартқыш үдеуі) келесі формуламен анықталады: $a_e^n = \omega^2 \cdot y$, мұндағы y – нүктенің айналу осіне дейін арақашықтығы. Сонда тасымал инерция күші (центрден тепкіш күш)

$\Phi_e^n = m \cdot a_e^n = m \omega^2 y$, ол нормаль тасымал үдеуге қарама-қарсы бағытталады. Нүктенің кориолис үдеуі $a_c = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$. Мұнда тасымал қозғалыстың бұрыштық жылдамдығы дискінің жылдамдығына тең $\omega_c = \omega$, бұрыштық жылдамдық векторы $\bar{\omega}_e$ айналу осі бойымен жоғары қарай бағытталады. Нүктенің салыстырмалы жылдамдығы y координатасының уақыт бойынша бірінші туындысына тең $v_r = \dot{y}$, оның \bar{v}_r векторы y өсінің оң бағытымен бағытталады. Осы екі вектор арасындағы бұрыш $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 90^\circ$. Нүктенің кориолис үдеуінің шамасы $a_c = 2\omega \dot{y}$, бағытын векторлық көбейтінді ережесімен немесе Журавскийдің ережесімен анықтаймыз, сонда \bar{a}_c векторы x осінің теріс жағына бағытталады. Кориолис инерция күшінің модулі $\Phi_c = m \cdot 2\omega \dot{y}$, векторы $\bar{\Phi}_c$ кориолис үдеуіне қарама-қарсы, яғни суретте көрсетілгендей бағытталады.

Нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуін алдымен векторлық түрде жазамыз

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_c. \quad (a)$$

Салыстырмалы үдеудің осьтерге проекциялары $a_{rx} = 0$, $a_{ry} = \ddot{y}$, $a_{rz} = 0$ болатынын ескеріп, (a) теңдеуін x , y , z осьтеріне проекциялаймыз

$$0 = \Phi_c - N_2, \text{ осыдан } N_2 = \Phi_c = m2\omega \dot{y}, \quad (б)$$

$$0 = N_1 - P, \text{ осыдан } N_1 = P = mg, \quad (в)$$

$$m\ddot{y} = \Phi_e^n \text{ немесе } m\ddot{y} = m\omega^2 y. \quad (г)$$

Енді (г) теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\ddot{y} - \omega^2 y = 0. \quad (д)$$

Бұл біртекті сызықты коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеу. Теңдеудің сипаттаушы теңдеуін құрып, оның түбірлерін табамыз

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0, \quad \lambda_1 = \omega, \quad \lambda_2 = -\omega. \quad (е)$$

Сонда (д) теңдеуінің жалпы шешімі келесі болады:

$$y = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (ж)$$

Тұрақтыларды анықтау алдында осы теңдіктің уақыт бойынша туындысын аламыз

$$\dot{y} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}. \quad (з)$$

Қозғалыстың бастапқы шарттары: $t = 0$ болғанда $y = d$ және $\dot{y} = v_{r0} = 0$.

Осыны (ж), (з) теңдеулеріне қойып, аламыз

$$d = C_1 + C_2, \quad 0 = \omega(C_1 - C_2).$$

Теңдеулерді шешеміз

$$C_1 = C_2 = \frac{d}{2}.$$

Сонымен текшенің қозғалыс теңдеуі

$$y = \frac{d}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Текшенің ойыс жақтарына түсіретін қысымдары сәйкес нормаль реакция күштеріне тең

$$N_1 = mg, \quad N_2 = m\omega^2 d(e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

1.27 Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Нүкте динамикасының үш жалпы теоремасы бар. Олардың бәрі де осындағы негізгі заңынан қорытылып шығарылады.

Материялық нүктенің m массасы мен \bar{v} жылдамдығының көбейтіндісіне тең $\bar{q} = m\bar{v}$ векторын оның қозғалыс мөлшері дейміз.

\bar{F} -күшінің элементар импульсі деп келесі $\bar{F}dt$ көбейтіндісін атайды. Күштің $[t_0, t]$ уақыт аралығында нүктеге берген импульсі келесі интеграл арқылы анықталады $\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F}dt$.

Нүкте қозғалыс мөлшері мен оған түсірілген күштер импульстері арасындағы байланысты анықтау үшін, нүкте қозғалысының негізгі теңдеуін түрлендіру керек

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_k \quad \text{немесе} \quad \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.27.1)$$

Бұл теңдеудің екі жағын да dt -ға көбейтеміз

$$d(m\bar{v}) = \sum \bar{F}_k dt. \quad (1.27.2)$$

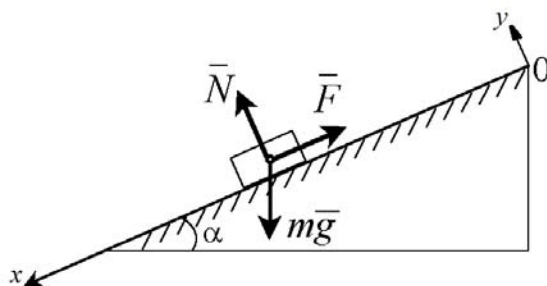
Осы теңдеу теорема түрінде былай айтылады: материялық нүкте қозғалыс мөлшерінің дифференциалы оған түсірілген күштердің элементар импульстерінің векторлық қосындысына тең.

Уақыт $t = t_0$ болғанда нүкте жылдамдығы $\bar{v} = \bar{v}_0$ болады дейік. (1.27.2)–теңдіктің сол жағынан \bar{v}_0 -ден \bar{v} -ға дейінгі шектерде, ал оң жағынан t_0 -ден t -ға дейінгі шектердегі интегралдар алайық

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \sum \int_{t_0}^t \bar{F}_k dt \text{ немесе } m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k. \quad (1.27.3)$$

(1.27.3) теңдігі материялық нүкте қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың айырым түріндегі өрнегін береді: қандай да уақыт аралығындағы нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі оған түсірілген күштердің сол уақыт аралығындағы импульстерінің векторлық қосындысына тең.

1.27.1-мысал. Горизонтпен $\alpha = 30^\circ$ бұрышын жасайтын тегіс емес көлбеу жазықтық бетімен салмақты дене төмен қозғалып келеді. Дененің $l = 39,2$ м жолды қанша уақыт ішінде жүріп өтетінін анықтау керек. Көлбеу жазықтықтың үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$, дененің бастапқы жылдамдығы $v_0 = 0$.



1.27.1-сурет.

Шешуі: Есептің шартына сай сурет салып, денеге түсірілген күштерді көрсетеміз: $m\bar{g}$ - ауырлық

күшін, \bar{N} - жазықтықтың нормаль реакциясын және \bar{F} - сырғанау үйкеліс күшін (1.27.1-сурет). Координаттар өстерінің бірін көлбеу жазықтық бетімен, екіншісін – оған перпендикуляр бағыттауымыз.

Есептің шартында уақыт сұралғандықтан, есепті шешуге қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы қолданған жөн.

(1.27.3) теореманы алдымен векторлық түрінде жазамыз

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_0^t m\bar{g} dt + \int_0^t \bar{F} dt + \int_0^t \bar{N} dt. \quad (a)$$

Осыны екі өске проекциялаймыз

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t mg \sin \alpha dt - \int_0^t F dt, \quad mv_y - mv_{0y} = \int_0^t N dt - \int_0^t mg \cos \alpha dt.$$

Мұнда жылдамдықтың y -оске проекциялары және бастапқы жылдамдық 0-ге тең болғандықтан, аламыз

$$mv_x = \int_0^t mg \sin \alpha dt - \int_0^t F dt, \quad 0 = \int_0^t (N - mg \cos \alpha) dt. \quad (б)$$

(б) жүйесіндегі екінші теңдеуден $N = mg \cos \alpha$, сонда үйкеліс күші $F = fN = fmg \cos \alpha$.

(б) жүйесінің бірінші теңдеуінен $mv_x = mg \sin \alpha \cdot t - fmg \cos \alpha \cdot t$.

Осыны келесі түрде жазамыз $\frac{dx}{dt} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot t$.

Соңғы теңдеудің айнымалыларын бөлектеп жазу арқылы мынадай теңдікті аламыз

$$dx = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot t \cdot dt.$$

Бұл теңдеудің сол жағын 0-ден l -ге дейін, ал оң жағын 0-ден T -ға дейін интегралдаймыз

$$\int_0^l dx = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \int_0^T t \cdot dt.$$

Сонда $l = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{T^2}{2}$. Осыдан керекті уақыт T -ны табамыз

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{78,4}{(0,5 - 0,86 \cdot 0,2) \cdot 9,8}} = 5 \text{ с.}$$

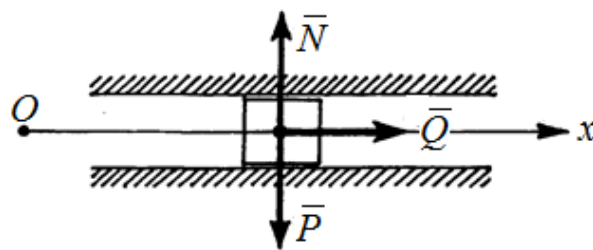
1.27.2-мысал. Салмағы P -ға тең дене (1.27.2-сурет) \bar{Q} күшінің әсерінде көлденең бағыттаушы бойымен қозғалады, оның бағыттаушыға параллель Ox өсіне проекциясы мынадай заңдылықпен өзгереді:

$$Q_x = Q_0 \cdot \cos(kt),$$

мұндағы Q_0 және k - тұрақты шамалар. Үйкеліс күшін

есепке алмай, $t_2 = \frac{\pi}{2k}$ уақыт

мезетінде дене жылдамдығын анықтау керек.



1.27.2-сурет

Шешуі: Дененің қозғалысы ілгерілемелі қозғалыс, сондықтан оны материялық нүкте р-етінде қарастырамыз.

Денеге салмақ \bar{P} күші, бағыттаушының реакциясы \bar{N} және \bar{Q} күші әсер етеді. Салмақ \bar{P} және \bar{N} реакция күштері теңгеріледі.

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы $[t_1, t_2]$ уақыт аралығында пайдаланып, x -өске проекциялаймыз

$$m \cdot v_{2x} - m \cdot v_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} Q_x \cdot dt. \quad (a)$$

Мұндағы $m = \frac{P}{g}$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2k}$, $v_{1x} = v_1$, $Q_x = Q_0 \cdot \cos(kt)$.

Сондықтан (a) тендеуін мына түрде жазамыз

$$\frac{P}{g} \cdot v_{2x} - \frac{P}{g} \cdot v_1 = Q_0 \cdot \int_0^{\pi/2k} \cos(kt) \cdot dt \quad \text{немесе} \quad \frac{P}{g} \cdot v_{2x} - \frac{P}{g} \cdot v_{1x} = Q_0 \cdot \frac{1}{k}.$$

Осыдан t_2 уақыт мезгілінде дене жылдамдығының Ox осіне проекциясын анықтаймыз

$$v_{2x} = v_1 + \frac{gQ_0}{kP}.$$

1.28 Материялық нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің қандайда бір центрге қатысты алынған моментін оның сол центрге қатысты кинетикалық моменті дейді.

O центріне қатысты алынған кинетикалық моментін \bar{K}_O әрпімен белгілейік. Сонда ол $\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$ немесе

$\bar{K}_O = \bar{M}_O(m\bar{v})$ түріндегі өрнекпен беріледі (1.28.1-сурет).

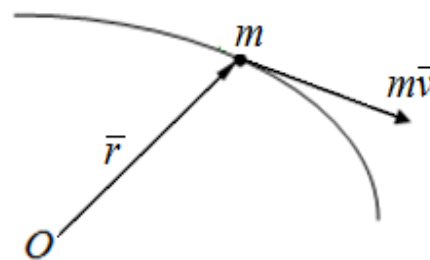
Кинетикалық момент күштер әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп тұрады, сол өзгерістің түсірілген күштерге тәуелділігін табу үшін нүкте кинетикалық моментінің уақыт бойынша бірінші туындысын өрнектейміз

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} \quad (1.28.1)$$

Мұнда бірінші векторлық көбейтінді нөлге тең, ал екіншісінде $m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$ болғандықтан, аламыз

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{r} \times \sum \bar{F}_k = \sum \bar{r} \times \bar{F}_k = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (1.28.2)$$

Сонымен нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема векторлық түрінде келесідей жазылады



1.28.1-сурет

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k). \quad (1.28.3)$$

Теорема: қандай да бір центрге қатысты алынған нүктенің кинетикалық моментінің уақыт бойынша туындысы оған түсірілген күштердің сол центрге қатысты моменттерінің векторлық қосындысына тең.

(1.28.3)-теңдеуді координаттық өске проекциялауға болады

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\bar{F}_k), \quad (1.28.4)$$

яғни нүктенің x -өске қатысты кинетикалық моментінің уақыт бойынша туындысы нүктеге түсірілген күштердің сол өске қатысты моменттерінің алгебралық қосындысына тең.

1.28.1-мысал. M нүктесі қозғалмайтын O центріне бағытталған \bar{F} тартылыс күші әсерінен қозғалады. Нүктенің центрге ең жақын орналасуында жылдамдығы $v_1 = 30 \text{ см/с}$ тең. Нүктенің центрден ең алыс орналасуында жылдамдығын табу керек, егер $r_2 = 3r_1$ болса (1.28.2-сурет).

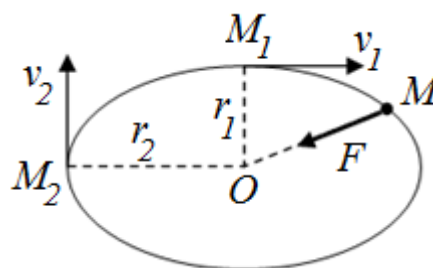
Шешуі: M нүктесінің O центріне қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы қолданамыз

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}).$$

Мұнда күш центрден өтетін болған соң оның моменті нөлге тең, сонда $\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = \text{const}$. Нүктенің центрге қатысты кинетикалық

моментінің модулі M_1 орнында $K_{O1} = mv_1 \cdot r_1$, M_2 орнында

$K_{O2} = mv_2 \cdot r_2$. Оларды теңестіріп, аламыз $v_2 = \frac{v_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{30 \cdot r_1}{3r_1} = 10 \text{ см/с}$.



1.28.2-сурет

1.29 Күш жұмысы. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Алдымен элементар жұмыстың математикалық өрнегінің әр түріне тоқтап өтейік. Күштің $d\bar{r}$ элементар орын ауыстыруға көбейтіндісін $d'A = \bar{F}d\bar{r}$ күштің элементар жұмысы деп атайды. Элементар жұмыстың вектор-лардың скалярлық көбейтіндісі түрінде

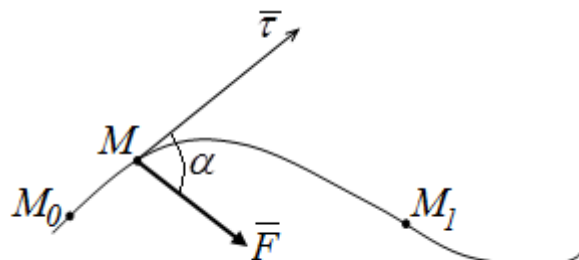
алынған өрнегінен сол векторлардың проекциялары арқылы жазылуына көшуге болады

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (1.29.1)$$

Элементар жұмысты жолдың ds дифференциалы және күш \vec{F} пен нүкте жылдамдығы \vec{v} бағытының арасындағы α бұрышы арқылы да өрнектей аламыз (1.29.1-сурет)

$$d'A = F |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F |ds| \cos(\vec{F}, \vec{v}) = F ds \cos \alpha = F_\tau ds. \quad (1.29.2)$$

Бұл формуладағы F және ds оң шамалар, $d'A$ элементар жұмыстың таңбасы $\cos \alpha$ таңбасымен бірдей. Егер α сүйір болса, $d'A$ оң, α доғал болса, $d'A$ теріс таңбалы болады.



1.29.1-сурет

Күштің M_0M_1 орын ауыстырудағы толық жұмысы келесі формулалармен сипатталады

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (1.29.3)$$

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F \cos \alpha ds \quad (1.29.4)$$

Егер нүкте түзу сызық бойымен тұрақты күш әсерінен қозғалатын болса, онда оның s орын ауыстырудағы толық жұмысы

$$A = F s \cos \alpha \quad (1.29.5)$$

Ауырлық күштің жұмысын (1.29.3) формуладан табуға болады:

$$A = \pm mgh. \quad (1.29.6)$$

Мұнда жұмыс нүкте төмен қозғалатын болса оң таңбамен, жоғары қозғалатын болса теріс таңбамен алынады, h – нүктенің вертикаль орын ауыстыруы (жоғары көтерілу немесе төмен түсу биіктігі). Сонымен ауырлық күш жұмысы нүкте траекториясына тәуелсіз, ол тек ғана нүктенің вертикаль орын ауыстыруына тәуелді.

Жұмыс өлшемінің бірлігі үшін БХЖ жүйесінде 1 джоуль алынады ($1Дж = 1Нм$).

Уақыт бірлігіне қатысты алынған жұмыс қуат деп аталады. Қуатты N деп белгілесек, онда оны мына формуламен анықтаймыз

$$N = \frac{d'A}{dt} \text{ немесе } N = \vec{F} \vec{v}. \quad (1.29.7)$$

Қуат бірлігі үшін *БХЖ* жүйесінде 1ватт ($1Вт = 1Дж/сек$) алынады. Практикада қуаттың ірі бірлік өлшемі киловатт ($1кВт = 10^3Вт$) жиі қолданылады.

Нүктенің кинетикалық энергиясы деп келесі скаляр шаманы айтады

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.29.8)$$

Күш әсерінен нүктенің жылдамдығы өзгереді. Сол себепті кинетикалық энергия да уақыт өткен сайын өзгеріп отырады.

Енді кинетикалық энергияның өзгерісінің күшпен байланысын беретін теоремаға тоқталайық. Ол теореманы динамиканың негізгі теңдеуінен қорытып шығарамыз. Сол мақсатпен негізгі теңдеуді жылдамдық бағытына (жанамаға) проекциялаймыз

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} \quad \text{немесе} \quad m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}.$$

Осыны келесідей түрлендіреміз

$$m \frac{dv}{dt} ds = \sum F_{k\tau} ds \Rightarrow m dv \frac{ds}{dt} = \sum dA_k \Rightarrow mvdv = \sum dA_k.$$

Осыдан теореманы дифференциалдық түрде аламыз

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k. \quad (1.29.9)$$

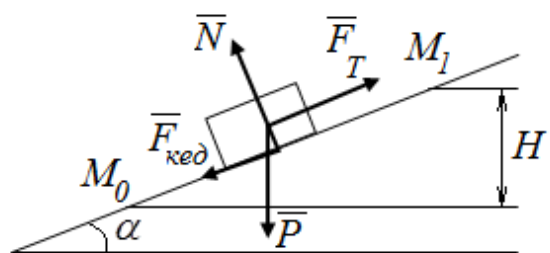
Оны былай айтамыз: материялық нүктенің кинетикалық энергиясының дифференциалы оған әсер ететін күштердің элементар жұмыстарының қосындысына тең.

(1.29.9) теңдігінің екі жағынан да M_0M_1 доғасы бойымен қисық сызықты интеграл алайық. Сонда материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы интегралдық түрде аламыз

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k. \quad (1.29.10)$$

Сонымен нүктенің қандай да бір орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі сол орын ауыстырудағы оған түсірілген күштер жұмыстарының қосындысына тең.

1.29.1-мысал. Салмағы $40000кН$ пойыз өрге қарай түзу сызықты, ілгерілемелі қозғалады



1.29.2 сурет

(1.29.2-сурет); $tg\alpha = 0,002$. Оның қозғалысына кедергі күші пойыз салмағының 1 кН -ның 3 Н -ын құрайды. 750 м жол жүргенде жылдамдығы 18 -ден 36 км/сағ дейін өзгереді. Локомотивтің тұрақты тарту күшін анықтау керек.

Шешуі: Пойыздың ілгері-лемелі қозғалысын материалдық нүктенің қозғалысы ретінде қарастырып, M_0M_1 орын ауыс-тыруында нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз. Осы орын ауыстыруда пойыздың жылдамдығы $v_0=18\text{ км/сағ}=5\text{ м/с}$ -тан $v_1=36\text{ км/сағ}=10\text{ м/с}$ -қа өседі.

Пойызға әсер ететін күштер: локомотивтің тарту күші \overline{F}_T , пойыздың салмақ күші \overline{P} , рельстің нормаль реакция күші \overline{N} және қозғалысына кедергі күші $\overline{F}_{кед}$, ал $F_{кед} = 0,003P$.

\overline{F}_T тарту күшінің $s=M_0M_1$ орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең $A_1 = F_T \cdot s$.

Пойыздың \overline{P} салмақ күшінің жұмысы, вертикаль H орын ауыстыруына байланысты және мынаған тең

$$A_2 = -P \cdot H = -P \cdot s \cdot \sin \alpha,$$

мұндағы α бұрышы өте аз болғандықтан $\sin \alpha \approx tg\alpha$ және

$$A_2 = -P \cdot s \cdot tg\alpha = -0,002 \cdot P \cdot s.$$

\overline{v} жылдамдығына перпендикуляр, рельстің реакция \overline{N} күшінің жұмысы нөлге тең.

Кедергі $\overline{F}_{кед}$ күшінің $s=M_0M_1$ орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең

$$A_3 = F_{кед} \cdot s \cdot \cos 180^\circ = -F_{кед} \cdot s = -0,003 \cdot P \cdot s.$$

Пойыздың $m = P/g$ массасының шамасын және барлық күштер жұмыстарының шамаларын (1.28.10) түріндегі теоремаға қоямыз

$$\frac{P}{2g} \cdot (v_1^2 - v_0^2) = F_T \cdot s - 0,003 \cdot P \cdot s - 0,002 \cdot P \cdot s.$$

Локомотивтің тарту күшінің шамасын табамыз

$$F_T = \left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2gs} + 0,005 \right) P = 404,1 \text{ кН}.$$

1.30 Механикалық жүйе. Жүйенің массалар центрі және инерция моменттері

Механикалық жүйе деп қозғалыстары өзара тәуелді болып келетін материялық нүктелер жиынтығын айтады. Егер қозғалыс кезінде жүйедегі нүктелердің бір-бірінен ара қашықтықтары өзгермей сақталатын болса, онда бұл жүйені өзгермейтін механикалық жүйе дейміз. Абсолют қатты дене өзгермейтін механикалық жүйе ретінде қарастырылады.

Жүйе динамикасында механикалық жүйе нүктелеріне әсер ететін барлық күштерді сыртқы және ішкі күштерге бөледі. Берілген механикалық жүйенің сыртқы күштері деп осы жүйе құрамына енбейтін денелерден әсер ететін күштерді айтамыз және оларды \bar{F}^e деп белгілейміз. Механикалық жүйе нүктелерінің арасында болатын өзара әсерлесу күштерін ішкі күштер дейміз және \bar{F}^i деп белгілейміз.

Ішкі күштер берілген жүйе нүктелерінің арасындағы өзара әсер етуші күштер болғандықтан оларға Ньютонның 3-ші заңын қолдана аламыз. Осыдан жүйенің қос-қостан алынған ішкі күштері шама жағынан тең, бір түзу бойымен бір-біріне қарама-қарсы бағытталған күштер жүйесінің бас векторы және кез келген центрге қатысты алынған бас моменті үнемі нөлге тең болады

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0, \quad \bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0. \quad (1.30.1)$$

Бұл ішкі күштердің маңызды қасиеттері болып табылады.

Механикалық жүйе массасы деп ондағы нүктелер массаларының қосындысына тең болатын шаманы айтамыз $M = \sum m_k$.

Механикалық жүйе массаларының центрі деп радиус векторы төмендегі формуламен анықталатын геометриялық нүктені (С-ны) айтамыз

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \quad (1.30.2)$$

Егер жүйе нүктелерінің координаттарын x_k, y_k, z_k деп алсақ, онда жүйе массалары центрі С-ның координаттары мынадай формулаларымен анықталады

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (1.30.3)$$

Біртекті гравитациялық өрісте жүйенің массалар центрі мен ауырлық центрі түйіседі.

Массалар центрінің жылдамдығы мен үдеуін (1.30.2) формуласынан уақыт бойынша туындылар арқылы табуға болады:

$$\bar{v}_C = \frac{\sum m_k \bar{v}_k}{M}, \quad \bar{a}_C = \frac{\sum m_k \bar{a}_k}{M}. \quad (1.30.4)$$

Механикалық жүйенің өске және нүктеге қатысты инерция моменттері келесі шамалар

$$J_l = \sum m_k h_k^2, \quad J_O = \sum m_k r_k^2. \quad (1.30.5)$$

Мұндағы h_k мен r_k – массасы m_k нүктесінің l өсіне дейінгі және O нүктесіне дейінгі қашықтықтары.

Декарт өстеріне және координаттар басына қатысты инерция моменттері

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (1.30.6)$$

Келесі тәуелдік орын алатынын дәлелдеуге болады

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O. \quad (1.30.7)$$

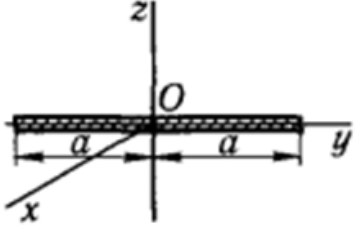
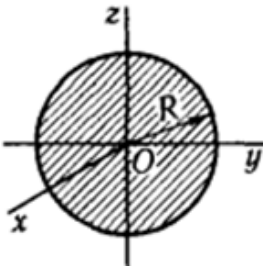
Гюйгенс-Штейнер теоремасы: жүйенің кейбір z өсіне қатысты J_z инерция моменті сол өске параллель, массалар центрінен өтетін zC өсіне қатысты жүйенің J_{zC} инерция моментінің және жүйенің M массасының өстердің d арақашықтығының квадратына көбейтіндісінің қосындысына тең

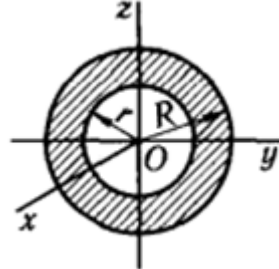
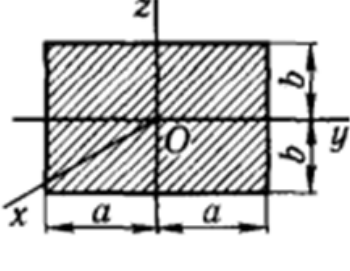
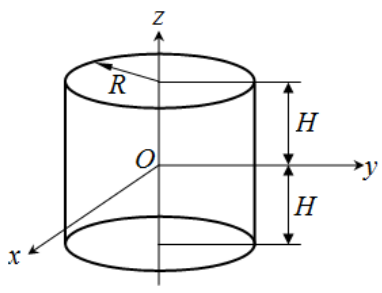
$$J_z = J_{zC} + Md^2. \quad (1.30.8)$$

Параллель өстер жиынтығы арасында массалар центрінен өтетін өске қатысты инерция моменті ең кіші болады.

Кейбір қатты денелердің инерция моменттері 1 кестеде келтірілген.

Кесте 1. Денелердің өстерге қатысты инерция моменттері

Біртекті жіңішке сырық		$J_x = J_z = \frac{ma^2}{3},$ $J_y = 0.$
Біртекті жұқа дөңгелек		$J_x = \frac{mR^2}{2},$ $J_y = J_z = \frac{mR^2}{4}.$

Біртекті жұқа сақина		$J_x = \frac{m(R^2 - r^2)}{2},$ $J_y = J_z = \frac{m(R^2 - r^2)}{4}.$
Біртекті жұқа тікбұрышты пластина		$J_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{3},$ $J_y = \frac{mb^2}{3}, J_z = \frac{ma^2}{3}.$
Біртекті тұтас цилиндр		$J_x = J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right),$ $J_z = \frac{mR^2}{2}.$

1.31 Механикалық жүйенің массалары центрінің қозғалысы туралы теорема

Қандайда инерциялық координаттар жүйесіне қатысты алынған n материялық нүктелерден тұратын механикалық жүйе қозғалысын қарастырайық. Осындағы массасы m_k -ға тең нүкте M_k -ны жекелеп алайық та, оған әсер ететін сыртқы күштер мен ішкі күштердің тең әсерлі күштері \vec{F}_k^e , \vec{F}_k^i және бұл нүктенің радиус-векторы \vec{r}_k болсын. M_k -нүктесінің қозғалыс теңдеуін вектор түрінде жаза аламыз

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.31.1)$$

Осы теңдеулердің барлығын бір-біріне қосайық, сонда алатынымыз

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i. \quad (1.31.2)$$

Мұнда ішкі күштер қосындысы үшін (1.30.1) формуласын және массалар центрі үдеуінің (1.30.4) формуласын қолданып, келесіні аламыз

$$M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e. \quad (1.31.3)$$

(1.31.3) теңдігі жүйенің массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы өрнектейді. Ол теорема былай айтылады: механикалық

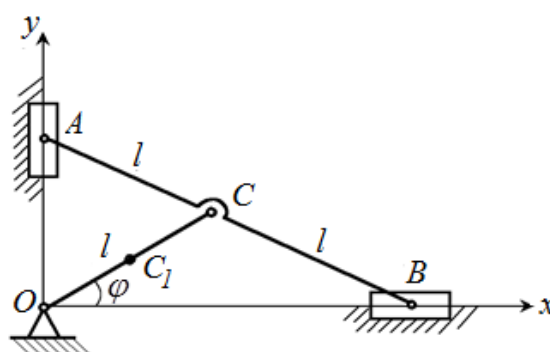
жүйенің массалар центрі, массасы жүйенің массасына тең және оған жүйенің барлық сыртқы күштері түсетін материялық нүкте сияқты қозғалады.

Жүйе массалары центрі қозғалысының сақталу заңы: егер жүйенің сыртқы күштерінің векторлық қосындысы нөлге тең болса, онда массалар центрі түзу сызық бойымен тұрақты жылдамдықпен қозғалады

$$\bar{v}_C = const. \quad (1.31.4)$$

1.31.1-мысал. Салмақтары \bar{Q} муфталар A және B -дан, салмағы \bar{P} иіңтірек OC және салмағы $2\bar{P}$ AB сызғышынан құрастырылған эллипсограф механизмінің массалар центрінің траекториясын анықтау керек (1.31.1-сурет).

Берілгені: $OC = AC = CB = l$. Сызғыш және иіңтірек біртекті, ал муфталарды массалы нүкте деп есептеу керек.



1.31.1-сурет

Шешуі: Координаттар өстерін қабылдаймыз. Жүйенің массалар центрі C^* -ның орнын анықтау үшін оның x_{C^*} , y_{C^*} координаттарын мынадай өрнектермен анықтау керек

$$x_{C^*} = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{M}, \quad y_{C^*} = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{M}.$$

Қарастырылып отырған жүйенің құрамында төрт дене бар: A және B муфталары, OC иіңтірегі және AB сызғышы, онда

$$x_{C^*} = \frac{Q \cdot x_1 + Q \cdot x_2 + P \cdot x_3 + 2 \cdot P \cdot x_4}{2 \cdot Q + 3 \cdot P},$$

$$y_{C^*} = \frac{Q \cdot y_1 + Q \cdot y_2 + P \cdot y_3 + 2 \cdot P \cdot y_4}{2 \cdot Q + 3 \cdot P}.$$

Суреттен көретініміз

$$x_1 = 0 \text{ (} A \text{ нүктесі)}, \quad x_2 = 2 \cdot l \cdot \cos \varphi \text{ (} B \text{ нүктесі)},$$

$$x_3 = \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi \text{ (} C_1 \text{ нүктесі)}, \quad x_4 = l \cdot \cos \varphi \text{ (} C \text{ нүктесі)},$$

$$y_1 = 2 \cdot l \cdot \sin \varphi, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi, \quad y_4 = l \cdot \sin \varphi.$$

Онда

$$x_{C^*} = \frac{2 \cdot Q \cdot l \cdot \cos \varphi + P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi + 2 \cdot P \cdot l \cdot \cos \varphi}{2 \cdot Q + 3 \cdot P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

$$y_{C^*} = \frac{2 \cdot Q \cdot l \cdot \sin \varphi + P \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot P \cdot l \cdot \sin \varphi}{2 \cdot Q + 3 \cdot P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

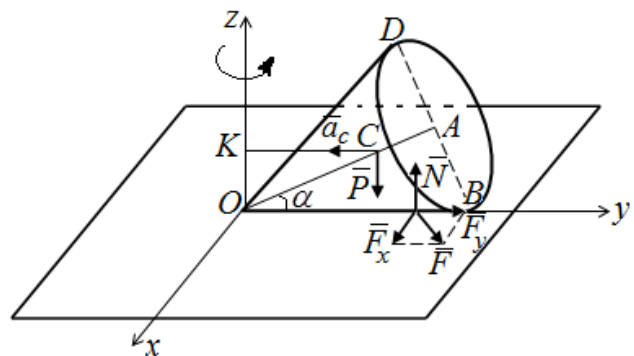
Массалар центрі траекториясын анықтау үшін осы теңдеулерден уақытқа тәуелді φ бұрышын аластаймыз. Ол үшін осы теңдеулердің екі жағын да квадраттап оларды қосамыз

$$x_{C^*}^2 + y_{C^*}^2 = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2}.$$

Сонымен, массалар центрінің траекториясы центрі O нүктесі және радиусы $r = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2}$ - ге тең шеңбер болады.

1.31.2-мысал. Біртекті конус көлденең жазықтықтың бетінде дөңгелеп қозғалады (1.31.2-сурет). Конустың O төбесі қозғалмайды, ал оның биіктігі OA вертикаль Oz осін бірқалыпты n жиілігімен айнала қозғалады. Конустың салмағы P , ал биіктігі h . Конустың биіктігі мен жасаушысының арасындағы бұрыш α . Жазықтық пен конустың арасындағы үйкеліс күшін анықтау керек.

Шешуі: Конустың массалар центрінің қозғалысын қарастырамыз. Конус біртекті болғандықтан, оның ауырлық центрі C биіктігі OA -ның бойында орналасқан және $OC = \frac{3}{4} \cdot h$. Есептің



1.31.2 сурет

берілгені бойынша ауырлық центрінің \bar{a}_C үдеуі Oz өсіне қарай, осы өске перпендикуляр CK бойымен бағытталады. \bar{a}_C үдеудің шамасы $a_c = \omega^2 \cdot CK$.

Мұнда $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, $CK = \frac{3}{4} \cdot h \cdot \cos \alpha$ теңдіктерін ескере отырып,

мына теңдікті аламыз $a_c = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{1200} \cdot h \cdot \cos \alpha$.

Конусқа түсірілген сыртқы күштер: тік бағытталған салмақ күші \bar{P} мен жазықтықтың нормаль реакциясы \bar{N} және көлденең жазықтықта орналасқан үйкеліс күші \bar{F} .

Массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы пайдаланып, мынадай векторлық теңдеуді құрамыз

$$\frac{P}{g} \cdot \bar{a}_C = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}.$$

Теңдіктің екі жағын координаттар осьтеріне проекциялаймыз

$$F_x = 0, \quad F_y = -\frac{P}{g} \cdot a_C, \quad N - P = 0.$$

Осыдан

$$N = P, \quad F = |F_y| = \frac{P}{g} \cdot a_C = \frac{P \cdot \pi^2 \cdot n^2}{g \cdot 1200} \cdot h \cdot \cos \alpha.$$

$F_x = 0$, ал $F_y < 0$ болғандықтан үйкеліс күші OB жасаушы бойымен O төбесіне қарай бағытталады.

1.31.3-мысал. Паром палубасындағы жүк жүкшығыр бойымен тұмсығынан құйрығына қарай (сол жаққа) қозғалады (1.31.3-сурет). Жүктің және паромның салмақтары \bar{p} және \bar{P} . Егер жүк палубаның бойымен s аралыққа орын ауыстыратын болса, онда паром қандай аралыққа және қай бағытта орын ауыстыратынын анықтау керек.

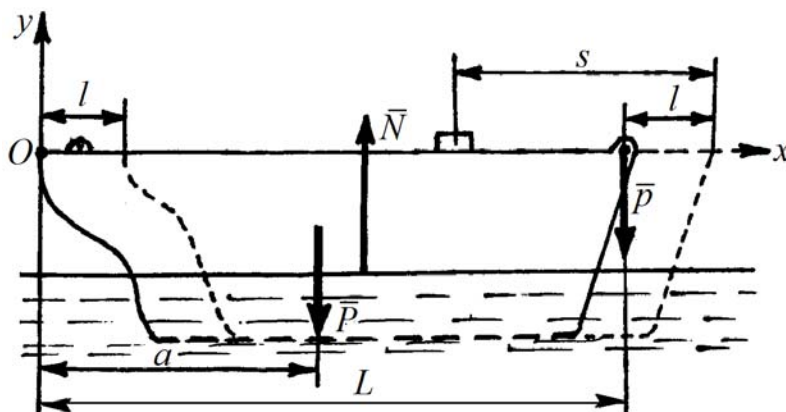
Шешуі: паром және жүкті бір жүйе ретінде қарастырамыз. Бұл жүйеге келесі сыртқы күштер түсірілген: паромның салмағы \bar{P} , жүктің салмағы \bar{p} , гидростатикалық су қысымы \bar{N} .

Барлық сыртқы күштердің горизонталь Ox өсіне проекциялары нөлге тең, сондықтан

$$a_{Cx} = 0 \Rightarrow v_{Cx} = const.$$

Бастапқы уақыт мезгілінде жүйе тыныштықта болғандықтан

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0. \text{ Осыдан } x_C = const.$$



1.31.3-сурет

Яғни қарастырып отырған жүйенің массалар центрі өзінің орнын өзгеріссіз сақтайды. Координаттың бас нүктесі ретінде жүйе қозғалып бастағанға дейінгі паромның құйрығындағы нүкте O -ны қабылдаймыз. Паромның ұзындығы L , оның ауырлық центрінің құйрығы арқылы жүргізілген вертикаль түзуге дейінгі ара қашықтығы a болсын. Паром оң жаққа қозғалады деп, оның орын ауыстыруын l арқылы белгілейік. Онда жүйенің бастапқы және соңғы орналасуындағы массалар центрі абсциссалары үшін келесі теңдіктер сәйкес келеді

$$x_c = \frac{p \cdot L + P \cdot a}{p + P}, \quad x_c = \frac{p \cdot (L + l - s) + P \cdot (a + l)}{p + P}.$$

Теңдіктердің оң жақтарын теңестіреміз

$$p \cdot L + P \cdot a = p \cdot (L + l - s) + P \cdot (a + l).$$

$$\text{Осыдан } l = s \frac{p}{p + P}.$$

Орын ауыстыру l шамасы паромның өлшеміне және ауырлық центрінің орнына байланыссыз екенін көреміз. l оң таңбамен болғандықтан паром оңға қарай, яғни жүк қозғалысы бағытына қарама-қарсы орын ауыстырады.

1.32 Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері деп, ондағы барлық материялық нүктелердің қозғалыс мөлшерлерінің векторлық қосындысына тең болатын \bar{Q} векторын айтамыз

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k. \quad (1.32.1)$$

Жүйенің массалар центрі жылдамдығының (1.29.4) формуласын қолданып, жүйенің қозғалыс мөлшері үшін келесі формуланы аламыз:

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C. \quad (1.32.2)$$

Жүйенің қозғалысы кезінде оның \bar{Q} қозғалыс мөлшері күштердің әсерінен уақыт өтуімен өзгеріп отырады. Жүйе массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы (1.31.3) қолданып, \bar{Q} векторы өзгеруінің жүйеге әсер етуші күштерге тәуелділігін аламыз

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e. \quad (1.32.3)$$

Теорема: механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған туынды жүйеге әсер етуші барлық сыртқы күштердің векторлық қосындысына тең.

Векторлық теңдеу (1.32.3) декарттық координаттар өстеріне проекциялаудан 3 скаляр теңдеу аламыз

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (1.32.4)$$

Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың (1.32.3) дифференциалдық өрнегінен оның интегралдық өрнегіне көшуге болады. Ол үшін векторлық теңдік (1.32.2)–дың екі жағында dt -ға көбейтіп, содан кейін оның екі жағынан да $t = t_0$ –ден $t = t_1$ -ге дейінгі аралықта интеграл алу керек

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e. \quad (1.32.5)$$

Бұл теңдіктермен берілетін теорема былай айтылады: жүйенің қозғалыс мөлшерінің қандай да бір уақыт аралығындағы өзгеруі, сыртқы күштердің сол уақыт аралығындағы импульстерінің векторлық қосындысына тең.

(1.32.5) үш скаляр теңдеуге эквивалентті

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (1.32.6)$$

Қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы. Егер механикалық жүйеге әсер ететін сыртқы күштерінің векторлық қосындысы нөлге тең болса, онда жүйенің қозғалыс мөлшері қозғалыс кезінде өзінің шамасы мен бағытын өзгертпей сақтайды

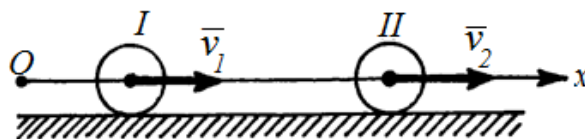
$$\bar{Q} = const = \bar{Q}_0, \quad (1.32.7)$$

мұндағы \bar{Q}_0 - жүйенің қозғалыс мөлшерінің бастапқы мәні.

1.32.1-мысал. Массалары $m_1=2\text{кг}$ және $m_2=3\text{кг}$ екі шар көлденең жазықтықтың бетінде дөңгелеп қозғалады (1.32.1-сурет). Шарлар біртекті және олардың диаметрлері тең. Шарлардың жылдамдықтары $v_1=10\text{м/с}$ және $v_2=5\text{м/с}$. Шарлардың соқтығысынан соң I-шар центрінің жылдамдығы 5м/с -ке тең болады, ал оның бағыты өзгермейді. Соқтығыстан соң II-шар центрі қандай жылдамдықпен қозғалатынын анықтау керек.

Шарлар мен жазықтықтың арасындағы үйкеліс есепке алынбайды.

Шешуі: Шарларды жүйе ретінде қарастырамыз. Бұл



1.32.1-сурет

жүйе үшін, соқтығыс кезіндегі шарлардың өзара әсер күштері ішкі күштер болады. Сыртқы күштердің Ox өсіне проекциялары нөлге тең, яғни, жүйенің қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы бойынша:

$$Q_x = \text{const} \text{ немесе } Q_x = Q_{x0},$$

мұндағы Q_{x0} және Q_x – соқтығысқа дейінгі және соқтығыстан кейінгі жүйе қозғалыс мөлшерінің Ox өсіне проекциялары.

I және II-шарлар центрлерінің соқтығыстан кейінгі жылдамдықтарын u_1 және u_2 деп белгілейміз. Сонда

$$Q_{x0} = m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x},$$

$$Q_x = m_1 \cdot u_{1x} + m_2 \cdot u_{2x}.$$

$v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$ және $u_{1x} = u_1$ теңдіктерін ескере отырып, алдыңғы екі теңдіктің екі жағын теңестіреміз

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_{2x}.$$

Осыдан

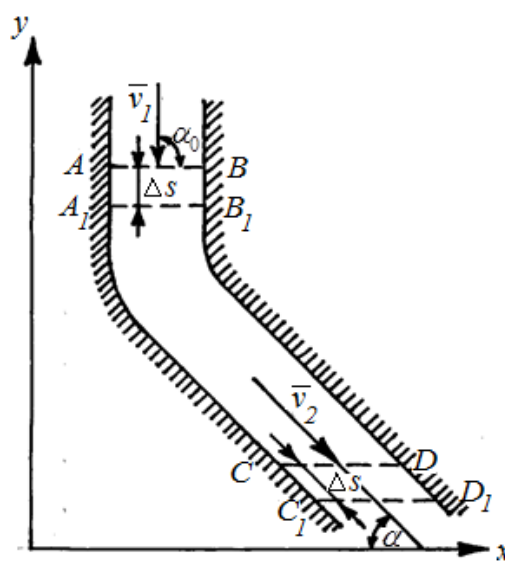
$$u_{2x} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot u_1}{m_2} = \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5}{3} = 8,33 \text{ м/с}.$$

$u_{2x} > 0$ болғандықтан II-шар қозғалысының бағыты өзгермейді.

1.32.2-мысал. Вертикаль жазықтыққа қатысты симметриялы $ABCD$ каналы бойымен сұйық $v=3 \text{ м/с}$ жылдамдықпен ағады (1.32.2-сурет). Канал көлденең қимасының ауданы тұрақты және $S=1 \text{ м}^2$ -қа тең. Сұйықтың түйіршігінің жылдамдық векторы каналға кірерде горизонтпен $\alpha_0 = 90^\circ$, ал каналдан шығарда горизонтпен $\alpha = 60^\circ$ бұрыш жасайды. Сұйықтың канал қабырғасына түсіретін қысым күшінің көлденең құраушысын анықтау керек.

Шешуі: Мәселені шешу үшін, жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз. Механикалық жүйе ретінде каналдың қабырғаларымен, AB және CD қималарымен шектелген, t уақыт сәтіндегі көлемді толтыратын сұйық түйіршіктерінің жүйесін қарастырамыз.

Қандай да Δt уақыт аралығында сұйық түйіршіктері орын ауыстырады және $A_1B_1C_1D_1$ көлемді толтырады. Механикалық жүйе-



1.32.2-сурет

енің қозғалыс мөлшері t уақыт мезгілінде \bar{Q}_1 , ал $t + \Delta t$ уақыт мезгілінде \bar{Q}_2 болады. Айырмасы $\Delta\bar{Q} = \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1$ жүйе қозғалыс мөлшерінің Δt уақыт аралығындағы өзгерісіне тең.

Қозғалыс мөлшері \bar{Q}_1 , ABA_1B_1 және A_1B_1CD көлемдерді толтыратын сұйық түйіршіктерінің \bar{Q}_{11} және \bar{Q}_{12} қозғалыс мөлшерінің қосындысына тең, яғни $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{12}$.

Дәл осы сияқты, CDC_1D_1 көлемді толтыратын сұйық түйіршіктерінің қозғалыс мөлшерін \bar{Q}_{22} деп белгілейміз, онда $\bar{Q}_2 = \bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{22}$.

Сұйықтың каналмен біркелкі қозғалысында Δt уақыт аралығында қозғалыс мөлшері \bar{Q}_{12} өзгермейді, яғни $\Delta\bar{Q} = \bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{11}$, немесе

$$\Delta\bar{Q} = \Delta m_2 \cdot \bar{v}_2 - \Delta m_1 \cdot \bar{v}_1, \quad (a)$$

мұндағы \bar{v}_1 және \bar{v}_2 сұйық түйіршіктерінің AB және CD қималарындағы сәйкес жылдамдықтары; Δm_1 және Δm_2 - ABA_1B_1 және CDC_1D_1 көлемдердегі сұйықтың массалары.

Есептің берілгені бойынша каналдың көлденең қималары тұрақты, сондықтан $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 = \bar{v}$.

Сұйықтың тығыздығын ρ , ал Δt уақыт аралығында сұйық түйіршіктерінің орын ауыстыруын Δs деп белгілейміз.

Каналдың кез келген екі қимасы арқылы бір уақыт мезгілінде бірдей сұйық ағып өтеді, сондықтан $\Delta m_2 = \Delta m_1 = \rho \cdot S \cdot \Delta s$.

(a) теңдігін көлденең Ox өсіне проекциялаймыз

$$\Delta Q_x = \Delta m_2 \cdot v_2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v \cdot \Delta s.$$

Теңдіктің екі жағын Δt -ға бөліп, туындының анықтамасын пайдалансақ, алатынымыз

$$\frac{dQ_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{S \cdot v^2}{2}. \quad (б)$$

Теорема бойынша

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x, \quad (в)$$

мұндағы R_x - жүйеге түсірілген сыртқы күштердің бас векторының Ox өсіне проекциясы.

(б) және (в) теңдіктерінің оң жақтарын теңестіру арқылы алатынымыз

$$R_x = \rho \frac{S \cdot v^2}{2}. \text{ Судың тығыздығы } \rho = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

$$\text{Онда } R_x = 1000 \cdot \frac{1 \cdot 3^2}{2} = 4500 \text{ Н}.$$

1.33 Механикалық жүйенің

кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Жүйе нүктелерінің O центріне қатысты алынған кинетикалық моменттерінің векторлық қосындысын механикалық жүйенің сол O центріне қатысты кинетикалық моменті деп атаймыз:

$$\bar{K}_O = \sum \bar{K}_{kO} = \sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k), \text{ немесе } \bar{K}_O = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (1.33.1)$$

Теорема. Қандай да бір қозғалмайтын центріне қатысты механикалық жүйенің кинетикалық моментінің уақыт бойынша алынған туындысы жүйедегі сыртқы күштердің сол центрге қатысты моменттерінің векторлық қосындысына тең

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{kO}^e. \quad (1.33.2)$$

(1.32.2) векторлық теңдіктен мынадай үш скаляр теңдік аламыз

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_{kx}^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum M_{ky}^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum M_{kz}^e. \quad (1.33.3)$$

Кинетикалық моменттің сақталу заңы. Егер сыртқы күштердің O центріне қатысты моменттерінің векторлық қосындысы нөлге тең болса, онда жүйенің сол нүктеге қатысты алынған кинетикалық моментінің шамасы да, бағыты да өзгермейді

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = const. \quad (1.33.4)$$

Тұрақты z өсіне қатысты айналатын денені қарастырайық. Дененің сол өске қатысты кинетикалық моменті келесідей өрнек-теледі

$$K_z = \sum M_z(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k v_k \cdot h_k = \sum m_k \omega \cdot h_k^2 = \omega \sum m_k h_k^2 = J_z \omega.$$

Мұнда m_k , v_k және h_k – дене нүктелерінің массалары, жылдамдықтары және айналу өсінен арақашықтықтары, ω – дененің бұрыштық жылдамдығы, J_z – дененің айналу z өсіне қатысты инерция моменті.

Дененің өске қатысты кинетикалық момент өрнегін (1.33.3) түріндегі теоремада пайдаланып, дененің айналу қозғалысының теңдеуін аламыз

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{kz}^e \quad \text{немесе} \quad J_z \varepsilon = \sum M_{kz}^e. \quad (1.33.5)$$

Алынған теңдеуді келесі түрде де қолдануға болады

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum M_{kz}^e \quad (1.33.6)$$

Бұл айналу қозғалысының дифференциалдық теңдеуі болып табылады.

1.33.1-мысал. Көлденең Oz өсті айнала қозғалатын радиусы r салмағы Q -ге тең шкивке арқан оралған. Арқанның соңына салмағы P -ға тең жүк ілінген. Шкивке тұрақты айналдырушы момент M түсірілген (1.33.1-сурет). Шкивті біртекті цилиндр ретінде қарастырып, көтерілетін жүктің a үдеуін табу керек.

Шешуі: Жүктің v жылдамдығына тең, шкивтің бетіндегі кез келген нүктенің жылдамдығын v' деп белгілеп, жүк және шкивтен құрылған механикалық жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моментін анықтаймыз

$$K_z = K_z^w + K_z^{жс} = J_z \omega + \frac{P}{g} v \cdot r,$$

мұндағы: $J_z = \frac{Q}{2 \cdot g} \cdot r^2$ – шкивтің Oz өсіне қатысты

инерция моменті;

$$\omega = \frac{v'}{r} = \frac{v}{r} \text{ – шкивтің бұрыштық жылдамдығы.}$$

Мәндерін орындарына қоямыз

$$K_z = \frac{Q}{2g} \cdot r^2 \cdot \frac{v}{r} + \frac{P}{g} v \cdot r = \frac{vr}{2g} \cdot (Q + 2P).$$

Жүйеге түсірілген сыртқы күштердің Oz өсіне қатысты моменттер қосындысы мына түрде анықталады

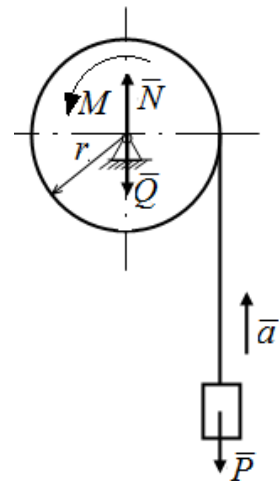
$$\sum M_{kz}^e = M - P \cdot r.$$

Механикалық жүйенің өске қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_{kz}^e,$$

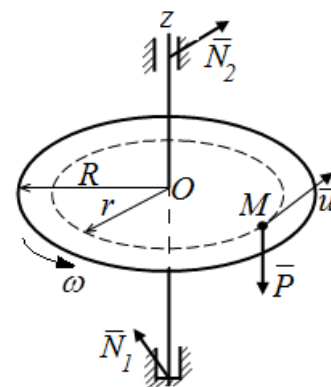
$$\frac{d}{dt} \left[\frac{vr}{2g} (Q + 2P) \right] = M - P \cdot r, \quad \frac{(Q + 2P) \cdot r}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} = M - P \cdot r,$$

мұндағы $\frac{dv}{dt} = a$, сондықтан $a = \frac{2g(M - Pr)}{r(Q + 2P)}$.



1.33.1-сурет

1.33.2-мысал. Радиусы R және салмағы Q біртекті диск болатын көлденең платформа, дискінің O центрі арқылы өтетін вертикаль Oz өсін айнала қозғалады (1.33.2-сурет). Платформаның үстінде Oz өсінен r қашықтықта салмағы P арба орналасқан. Платформаның ω бұрыштық жылдамдығын келесі берілгендер бойынша анықтау керек:



1.33.2-сурет

а) платформаның үстінде арба радиусы r шеңбер бойымен сағат тіліне қарама-қарсы тұрақты u салыстырмалы жылдамдығымен қозғалғанда (бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болады);

б) арбаның қозғалу шарты өзгермейді; платформа бастапқы уақыт мезгілінде сағат тіліне қарама-қарсы бағытта тұрақты ω_0 бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады (бастапқы уақыт мезгілінде арба платформамен бірге қозғалады);

в) арбаның қозғалу шарты өзгермейді, бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болады, Oz өсін айнала қозғалғанда пайда болатын шамасы тұрақты кедергі моменті $M_{кед}$ әсер етеді.

Арбаны материалдық нүкте ретінде қарастыру қажет.

Шешуі:

а) жағдайы. Платформа және арбадан тұратын жүйесінің қозғалысын қарастырамыз. Жүйеге келесі сыртқы күштер түсірілген: платформаның салмақ күші \bar{Q} , арбаның салмақ күші \bar{P} , байланыстардың реакция күштері \bar{N}_1 және \bar{N}_2 .

Oz өсіне қатысты барлық күштердің моменттері нөлге тең, себебі \bar{Q} және \bar{P} Oz өсіне параллель, ал \bar{N}_1 және \bar{N}_2 оны қиып өтеді. Есептің берілгені бойынша тіректегі үйкеліс моменттері нөлге тең.

Сонымен, жүйеге түсірілген сыртқы күштердің Oz өсіне қатысты моменттерінің қосындысы нөлге тең $\sum M_{kz}^e = 0$, яғни жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моментінің сақталуы туралы шарты бойынша $K_z = const$.

Бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болғандықтан, кинетикалық моменттің бастапқы шамасы нөлге тең $K_{z_0} = 0$. Сондықтан $K_z = 0$.

Жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моменті платформаның және арбаның сол өске қатысты кинетикалық моменттерінің қосындысына тең

$$K_z = K_z^{nn} + K_z^{ap} = J_z \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot v_a \cdot r,$$

мұндағы $J_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot R^2$ – платформаның Oz өсіне қатысты инерция моменті, ал v_a – арбаның абсолют жылдамдығы. Арба күрделі қозғалыс жасайды, платформамен бірге айналмалы тасымал қозғалыста, платформаға қатысты салыстырмалы қозғалыста болады. Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$.

Арбаның тасымал қозғалыстағы жылдамдығының модулі $v_e = \omega \cdot r$ -ге тең және MO радиусына перпендикуляр сағат тіліне қарама-қарсы платформаның айналу бағытымен бағытталады. Арбаның салыстырмалы жылдамдығы ($v_r = u$) шамасымен берілген және салыстырмалы қозғалысының траекториясы болатын радиусы r шеңберге жанама бойымен сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған. Сондықтан $v_a = \omega \cdot r + u$.

J_z , v_a мәндерін кинетикалық момент өрнегіне қойып және оның сақталу заңын ескере отырып алатынымыз

$$\frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = 0.$$

Осы теңдеуді шеше отырып платформаның бұрыштық жылдамдығын табамыз $\omega = -\frac{2 \cdot P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}$.

Бұрыштық жылдамдық теріс таңбамен шықты, яғни платформа сағат тіліне бағыттас айналады.

б) жағдайы. Бұл жағдайда мынадай кинетикалық моменттің Oz өсіне қатысты шарты орындалады $K_z = K_{z0}$, күштер сұлбасы өзгермейді, бірақ бастапқы кинетикалық момент келесі шамаға тең болады

$$K_{z0} = J_z \cdot \omega_0 + \frac{P}{g} \cdot \omega_0 \cdot r^2.$$

а) жағдайындағы айтылғандарды ескере отырып алатынымыз

$$\frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = \frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega_0 + \frac{P}{g} \cdot \omega_0 \cdot r^2$$

немесе $\omega \cdot \frac{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}{2g} + \frac{P \cdot u \cdot r}{g} = \omega_0 \cdot \frac{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}{2g}$.

$$\text{Осыдан } \omega = \omega_0 - \frac{2P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Сонымен, арба қозғалып бастағаннан кейін платформаның бұрыштық жылдамдығы өзгереді. Егер $\omega_0 > \frac{2 \cdot P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}$ болса, онда $\omega > 0$ және платформа сағат тіліне қарсы бағытта айнала қозғалады. Егер $\omega_0 < \frac{2 \cdot P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}$ болса, онда платформа сағат тілімен бағыттас айналады.

в) жағдайы. Жүйенің өске қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема келесі түрде жазылады

$$\frac{dK_z}{dt} = -M_{\text{кед}}.$$

Осы теңдеуді dt -ға көбейтіп $[0, t]$ уақыт аралығында интегралдаймыз. Кедергі момент тұрақты деп есептейміз. Сонда аламыз: $K_z - K_{z0} = -M_{\text{кед}} \cdot t$.

Бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болғандықтан, $K_{z0} = 0$. Сондықтан $K_z = -M_{\text{кед}} \cdot t$.

а) жағдайындағы айтылғандарды және u , ω бағыттарын ескере отырып алатынымыз

$$K_z = \frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = -M_{\text{кед}} \cdot t,$$

осыдан

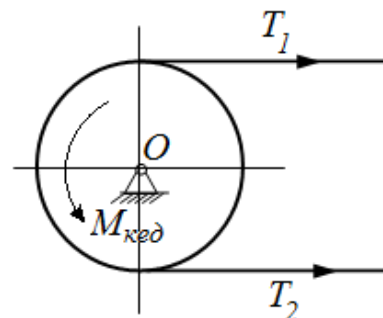
$$\omega = -\frac{2P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2} - \frac{2M_{\text{кед}} \cdot t \cdot g}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Сонымен, платформа а) жағдайдағыдай, сағат тіліне қарсы емес, сағат тілімен бағыттас айналады. Сондықтан, $M_{\text{кед}}$ кедергі моментінің бағыты сағат тіліне қарама-қарсы болады, яғни теңдіктің оң жағындағы екінші мүшенің таңбасын өзгертеміз

$$\omega = \frac{2M_{\text{кед}} \cdot t \cdot g}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2} - \frac{2P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Алынған қорытындыға талдау жүргізетін болсақ, онда платформа уақытқа бірмәнді кемімелі бұрыштық жылдамдықпен айналатынын және $t = \frac{P \cdot r \cdot u}{M_{кед} \cdot g}$ уақыт мезгілінде тоқтайтынын көреміз.

1.33.3-мысал. Салмағы P , радиусы r шкивті айналмалы қозғалысқа келтіретін белдіктің тартылыс күштері T_1 және T_2 (1.33.3-сурет).



1.33.3-сурет

Бұрыштық үдеуі ε ($\varepsilon > 0$) тұрақты болатын шкивке түсірілген $M_{кед}$ кедергі моментін анықтау керек. Шкив - біртекті дөңгелек диск.

Шешуі: Шкивтің Oz өсін айнала қозғалысының теңдеуін құрамыз

$$J_z \varepsilon = T_1 \cdot r - T_2 \cdot r - M_{кед},$$

мұндағы $J_z = \frac{P}{2g} \cdot r^2$ – шкивтің айналу осіне қатысты инерция моменті.

$$\text{Осыдан } M_{кед} = (T_1 - T_2)r - \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon.$$

1.33.4-мысал. Тегершіктің бетіндегі нүктенің v жылдамдығына пропорционал, тежеуші момент M_1 пайда болатын, тегершікті тез тоқтату үшін электрлік тежеуші қолданылады $M_1 = k \cdot v$, мұндағы k – тұрақты коэффициент. Мойынтіректерде пайда болатын үйкеліс күш моменті M_2 тұрақты деп есептеуге болады; тегершіктің диаметрі D , оның айналу осіне қатысты инерция моменті J_z . Тегершіктің бастапқы бұрыштық жылдамдығы ω_0 . Тегершіктің қандай T уақыт аралығында тоқтайтынын анықтау керек.

Шешуі: Тегершіктің өсті айнала қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрамыз

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = -M_1 - M_2 = -k \cdot v - M_2.$$

Мұнда $v = \frac{D}{2} \cdot \omega$ болатынын ескеріп, аламыз

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = -k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega - M_2.$$

Айнымалыларды айыра отырып, алатынымыз

$$dt = -\frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega}.$$

0-ден T -ға және ω_0 -ден $\omega = 0$ -ге дейінгі шектерде интегралдаймыз

$$\int_0^T dt = -\int_{\omega_0}^0 \frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega} = \int_0^{\omega_0} \frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega}.$$

$$\text{Осыдан } T = J_z \cdot \frac{2}{k \cdot D} \cdot \ln\left(M_2 + \frac{k \cdot D}{2} \cdot \omega_0\right).$$

1.34 Механикалық жүйенің

кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы деп ондағы барлық материялық нүктелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең скаляр шаманы айтамыз.

n материялық нүктеден тұратын механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы осылардын арифметикалық қосындысына тең

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2. \quad (1.34.1)$$

Қатты дененің кинетикалық энергиясы оның қозғалысына байланысты есептеледі.

а) Ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы

$$T = \frac{1}{2} M v^2. \quad (1.34.2)$$

б) Тұрақты өсті айнала қозғалатын қатты дененің кинетикалық энергиясы

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (1.34.3)$$

Мұнда J_z - дененің айналу өсіне қатысты инерция моменті.

в) Жазық-параллель қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясын анықтағанда, оның қозғалысын массалар центрімен бірге ілгерілемелі қозғалыс және массалар центрі төңірегіндегі, ω лездік бұрыштық жылдамдықпен орындалатын, лездік айналыстан тұрады деп есептеуге болады. Сондықтан

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2. \quad (1.34.4)$$

Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының дифференциалы жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің элементарлық жұмыстарының қосындысына тең болады

$$dT = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i. \quad (1.34.5)$$

Жүйенің алғашқы орналасу жағдайына сәйкес кинетикалық энергиясын T_0 деп, ал оның ақырғы жағдайындағы кинетикалық энергиясын T деп белгілеп, (1.34.5) теңдігінің екі жағынан да жүйенің осы екі орналасу аралығында сәйкес шектерде интеграл аламыз

$$T - T_0 = \sum_{M_0}^M \int d'A_k^e + \sum_{M_0}^M \int d'A_k^i \quad \text{немесе}$$

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (1.34.6)$$

Теорема бұл түрінде былай айтылады: механикалық жүйенің бір орналасу жағдайынан екінші бір орналасу жағдайына көшу кезінде орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің сол орын ауыстыруындағы жұмыстарының қосындысына тең.

Механикалық жүйе тек ғана абсолют қатты денелерден және созылмайтын жіптерден тұратын болса, онда ішкі күштер жұмыстарының қосындысы нөлге тең: $\sum A_k^i = 0$.

Тұрақты өсті айналатын денегі түсірілген сыртқы күштің жұмысы келесі формуламен анықталатынын көрсетуге болады

$$A(\bar{F}^e) = M_z(\bar{F}^e) \cdot \varphi. \quad (1.34.7)$$

Мұндағы $M_z(\bar{F}^e)$ - күштің айналу өсіне қатысты моменті, φ - дененің айналу бұрышы.

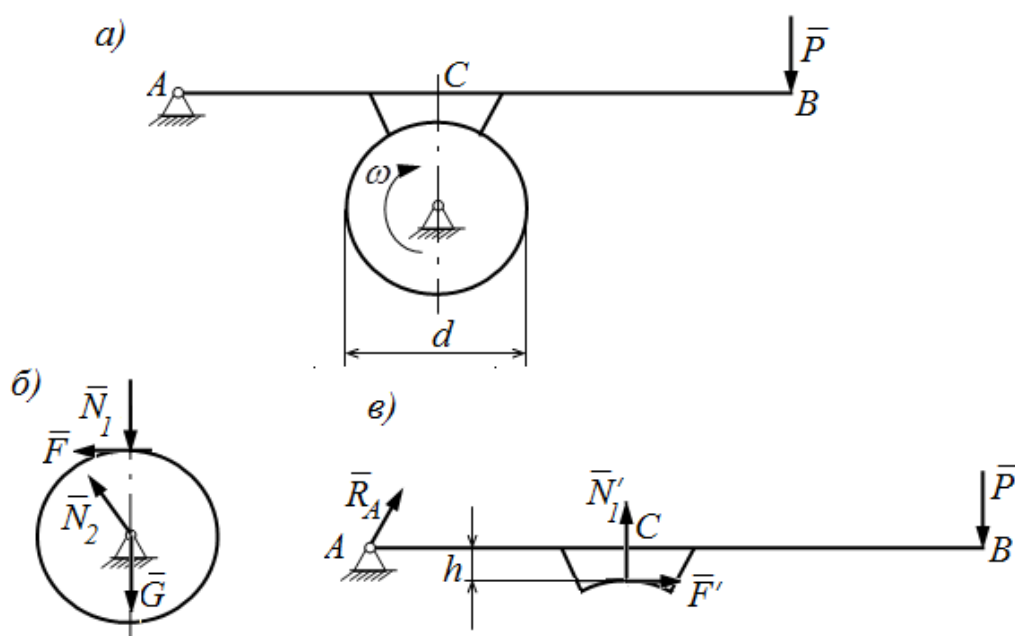
1.34.1-мысал. Электр қозғаушының роторы $n_0 = 1800$ айн/мин айналу жиілігімен айнала қозғалады, диаметрі $d = 50$ см. Иіңтірек AB мен C негізінен тұратын тежеуші оны қосқаннан кейін жұмыс істеп бастайды (1.34.1, а-сурет). Ротор мен негіздің арасындағы үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$, ара қашықтық $AC = 1/4 \cdot AB$. Иіңтірек соңына $P = 50$ Н күш түсірілген. Қозғаушының айналатын бөлшектерінің салмағы $G = 400$ Н, айналу өсіне қатысты инерция радиусы $\rho = 25$ см. Негіз C -ның өлшемі, иіңтіректің салмағы және тіректердегі

үйкеліс есепке алынбайды. Қозғаушының қанша айналым жасап тоқтайтынын анықтау керек.

Шешуі: Жүйені екі бөлікке жіктеп, оларға түсірілген сыртқы күштерді көрсетеміз (1.34.1,б және 1.34.1,в-суреттер). Әсер және қарсы әсер заңы бойынша $F = F'$, $N_1 = N'_1$ және олардың бағыттары қарама-қарсы екенің ескереміз.

Қозғауыш кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз $T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e$.

Соңғы кинетикалық энергия $T = 0$, ал бастапқы кинетикалық энергия $T_0 = \frac{1}{2} \cdot J_z \cdot \omega_0^2$. Мұнда $J_z = m\rho^2 = \frac{G}{g}\rho^2$, $\omega_0 = \frac{\pi n_0}{30}$.



1.34.1-сурет

Қозғаушы роторына түсірілген күштердің ішінде тек \bar{F} үйкеліс күші жұмыс жасайды

$$A(\bar{F}) = -F \cdot \frac{d}{2} \cdot \varphi = -f \cdot N_1 \cdot \frac{d}{2} \cdot \varphi.$$

Иінтіректің N_1 реакция күшін анықтау үшін, иінтірекке түсірілген күштердің A нүктеге қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = -P \cdot AB + N'_1 \cdot AC + F' \cdot h = 0, \quad (a)$$

мұндағы h – тежеуші негізінің биіктігі.

Егер тежеуші негізінің биіктігін есепке алмасақ $h = 0$, онда (а)-теңдеуінен алатынымыз

$$N'_1 = \frac{P \cdot AB}{AC} = \frac{4P \cdot AB}{AB} = 4P.$$

Әсер және қарсы әсер заңы бойынша $N_1 = N'_1 = 4 \cdot P$.

Онда теорема осылай жазылады: $-\frac{1}{2} J_z \omega_0^2 = -f \cdot 4P \cdot \frac{d}{2} \cdot \varphi$.

Мұндағы айналу бұрышы айналым санына тәуелді: $\varphi = 2\pi n$.

Алдыңғы теңдікті мынадай түрге келтіреміз

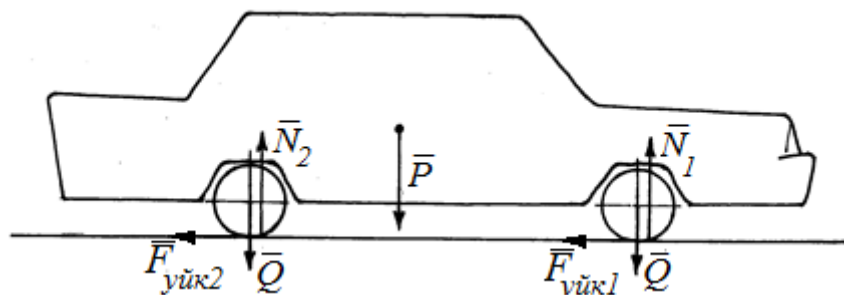
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \rho^2 \left(\frac{\pi n_0}{30} \right)^2 = 4fP \cdot \frac{d}{2} \cdot 2\pi n.$$

Осыдан

$$n = \frac{G \cdot \rho^2 \cdot \pi \cdot n_0^2}{8f \cdot g \cdot P \cdot d \cdot 30^2} = \frac{400 \cdot 0,25^2 \cdot 3,14 \cdot 1800^2}{8 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \cdot 50 \cdot 0,5 \cdot 30^2} = 720 \text{ айн.}$$

1.34.2-мысал. Егер автомобильдің моторын сөндірген уақыт мезгілінде жылдамдығы v - ға тең болса, онда түзу жолдың бойында қандай s жолын жүріп тоқтайды?

Жүргізуші және жолаушыларды бірге есептегенде автомобиль қорабының салмағы P , төрт дөңгелек әр қайсысының салмағы Q , радиусы r және массалар центрі арқылы өтетін өске қатысты инерция радиусы ρ . Дөңгелектер сырғанамай домалайды, домалау үйкеліс коэффициенті δ . Ауаның кедергі күшін және қораптың вертикаль орын ауыстыруын есепке алмаймыз (1.34.2-сурет).



1.34.2-сурет

Шешуі: Жүргізуші және жолаушылармен бірге автомобильді механикалық жүйе ретінде қарастырамыз. Мотор сөндірілген соң оның жұмысы нөлге тең болады, жүйедегі барлық ішкі күштер жұмыстарының қосындысы да нөлге тең.

Сондықтан $T - T_0 = \sum A_k^e$.

Соңғы кинетикалық энергия $T = 0$, яғни

$$-T_0 = \sum A_k^e. \quad (a)$$

Бастапқы кинетикалық энергия қорап пен дөңгелектердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең:

$$T_0 = T^\kappa + 4 \cdot T^\circ.$$

Қораптың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясы $T^\kappa = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$, әр дөңгелектің жазық параллель қозғалысының

кинетикалық энергиясы $T^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{Cz} \cdot \omega^2$.

Мұндағы дөңгелектің массалар центрінің жылдамдығы $v_C = v$, дөңгелектің массалар центрі C арқылы өтетін өске қатысты инерция моменті $J_{Cz} = \frac{Q}{g} \cdot \rho^2$.

Дөңгелек сырғанамай домалаған кезде оның лездік жылдамдықтар центрі дөңгелек пен жолдың жанасу нүктесінде орналасады.

Сонда $v_C = \omega \cdot r$ және $\omega = \frac{v_C}{r} = \frac{v}{r}$.

v_C , J_{Cz} , ω өрнектерін T° өрнегіне қоямыз

$$T^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot \rho^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{Q \cdot v^2}{2g} \cdot \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Сонымен жүйенің бастапқы кинетикалық энергиясы

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{Q \cdot v^2}{g} \cdot \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) = \frac{v^2}{2g} \cdot \left[P + 4Q \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \right]. \quad (б)$$

Жүйеге түсірілген сыртқы күштер: салмақ күштері \bar{P} және \bar{Q} , жолдың нормаль реакциялары \bar{N}_1 және \bar{N}_2 , дөңгелек пен жолдың арасындағы үйкеліс күштері $\bar{F}_{үйк1}$ және $\bar{F}_{үйк2}$, олардың бағыттары мотор сөндірілген жағдайда қозғалысқа қарама-қарсы. Мұнда \bar{N}_1 және \bar{N}_2 реакция күштері дөңгелек центрінен өтетін вертикаль түзуден δ қашықтығында өтеді. Егер оларды дөңгелек центрінен өтетін вертикальда орналасқан нүктеге көшірсек, онда дөңгелектер

домалауларына кедергі жасайтын моменттерді ескеру керек $M_{ке\delta 1} = -\delta \cdot N_1$ және $M_{ке\delta 2} = -\delta \cdot N_2$

Жүйеге түсірілген барлық сыртқы күштердің s орын ауыстырғандағы жұмыстарының қосындысы мынадай өрнекпен анықталады

$$\sum A_k^e = A(\bar{P}) + 4 \cdot A(\bar{Q}) + 2 \cdot A(\bar{N}_1) + 2 \cdot A(\bar{N}_2) + 2 \cdot A(\bar{F}_{y\ddot{u}k1}) + 2 \cdot A(\bar{F}_{y\ddot{u}k2}) + 2 \cdot A(M_{ке\delta 1}) + 2 \cdot A(M_{ке\delta 2}). \quad (6)$$

Есептің шарты бойынша қорап пен дөңгелектер вертикаль орын ауыстырмайды, сондықтан $A(\bar{P}) = 0$, $A(\bar{Q}) = 0$.

Әр дөңгелекке түсірілген нормаль реакция күші және үйкеліс күші дөңгелек жолмен жанасу нүктесінде түсіріледі. Дөңгелектер сырғанаусыз домалайтын жағдайда жанасу нүктесінің жылдамдығы нөлге тең, сонда әр күштің қуаты нөлге тең болады, яғни күштер жұмыстары да нөлге тең болады:

$$A(\bar{N}_1) = A(\bar{N}_2) = 0, \quad A(\bar{F}_{y\ddot{u}k1}) = A(\bar{F}_{y\ddot{u}k2}) = 0.$$

Дөңгелектер домалауларына кедергі жасайтын моменттердің жұмыстары:

$$A(M_{ке\delta 1}) = -M_{ке\delta 1} \cdot \varphi_1 = -\delta \cdot N_1 \cdot \varphi_1,$$

$$A(M_{ке\delta 2}) = -M_{ке\delta 2} \cdot \varphi_2 = -\delta \cdot N_2 \cdot \varphi_2.$$

Мұндағы дөңгелектердің айналу бұрыштарын табу үшін алдымен бұрыштық жылдамдардың формуласын қолданамыз:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_C}{r}, \quad \text{осыны } dt\text{-ға көбейтеміз } \omega_1 dt = \omega_2 dt = \frac{v_C \cdot dt}{r}, \quad \text{сонда}$$

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 = \frac{ds}{r}, \quad \text{интегралдап айналу бұрышын жол арқылы таба ала-$$

$$\text{мыз } \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{s}{r}.$$

Онда кедергі моменттер жұмыстарының қосындысы келесідей анықталады

$$2 \cdot A(M_{ке\delta 1}) + 2 \cdot A(M_{ке\delta 2}) = -\delta(2N_1 + 2N_2) \cdot \frac{s}{r} = -\delta \cdot N \cdot \frac{s}{r}.$$

Мұндағы нормаль реакция күштерінің қосындысы N автомобильдің жалпы салмағына тең: $N = P + 4Q$.

Осыны ескере отырып, (6) формуласынан сыртқы күштер жұмыстарының қосындысын аламыз:

$$\sum A_k^e = -\delta(P + 4Q)\frac{s}{r}. \quad (2)$$

Енді (б) мен (2) өрнектерін (а) теңдігіне қойып, s - ке қатысты шешеміз:

$$s = \frac{rv^2 \left[P + 4Q \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right]}{2g\delta(P + 4Q)}.$$

Келесі сан мәндерін алайық $P = 9810 \text{ Н}$, $Q = 196 \text{ Н}$, $r = 25 \text{ см}$, $\rho = 20 \text{ см}$, $\delta = 0,1 \text{ см}$, $v = 72 \text{ км/сағ} = 20 \text{ м/с}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, сонда автомобильдің тоқтағанша дейін жүрген жолы

$$s = \frac{0,25 \cdot 20^2 \left[9810 + 4 \cdot 196 \cdot \left(1 + \frac{0,2^2}{0,25^2} \right) \right]}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,001 \cdot (9810 + 4 \cdot 196)} = 53,4 \text{ м}.$$

1.35 Даламбер принципі

Механикалық жүйенің нүктелеріне түсірілген инерция күштерін $\bar{R}^{ин}$ бас векторға және $\bar{M}_O^{ин}$ бас моментке келтіруге болады (O нүктесі - келтіру центрі). Механикалық жүйе үшін Даламбер принципі былай айтылады: қозғалыста болатын механикалық жүйені инерция күштерінің $\bar{R}^{ин}$ бас векторын және $\bar{M}_O^{ин}$ бас моментін қосу арқылы механикалық жүйені тыныштықта болатын жүйе ретінде қарастыруға болады. Механикалық жүйенің немесе дененің кез келген қозғалысында инерция күштерінің бас векторы $\bar{R}^{ин} = -M \bar{a}_C$. Инерция күштерінің бас моментін есептеуі дене қозғалысының түріне байланысты жүргізіледі. Дербес жағдайларды қарастырайық:

1) абсолют қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы жағдайында келтіру центрі ретінде массалар центрі алынады, сонда $\bar{M}_C^{ин} = 0$;

2) материалды симметриялық жазықтығы (мысалы, xu жазықтығы) бар абсолют қатты дене z осі төңірегінде айналатын болса, келтіру центрі ретінде симметриялық жазықтығы мен айналу осінің қиылысу нүктесі алынады, сонда инерция күштерінің бас моменті айналу осі бойымен бағытталады және $\bar{M}_O^{ин} = -J_z \bar{\varepsilon}$ формуласымен анықталады. Мұндағы J_z - дененің z осіне қатысты инерция моменті, $\bar{\varepsilon}$ - дененің бұрыштық үдеу векторы;

3) материалды симметриялық жазықтығы (мысалы, Oxy жазықтығы) бар абсолют қатты дене Oxy жазықтығында жазық-параллель қозғалыста болса, келтіру центрі ретінде дененің массалар центрі C нүктесі алынады, сонда инерция күштерінің бас моменті симметриялық жазықтығына перпендикуляр болады және $\bar{M}_C^{ин} = -J_{Cz} \bar{\varepsilon}$ формуласымен анықталады. Мұндағы J_{Cz} - дененің Cz осіне қатысты инерция моменті болып келеді, $\bar{\varepsilon}$ - бұрыштық үдеу векторы.

1.35.1-мысал. Салмағы P жүк ауырлық күш әсерінен төмен қозғалып, салмағы ескерілмейтін жіп арқылы блокты айналу қозғалысына келтіреді. Блоктың айналу осіне қатысты инерция моменті J , радиусы r (1.35.1,а-сурет). Жүктің үдеуін табу керек.

Шешуі: Жүйеге түсірілген сыртқы күштерді көрсетеміз: ауырлық күштерді \bar{P} , \bar{Q} және топсаның реакцияларын

\bar{X}_O, \bar{Y}_O (1.35.1,б-сурет). Жүк илгерілемелі қозғалыста, оның инерция күші $F^{ин} = -\frac{P}{g}a$, бағыты үдеуге қарама-қарсы бағытталады. Блок

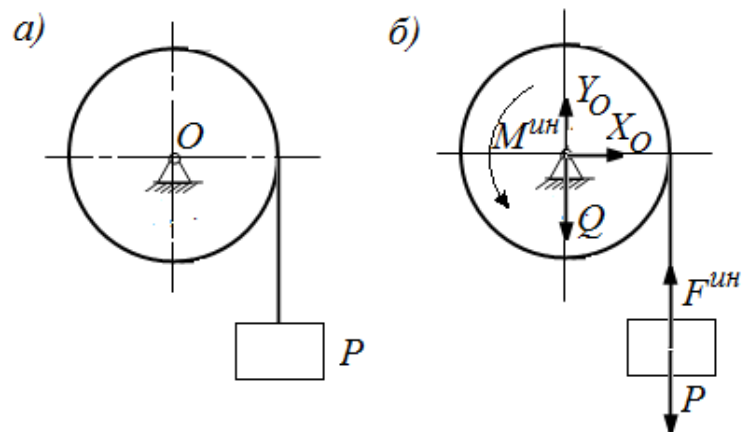
тұрақты осьті айналады, оның материалдық симметриялығы бар, сондықтан блок нүктелерінің инерция күштері бас инерция моментіне келтіріледі, момент модулі $M^{ин} = J\varepsilon = J\frac{a}{r}$ және бағыты айналу бағытына қарама-қарсы. Даламбер принципі бойынша осы күштер жүйесі тепе-теңдікте болады, оған O нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құруға болады

$$P \cdot r - F^{ин} \cdot r - M^{ин} = 0.$$

Мұндағы инерция күші мен инерция бас моментінің формулдарын пайдаланып, келесіні аламыз

$$P \cdot r - \frac{P}{g}a \cdot r - J\frac{a}{r} = 0$$

Осыдан жүк үдеуін анықтаймыз



1.35.1-сурет

$$a = \frac{P}{P + Jg / r^2} g.$$

1.36 «Динамика» тақырыбы бойынша есептер

1.36.1-есеп. Пойыз массасы локомотивті санамағанда $2 \cdot 10^5 \text{ кг}$ тең. Горизонталь жолмен тең үдемелі қозғалып, қозғалыс басталуынан 60 с өткенде, пойыз 15 м/с тең жылдамдыққа ие болды. Үйкеліс күші поезд салмағынан $0,005$ бөлігін құрайды. Локомотив пен пойыз арасындағы күшті анықтау керек.

Жауабы: 59800 Н .

1.36.2-есеп. Массасы $M=600 \text{ кг}$ жүк блок көмегімен көлбеу жазықтық үстімен көтерілуде. Жүк пен жазықтық арасындағы үйкеліс күш коэффициенті $f=0,2$. Радиусы $0,2 \text{ м}$ блок $\varphi=0,4 \text{ т}^3$ заңы бойынша айналады (φ радианмен өлшенеді). Арқанның тартылыс күшін уақыт функциясы түрінде анықтау керек.

Жауабы: $(5,68 + 0,288t) \text{ кН}$.

1.36.3-есеп. Массасы 50 кг дене жіпке ілінген. Жіптің жоғарғы шеті тең үдемелі жоғары қозғалып, $t=2 \text{ с}$ ішінде 5 м жол жүреді. Жіптің тартылыс күшін анықтау керек.

Жауабы: 615 Н .

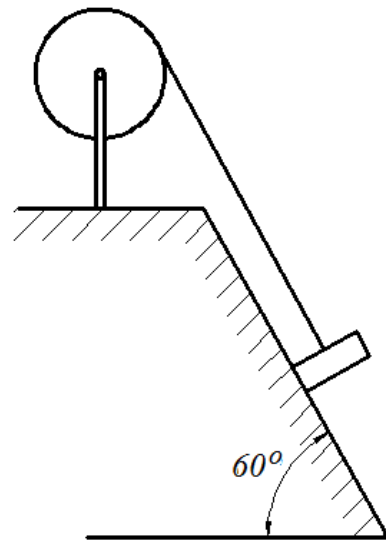
1.36.4-есеп. Массасы $0,2 \text{ кг}$ дене ұзындығы 1 м жіп шетіне ілінген. Денені түртіп жібергенде, ол 5 м/с тең горизонталь жылдамдығына ие болды. Жіптің тартылыс күшін түрткі соңында анықтау керек.

Жауабы: $6,96 \text{ Н}$.

1.36.5-есеп. Массасы 1000 кг автомобиль дөңес көпір үстінде тұрақты 10 м/с жылдамдығымен қозғалуда. Көпір ортасындағы қисықтық радиусы $\rho=50 \text{ м}$. Автомобиль көпір ортасын өткенде оның көпірге түсірген қысымын анықтау керек.

Жауабы: 7800 Н .

1.36.6-есеп. Массасы m материялық нүкте $F=F_0 \cos \omega t$ күш әсерінен түзу сызық бойымен қозғалады (F_0, ω – тұрақты шамалар). Бастапқы уақыт мезгілінде нүктенің жылдамдығы v_0 . Нүктенің қозғалыс теңдеуін анықтау керек.



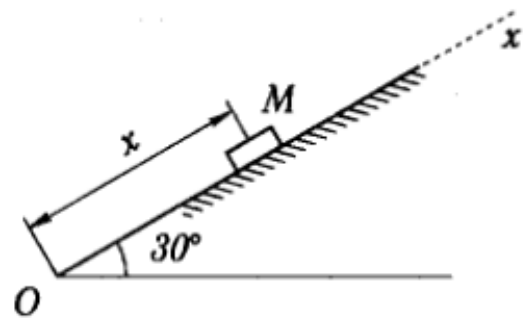
1.36.2-есепке сурет

Жауабы: $x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t) + v_0 t$.

1.36.7-есеп. Массасы 2кг дене вертикаль жоғары 20м/с жылдамдығымен лақтырылып жіберілді. Денеге әсер ететін ауаның кедергі күші дене жылдамдығына пропорционалды және $v\text{ м/с}$ жылдамдығы үшін $0,4v\text{ Н}$ тең. Дене ең жоғарғы орнына жететін уақыт мезгілін анықтау керек.

Жауабы: $1,71\text{с}$.

1.36.8-есеп. Массы $m=100\text{кг}$ дене көлбеу жазықтық бойымен жоғары қарай бағытталған айнымалы $F=120(6+t)\text{ Н}$ күш әсерінен қозғалады. Сырғанау үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Қозғалыс тыныштық күйден басталғанын ескеріп, $t=3\text{с}$ уақыт мезгілінде дененің жылдамдығын анықтау керек.



1.36.8-есепке сурет

Жауабы: $9,75\text{м/с}$.

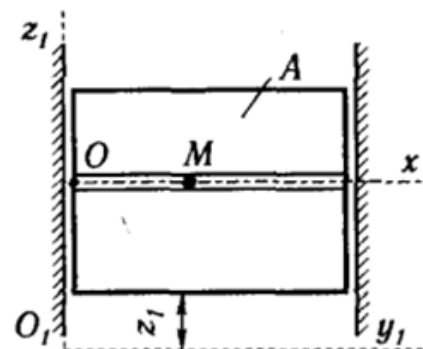
1.36.9-есеп. Массасы m материялық нүкте xOy горизонталь жазықтығында координат басынан қағажыту $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$ күші әсерінен қозғалады (\vec{r} - нүктенің радиус-векторы). Нүктенің бастапқы орны $M_0(a, 0)$, бастапқы жылдамдығы v_0 тең және y осіне параллель. Нүктенің траекториясын анықтау керек.

Жауабы: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ (гипербола).

1.36.10-есеп. Массасы $0,5\text{кг}$ материялық нүкте вертикаль жоғары бағытталған $v_0=6\text{м/с}$ бастапқы жылдамдығына ие болып қозғалады. Ауаның кедергі күші $R=0,002gv^2$ (өлшем бірліктері: жылдамдық - м/с , еркін түсу үдеуі - м/с^2 , күш - Н). Нүктенің қандай биіктікке көтерілетінін анықтау керек.

Жауабы: $1,72\text{ м}$.

1.36.11-есеп. A денесі $z=2t^2\text{ м}$ тендеуі бойынша вертикаль жоғары қозғалады. Дене үстіндегі құбырда орналасқан M шаригі оң жаққа қарай бағытталған 3 м/с тең бастапқы жылдамдығына ие болып қозғалады. Шарик пен құбыр арасындағы сырғанау



1.36.11-есепке сурет

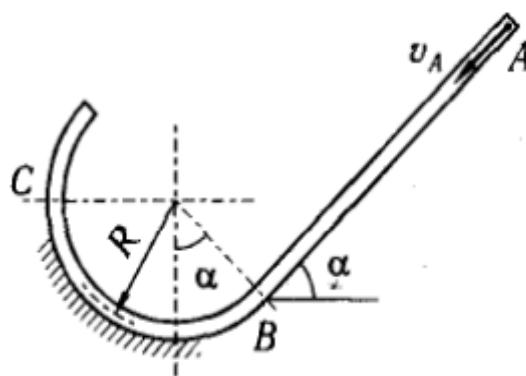
үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Шариктің құбыр ішінде қозғалыс теңдеуін анықтау керек.

Жауабы: $x=3t - 0,69 t^2$ м.

1.36.12-есеп. Массасы 1кг жүк ұзындығы $0,5\text{м}$ жіпке ілінген. Бастапқы уақыт мезгілінде жүкті вертикальдан 60° бұрышына ауытқып, оған вертикаль жазықтықта жіпке перпендикуляр төмен бағытталған $2,1\text{м/с}$ тең жылдамдық берілді. Жүк ең төмен орнын алғанда жіптің керілу күшін және жүк содан көтерілетін биіктігін анықтау керек.

Жауабы: $28,4\text{Н}, 47,5\text{см}$.

1.36.13-есеп. Массасы $0,2\text{кг}$ түйіршік құбыр ішінде A орнынан $v_A=3\text{м/с}$ бастапқы жылдамдығымен қозғалады. Үйкеліс күшін ескермей, түйір-шіктің B, C орналасуында жылдамдықтарын және оның C орналасуында құбырға түсіретін қысымын анықтау керек. Берілгені: $R=3\text{м}, \alpha=45^\circ$, AB аралығында қозғалу уақыты $t=2\text{с}$.



1.36.13-есепке сурет

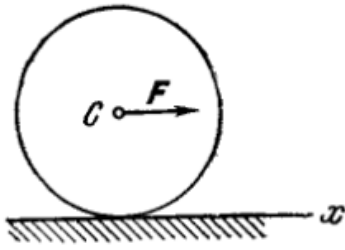
Жауабы: $v_B=16,9\text{м/с}, v_C=15,6\text{м/с}, N=16,3\text{Н}$.

1.36.14-есеп. Массасы 70кг парашютшы ұшақтан секіріп, 100м ұшқан соң парашютын ашады. Парашют ашылған соң 5с уақыт аралығында парашютшының жылдамдығы $4,3\text{м/с}$ дейін азаяды. Ауаның кедергі күшін ескермей, парашютшы ілінген парашют арқандарының тартылыс күшін анықтау керек.

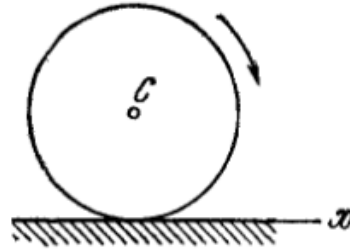
Жауабы: 1246Н .

1.36.15-есеп. Дөңгелек тыныштық күйден F күш әсерінен горизонталь түзу бойымен сырғанап домалайды. Сырғанау үйкеліс коэффициенті f , дөңгелек салмағы P , күш $F=5fP$ тең болғанда дөңгелектің C массалар центрінің қозғалыс заңын анықтау керек.

Жауабы: $x_C = 2fgt^2$.



1.36.15-есепке сурет



1.36.16-есепке сурет

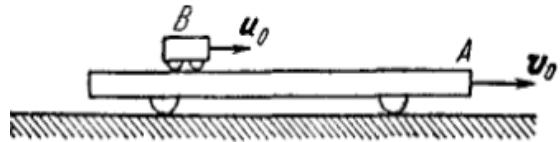
1.36.16-есеп. Дөңгелек тыныштық күйден оған түсірілген момент әсерінен горизонталь түзу бойымен сырғанап домалайды. Сырғанау үйкеліс коэффициенті f болғанда дөңгелектің C массалар центрінің қозғалыс заңын анықтау керек.

Жауабы: $x_C = fgt^2 / 2$.

1.36.17-есеп. Массасы 12кг граната 15м/с жылдамдығымен ұшып келе жатқанда, ауада екі бөлікке жарылады. Массасы 8кг сынықтың жылдамдығы қозғалыс бағыты бойымен 25м/с дейін өсті. Екінші сынық жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: 5 м/с , бағыты бірінші сынық қозғалысына қарсы.

1.36.18-есеп. Горизонталь A платформасы инерция бойынша v_0 жылдамдығымен, ал оның үстінде B арбасы тұрақты u_0 салыстырмалы жылдамдығымен қозғалады. Бір уақыт мезгілінде арба тежеуленеді. Арба тоқтаған соң платформа мен арбаның ортақ v жылдамдығын анықтау керек. Берілгені: M – платформа массасы, m – арба массасы.



1.36.18-есепке сурет

Жауабы: $v = v_0 + \frac{m}{M + m} u_0$.

1.36.19-есеп. Маховик тыныштық күйден тұрақты айналдырушы $M_{\text{айн}} = 75\text{Нм}$ момент әсерінен қозғалады. Маховиктің айналу осіне қатысты инерция моменті $J = 15\text{кгм}^2$. Кедергіні ескермей, маховик $n = 150\text{айн/мин}$ айналу жиілігіне ие болатын уақыт мезгілін анықтау керек.

Жауабы: $\pi\text{ с}$.

1.36.20-есеп. Радиусы $r = 20\text{см}$ және массасы $m = 3\text{кг}$ шкив белдік арқылы қозғалысқа келіп, $\varepsilon = 1,5\text{рад/с}^2$ бұрыштық үдеуімен айналады. Белдіктің жетекші және жетектегі тармақтарының тартылыс күштері $T_1 = 10\text{Н}$ және $T_2 = 5\text{Н}$. Шкивті біртекті цилиндр ретінде қарастырып, кедергі күштер моментін анықтау керек.

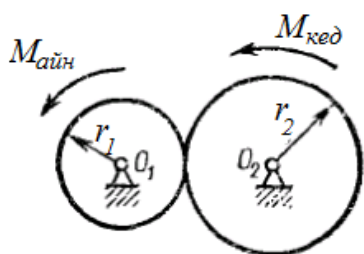
Жауабы: $0,91\text{Нм}$.

1.36.21-есеп. Массасы $m=2\text{кг}$, диаметрі $d=0,8\text{м}$ және тұтас диск түріндегі шкив инерция бойынша $\omega_0=10\text{рад/с}$ бұрыштық жылдамдығымен айналады. Шкив орнатылған білікті тоқтату үшін шкивке $Q=5\text{Н}$ күшімен тежегіш қалыпын сықпалады. Қалып және шкив арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,4$. Білік массасын және білік мойынтіректеріндегі үйкелісті ескермей, білік тоқтайтын уақыт мезгілін және оның тоқтағанша жасайтын айналым санын анықтау керек.

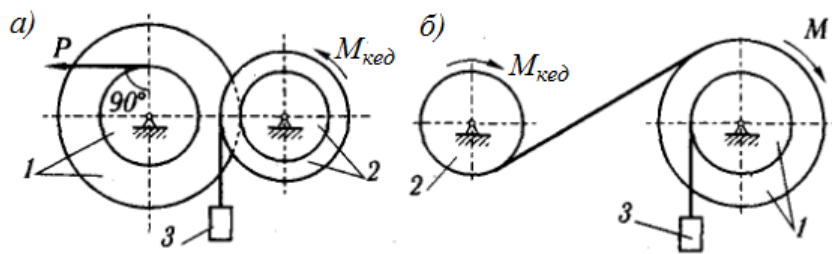
Жауабы: $6,28\text{с}$, $15,7\text{айналым}$.

1.36.22-есеп. Тісті беріліс екі тісті дөңгелектен тұрады, олардың радиустері r_1 және r_2 , осьтік инерция моменттері J_1 және J_2 . Бірінші дөңгелекке тұрақты айналдырушы $M_{\text{айн}}$ моменті, ал екінші дөңгелекке кедергі күштердің $M_{\text{кед}}$ моменті түсірілді. Бірінші дөңгелектің ε_1 бұрыштық үдеуін және дөңгелектердің ортақ нүктесінде олардың өзара әсер ететін S жанама күшін анықтау керек. Берілгені: $M_{\text{кед}}=M_{\text{айн}}/4$, $r_2=2r_1$, $J_1=J_2=J$.

Жауабы: $\varepsilon_1 = 0,7 \frac{M_{\text{айн}}}{J}$, $S = 0,3 \frac{M_{\text{айн}}}{r_1}$.



1.36.22-есепке сурет



1.36.23-есепке сурет

1.36.23-есеп. 3 жүгінің үдеуін келесі деректер үшін анықтау керек:

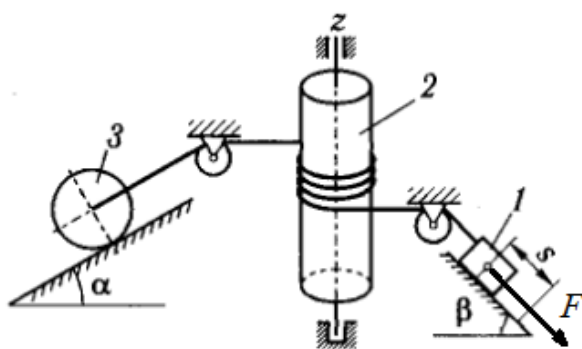
а) қозғалту күші $P=2500\text{Н}$, кедергі момент $M_{\text{кед}}=50\text{Нм}$, денелер массалары $m_1=20\text{кг}$, $m_2=10\text{кг}$, $m_3=30\text{кг}$, дөңгелектер радиустері $R_1=50\text{см}$, $r_1=20\text{см}$, $R_2=40\text{см}$, $r_2=25\text{см}$ және олардың айналу осьтеріне қатысты инерция радиустері $i_{1z}=i_{2z}=30\text{см}$;

б) қозғалту моменті $M=600\text{Нм}$, кедергі момент $M_{\text{кед}}=100\text{Нм}$, денелер массалары $m_1=30\text{кг}$, $m_2=20\text{кг}$, $m_3=40\text{кг}$, дөңгелектер радиустері $R_1=60\text{см}$, $r_1=40\text{см}$, $R_2=30\text{см}$ және олардың айналу осьтеріне қатысты инерция радиустері $i_{1z}=50\text{см}$, $i_{2z}=30\text{см}$.

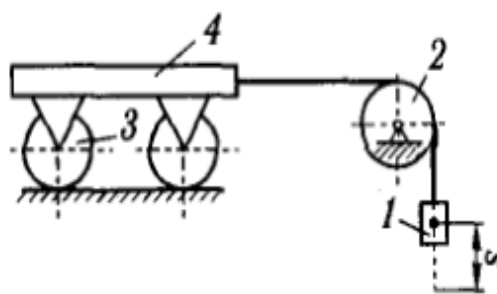
Жауабы: а) $5,36\text{м/с}^2$; б) $4,61\text{с}^2$.

1.36.24-есеп. Механикалық жүйе тыныштық күйден l жүгіне түсірілген тұрақты $F=20H$ күші әсерінен қозғалады. Денелер массалары $m_1=4кг$, $m_2=8кг$, $m_3=5кг$. 2 дене біртекті тұтас цилиндр болып келеді, сырғанаусыз домалайтын 3 дөңгелектің массасы шеткі жиегімен үлестіріледі, сырғанау үйкеліс коэффициенті $f=0,1$, бұрыштар $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$. Жіп салмақсыз және созылмайды, дөңгелек домалауына кедергі моменті және мойынтіректердегі үйкеліс күштері ескерілмейді. l жүктің жүрген жолы $s=1м$ болғанда оның жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: $v_1 = 1,39 м/с$.



1.36.24-есепке сурет



1.36.25-есепке сурет

1.36.25-есеп. Механикалық жүйе тыныштық күйден ауырлық күштер әсерінен қозғалады. l дененің жылдамдығын дене жүрген s жолына тәуелдігін анықтау керек. Денелер массалары $m_1=m$, $m_2=m/2$, $m_3=m/8$, $m_4=m/2$. Блок және арбаның төрт дөңгелегі біртекті дискілер ретінде алынады, жіп салмақсыз және созылмайды, қозғалысқа кедергілер ескерілмейді.

Жауабы: $v_1 = 2\sqrt{gs/5}$.

1.36.26-есеп. Диаметрі $60мм$ білікке диаметрі $50см$ маховик орнатылған, оның айналу жиілігі $180айн/мин$. Жетек өшірілген соң маховик тоқтағанша 90 айналым жасағаны белгілі. Білік пен мойынтіректер арасындағы сырғанау үйкеліс коэффициентін анықтау керек. Маховик массасы оның жиегі бойымен үлестіріледі, білік массасы ескерілмейді.

Жауабы: $f=0,07$.

1.36.27-есеп. Велосипедші $9км/сағ$ жылдамдығына ие болып, педальды айналдырмай қозғалғанда оның тоқтағанша жүретін жолын анықтау керек. Велосипедші мен велосипедтің ортақ массасы $80кг$, әр дөңгелек массасы $5кг$ тең және радиусы $50см$ шеңбер бойымен

үлестіріледі. Дөңгелектердің жер үстінде домалауға кедергі коэффициенті $0,5$ см.

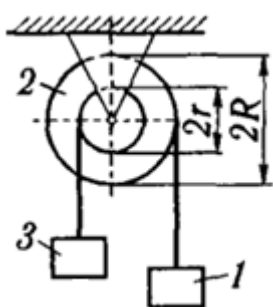
Жауабы: $35,6$ м.

1.36.28-есеп. Түзу горизонталь жолмен келе жатқан автомобиль жылдамдығы мотор қуатын арттыру себебінен v_1 мәнінен v_2 мәніне дейін өседі, сол кезде автомобиль жүрген жолы s . Әр дөңгелек салмағы P_1 және радиусы r , кузов салмағы P_2 , дөңгелектердің домалау үйкеліс коэффициенті f_k . Дөңгелектер сырғанаусыз домалайды, олар біртекті тұтас диск ретінде алынады. Дөңгелек пен кузовтан басқа тетіктердің кинетикалық энергиясы ескерілмейді. Мотордың s орын ауыстыру кезінде жасаған жұмысын анықтау керек.

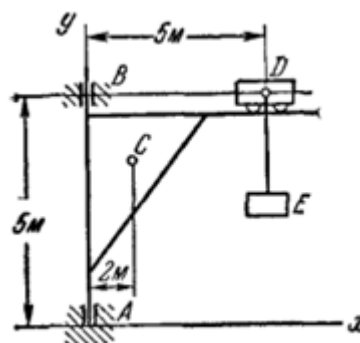
Жауабы:
$$A = \frac{6P_1 + P_2}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{f_k}{r} (4P_1 + P_2) s.$$

1.36.29-есеп. Механикалық жүйе ауырлық күштер әсерінен қозғалысқа келеді. Денелердің массалары $m_1=2$ кг, $m_2=4$ кг, $m_3=5$ кг, блок радиустері $r=0,2$ м, $R=0,4$ м және айналу осіне қатысты инерция радиусы $i_z=0,3$ м. Блоктың бұрыштық үдеуін және оның бағытын анықтау керек.

Жауабы: $2,23 \text{ рад/с}^2$, бағыты сағат тілі жүрісіне қарама-қарсы.

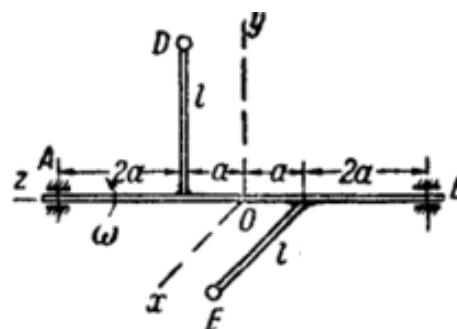


1.36.29-есепке сурет



1.36.30-есепке сурет

1.36.30-есеп. Массасы $3m$ тең E жүгі $g/3$ үдеуімен көтерілген жағдайда кран мойынтіректерінің реакцияларын анықтау керек. Кран массасы $2m$ және оның ауырлық күші C ауырлық центрінде түсірілді, D арбасының массасы $0,5m$. Өлшемдер суретте көрсетілген.



1.36.31-есепке сурет

Жауабы: $X_A = -X_B = 52,1 \text{ кН}$, $Y_A = 63,7 \text{ кН}$.

1.36.31-есеп. Тұрақты ω бұрыштық жылдамдығымен айналатын горизонталь AB білігіне екі бірдей және өзара перпендикуляр жазықтықтарда орналасқан l ұзындығымен сырықтар білікке перпендикуляр тіркелген. Сырықтар шеттерінде m массаларымен D және E шарлары орналасқан. Сырықтар массаларын ескермей, біліктің A және B тіректерінің динамикалық реакцияларын анықтау керек.

Жауабы:
$$N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2.$$

2 МАТЕРИАЛДАР КЕДЕРГІСІ

2.1 Жалпы мағлұтаттар

Бұл тарауда құрылым элементтерін әртүрлі жүктеу кезіндегі беріктік пен қатаңдыққа есептеудің қарапайым, ең типтік әдістері қарастырылады. Беріктік деп қатты денелердің сыртқы күштер (және т.б. факторлардың) әсерін қирамай қабылдау қабілетін түсінеді. Осымен қатар пластикалық деформациялар пайда болған жағдайда да беріктік жойылады деп есептеледі. Оқу құралында статикалық есептеудің мысалдары қарастырылады, яғни құрылымға түсірілген күштер нөлден бастап номиналды мәндеріне дейін баяу өседі (инерция күштерін ескермеуге болатындай), содан кейін олар тұрақты болады немесе тап солай баяу өзгереді.

Беріктікке есептеудің негізгі әдісі ретінде қауіпсіз кернеу бойынша есептеу болып келеді. Осыған сәйкес дененің кемінде бір нүктедегі есептік кернеу (жалпы жағдайда беріктік теориялардың біреумен анықталатын эквивалент кернеу) межелік мәніне жеткен жағдай бүкіл құрылымның беріктігі жойылатынын белгілейді. Келесі белгілеулерді қабылдайық: σ - ең көп жүктелген (қауіпті) нүктедегі есептік (жалпы жағдайда эквивалент) кернеу; $[\sigma]$ – қауіпсіз кернеу, ол межелік кернеудің $1/[n]$ бөлігін құрайды; $\sigma_{меж}$ – қарастырылатын материал үшін межелік кернеу (статикалық жүктелу кезіндегі беріктік шегі немесе аққыштық (жұмсару) шегі; $[n]$ – беріктік кепілдігінің (сенімдігін) қажетті (нормативтік) коэффициенті; n - беріктік кепілдігінің шынайы (есептік) коэффициенті. Сонда беріктік шарты келесідей жазылады

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{меж}}{[n]}. \quad (2.1.1)$$

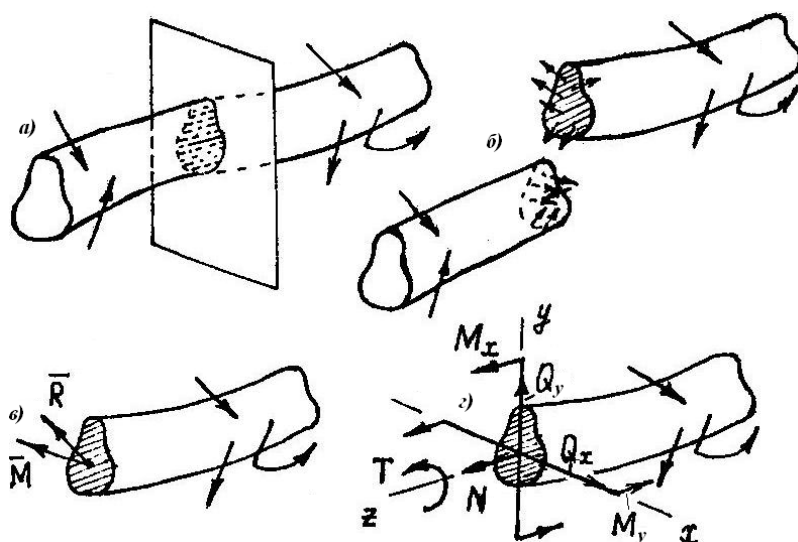
немесе кейбір жағдайларда келесі түрде

$$n = \frac{\sigma_{меж}}{\sigma} \geq [n]. \quad (2.1.2)$$

Сырықтың созылу, сығылу, таза иілу және бұралу секілді жүктелуінде беріктік көлденең, яғни сырық өсіне перпендикуляр қималарында орын алатын бір ғана кернеу (кернеулі күйдің бір құраушысы) арқылы анықталады. Бірінші үш жағдайда есептеу тік кернеу σ , ал бұралу кезінде – жанама кернеу τ бойынша жүргізіледі. Соңғы жағдайда жоғарыда келтірілген формулаларда σ орнына τ қою керек.

Жалпы жағдайда құрылым элементтерінде күрделі кернеулі күй орын алады, сонда есептік кернеу ретінде беріктік теорияларын қолданумен анықталатын эквивалент кернеуді алу керек.

Сырықтың жүктелу түрлерін сұрыптау сырықтың көлденең қималарында орын алатын ішкі күш факторларына байланысты орындалады. Ішкі күш факторларын (ІКФ) анықтау үшін қималар әдісі қолданылады (2.1.1 сурет). Бұл әдіс бойынша берілген сыртқы күш әсерінен тепе-теңдікте болатын сырықты кез келген көлденең қимасында ойша 2 бөлікке қиямыз (2.1.1,а сурет), сонда алып тастаған бөліктің қалған бөлікке әсерін белгісіз бір заңмен үлестірілетін ішкі күштермен ауыстыруға болады (2.1.1,б сурет). Статикадан кез келген күштер жүйесін бас вектор және бас моментке келтіруге болатыны белгілі. Көлденең қиманың ауырлық центрін келтіру центрі ретінде қабылдап, ішкі күштерді бас вектор \bar{R} мен бас момент \bar{M} -ге келтіреміз (2.1.1,в сурет). \bar{R} және \bar{M} векторларын x , y , z координаттық өстеріне проекциялап, алты ІКФ аламыз (2.1.1,г сурет). Өзара ортогоналдық x , y , z өстері келесідей бағытталу керек: координаттық өстердің біреуі (бізде z өсі) – көлденең қимаға перпендикуляр; қалған екі координаттық өс қиманың бас инерция өстері деп аталатын өстермен түйісу керек (қиманың кемінде бір симметриялық өсі болған жағдайда координаттық өстердің біреуі сонымен түйісу керек).



2.1.1-сурет – Қималар әдісі

Бүтін сырық тепе-теңдікте болғандықтан, оның бөліктері де тепе-теңдікте болу керек. Кесілген кез келген бөлік үшін тепе-теңдік

шарттарын қолданып, берілген сыртқы күштер бойынша ІКФ анықтауға қиын емес.

Деректі жағдайда жүктелудің қай түрі болатынын анықтау үшін қарастырылатын сырықтың көлденең қималарында қандай ІКФ орын алатынын білу керек. Сырықтың әртүрлі қималарында ІКФ әртүрлі мәндерге ие болуы мүмкін. Әдетте ІКФ сырық өсі бойымен өзгеру заңын эпюр деп аталатын график түрінде көрсетеді. Эпюр өсінің формасы сырық өсін қайталайды; оған перпендикуляр қарастырылатын ІКФ-ның сәйкес көлденең қималардағы шамаларына пропорционалды кесінділерді, масштабты қолданумен (жуық шамамен рұқсат етіледі) тұрғызады. Эпюрді сырық өсіне перпендикуляр кесінділермен сызықтайды, сонда әр сызық эпюр өсіндегі нүктеге сәйкес келетін көлденең қимадағы қабылданған масштабта ІКФ шамасын білдіреді. Горизонталь тік сырық үшін эпюрлерді сырық сұлбасының астында тұрғызады.

Пластикалық материалдардан жасалған құрылымдардың статикалық жүктелуі кезінде қауіпсіз кернеу бойынша есептеуге қосымша межелік күй бойынша (яғни қиратушы жүктеме бойынша, құрылымның көтергіш қабілеттілігі бойынша) есептеу жүргізіледі. Бұл жағдайда межелік (қиратушы) жүктеме ретінде, ол әрі қарай өсуі мүмкін емес жүктеме алынады, өйткені аққыштық шегіне тең кернеулер құрылымның бірнеше бөлек нүктелерінде емес, барлық көлденең қималасында орын алатынына байланысты құрылым геометриялық жағынан өзгермелі жүйеге айналады.

Құрылымды тексеру үшін немесе түсірілген жүктеме әсерінен пайда болатын орын ауыстырулар қауіпсіз мәндерден аспайтынын қанағаттандыратын құрылым өлшемдерін анықтау үшін қатаңдыққа есептеу жүргізіледі. Еске салайық: қатаңдық деп қатты денелердің жүктемені, өз өлшемдері мен формасын айтарлықтай өзгертпей қабылдау қабілеті аталады.

Деректі жағдайда есептеу мәселесі қалай қойылатынына байланысты әр есептеу әдісі есептердің үш түрін шешуге мүмкіншілік береді: тексеру есебін, жобалау есебін (элементтердің өлшемдерін анықтау), жүктеменің қауіпсіз мәнін анықтау.

2.2 Созылу және сығылу. Бойлық күштердің эпюрлері

Созылу деп сырықтың көлденең қималарында тек қана N бойлық күші орын алып, басқа ІКФ нөлге тең болатын сырықтың

жүктелу түрін атайды. Формалдық түрде сығылу созылудан тек қана N күшінің таңбасымен айырылады (созылу кезінде N күші сырықтың көлденең қимасының сыртқы нормалімен бірдей, ал сығылу кезінде – ішкі нормалімен бірдей бағытталады). Бірақ сонымен қатар сырықтың созылу және сығылу жағдайларында сапалы айырмашылықтар бар. Мысалы, ұзын сырықтардың сығылуы иілумен және орнықтылығынан айырылумен бірге орын алуы мүмкін. Біз осы бөлімде барлық қарастырылатын жағдайда сырықтың орнықтылығы камтамасыз етіледі деп есептейміз.

Қима әдісі бойынша сырықтың кез келген көлденең қимасында оның бір жағындағы сырық бөлігіне (яғни, осы қимамен кесілген сырықтың бір бөлігіне) түсірілген сыртқы күштердің бойлық z өсіне проекцияларының қосындысына тең

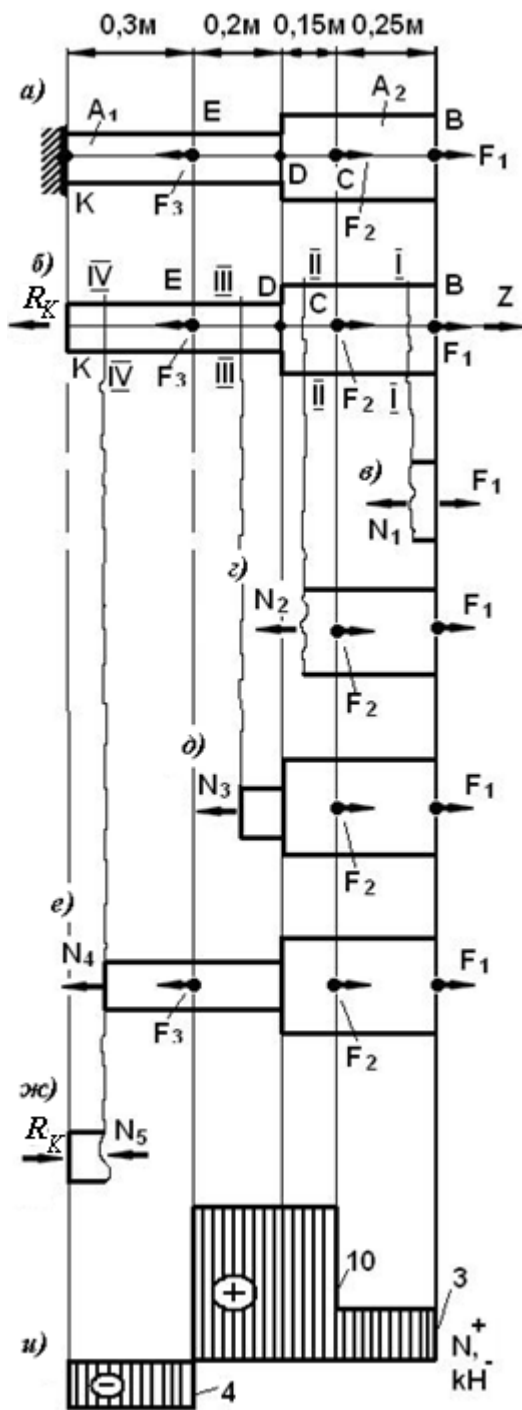
$$N = \sum_{\text{кес}} F_{iz} . \quad (2.2.1)$$

Созылу кезінде N күші оң, ал сығылу кезінде – теріс болып есептеледі, сондықтан егер сыртқы күштің бойлық өсімен бағытталған \bar{F}_{iz} құраушысы кесілген сырық бөлігінің сыртына қарай (яғни қимадан тыс) бағытталса, онда (2.2.1.) өрнегінде сыртқы күштің проекциясы «+» таңбасымен алынады, егер \bar{F}_{iz} кесілген сырық бөлігінің ішіне қарай (яғни қимаға қарай) бағытталса, оны «-» таңбасымен алу керек.

Әдетте түзу сызықты өсі бар сырықтардың созылуы сырық бойымен бағытталған сыртқы күш әсерінен пайда болады. Егер қадалған күштерден басқа, q_z қарқындылығымен таралған бойлық күштер болса, онда (2.2.1) формуласына $\int q_z \cdot dz$ өрнегін қосу керек, мұндағы интегралдау таралған күштер түсірілген әр аралықтың ұзындығы бойынша жүргізіледі, ал қосу қарастырылатын қиманың бір жағында орналасқан аралықтар бойынша орындалады.

2.2.1 мысал. 2.2.1,*a* суретте көрсетілген сатылы-айнымалы қимасы бар сырық үшін бойлық күштер эпюрін тұрғызу керек. Сырық $F_1 = 3кН$, $F_2 = 7кН$ және $F_3 = 14кН$ күштерімен жүктеліп тұр, көлденең қималарының аудандары $A_1 = 10см^2$, $A_2 = 20см^2$.

Шешуі: Қарастырылатын сырықтың 4 аралығы бар: BC , CD , DE ,



2.2.1-сурет

EK . Аралықтардың шекаралары ретінде сыртқы күштер түсірілген немесе қималар ауданы секірмелі өзгертін қималарды аламыз.

F_1, F_2, F_3 күштері сырық өсі бойымен бағытталғандықтан (сырық салмағы ескерілмейді), оның көлденең қималарында тек қана N бойлық күші пайда болады. Сырықтың K шеті қатты бекітіліп тұр. Барлық сыртқы күштер сырықтың z өсі бойымен бағытталғандықтан, қатаң бекітпенің R_K реакциясы тап сол өсі бойымен бағытталады (2.2.1,б сурет). Барлық сыртқы күштердің z өсіне проекцияларының қосындысын нөлге теңестіріп, тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\sum F_{iz} = F_1 + F_2 - F_3 - R_K = 0,$$

осыдан қатаң бекітпенің реакциясын табамыз

$$R_K = F_1 + F_2 - F_3 = 3 + 7 - 14 = -4 \text{ кН}.$$

Енді бойлық күштерді анықтауға кіресейік.

Сырықтың BC аралығының кез келген $I-I$ қимасында бойлық күшті анықтайық. Ол үшін B және C арасында кез келген жерде жүргізілген $I-I$ қимасымен сырықты ойша кесіп, оның сол жақ бөлігін ойша алып тастаймыз,

қалған оң жақ бөлігіне $I-I$ қимасында N_1 бойлық күшін түсіреміз (2.2.1,в сурет). (2.2.1) өрнегіне және таңбалар ережесіне сәйкес бойлық күшті келесідей анықтаймыз

$$N_1 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = F_1 = 3 \text{ кН}.$$

BC аралығының барлық қималары үшін бойлық күш тұрақты және 3 кН -ға тең.

CD аралығында N күшін табу үшін, оның кез келген жерінде $II-II$ қимасын жүргізіп, сырықтың сол жақ бөлігін ойша алып тастаймыз (2.2.1, z сурет). Қалған оң жақ бөлігіне, оның тепе-теңдігі сақталу үшін N_2 күшін қосу керек, оның мәні келесіге тең болады

$$N_2 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = F_1 + F_2 = 3 + 7 = 10 \text{ кН}.$$

$III-III$ қимасын жүргізіп және сырықтың сол жақ бөлігін ойша алып тастап (2.2.1, d сурет), DE аралығындағы N күшін анықтаймыз

$$N_3 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = F_1 + F_2 = 3 + 7 = 10 \text{ кН}.$$

$N_3 = N_2$ болатынын байқаймыз, яғни көлденең қима ауданының өзгеруі бойлық күшке әсерін тигізбейді, сонда екі CD мен DE аралықтарының бір CE аралығындай қарастыруға болатын еді.

EK аралығында N күшін анықтайық, ол үшін $IV-IV$ қимасын жүргізіп, сол жақ бөлігін алып тастаймыз (2.2.1, e сурет)

$$N_4 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = F_1 + F_2 - F_3 = 3 + 7 - 14 = -4 \text{ кН}.$$

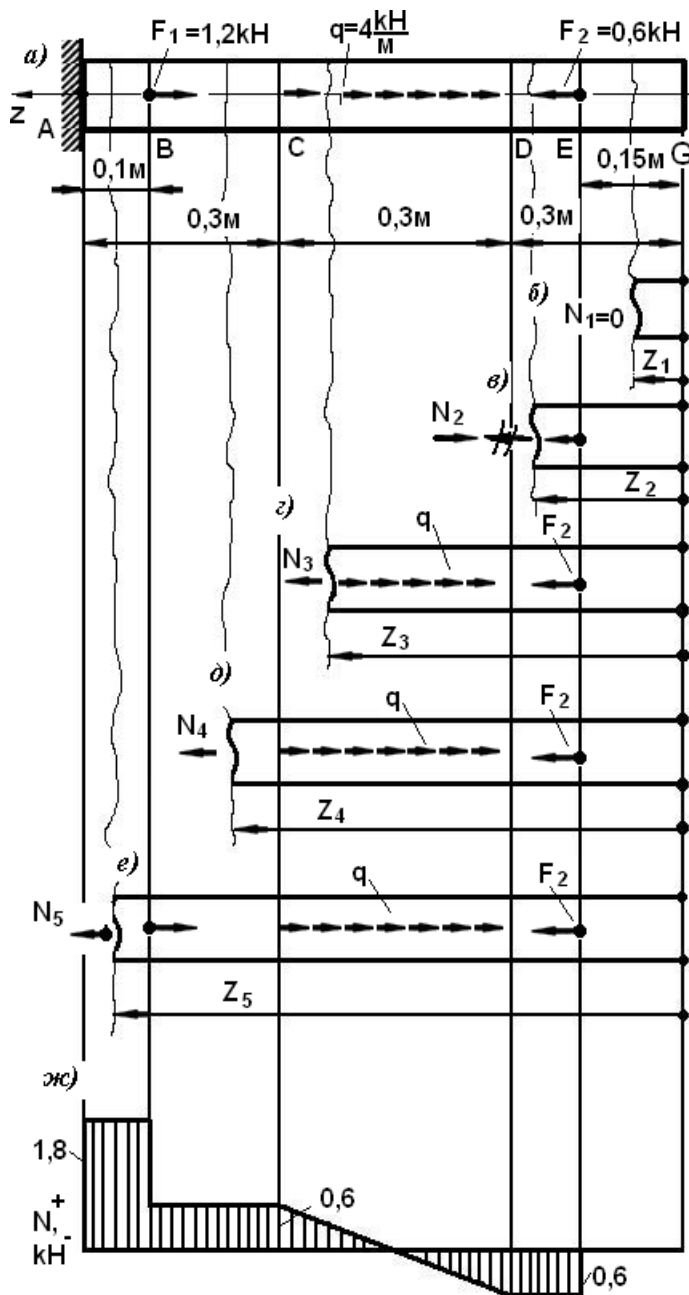
Әр аралықта N күшін анықтағанда, сырықтың оң жақ бөлігін алып тастап, қалған сол жақ бөлігіне түсірілген күштерді қарастыруға да болатынын ескереміз. Мысалы, EK аралығы үшін (2.2.1, $ж$ сурет)

$$N_4 = \sum_{\text{сол}} F_{iz} = -R_K = -4 \text{ кН}.$$

N күшінің табылған мәндері бойынша оның эпюрін тұрғызамыз. Ол үшін сырық сұлбасының астында сырық өсіне параллель эпюрдің өсін жүргіземіз (2.2.1, $и$ сурет), өске аралықтардың шекараларын проекциялаймыз және масштабты жуық шамамен ескеріп отырып, бойлық күштің шамаларына пропорционалды кесінділерді тұрғызамыз. Сонда өстен жоғары оң шамаларды, өстен төмен – теріс шамаларды тұрғызамыз. Қарастырылған жағдайда әр аралықта N тұрақты, сондықтан әр аралықта эпюр өске параллель болып келеді. 2.2.1, $в-ж$ суреттерде көрсетілгендей кесілген бөліктерді кескіндеу әлбетте емес екенін ескереміз, мұндағы ол көрнектілік үшін орындалды.

2.2.2 мысал. 2.2.2, a суретте көрсетілген AG сырығы үшін N эпюрін тұрғызу керек. CD аралығында сырық тұрақты q қарқындылығымен таралған күштермен жүктеліп тұр.

Шешуі: Егер әрқашан қиманың тек қана оң жағындағы сырық бөлігі қарастырылатын болса, қатаң бекітпенің реакциясын анықтамауға да болады.



2.2.2-сурет

Эпюрді тұрғызамыз (2.2.2, ж сурет).

DC аралығы үшін ($0,3\text{ м} \leq z_3 \leq 0,6\text{ м}$)

$$N_3 = \sum_{i \gg} F_{iz} = -F_2 + \int_{0,3}^{z_3} q \cdot dz = -F_2 + q \cdot (z_3 - 0,3).$$

Осы аралықта бойлық күштің шамасы z_3 координатасымен анықталатын қиманың орнына тәуелді. Тәуелдік сызықты функция болғандықтан, эпюрді тұрғызу үшін шеткі қималарындағы N_3

N эпюрін тұрғызу үшін аралықтарды белгілейміз, сол кезде аралық шекаралары ретінде қаралған күштер түсірілген қималарды және таралған күш басталатын және аяқталатын қималарды аламыз. Әр аралықта кез келген қиманы жүргізіп (2.2.2, *b-e* суреттер), N күшін анықтаймыз. Қима орнын z координатасы көмегімен белгілейміз, әр аралық үшін координат басы жеке алынуы мүмкін.

GE аралығы үшін ($0 \leq z_1 \leq 0,15\text{ м}$)

$$N_1 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = 0.$$

Яғни, *GE* аралығында бойлық күш жоқ.

ED аралығында ($0,15\text{ м} \leq z_2 \leq 0,3\text{ м}$)

$$N_2 = \sum_{\text{оң}} F_{iz} = -F_2 = -0,6\text{ кН}.$$

ED аралығында бойлық күш тұрақты және теріс.

мәндерін есептеу жеткілікті болады. Сонда $z_3=0,3$ м болғанда $N_3=-F_2=-0,6$ кН; $z_3=0,6$ м болғанда $N_3=-F_2+q\cdot 0,3=0,6$ кН. Осы мәндерді сәйкес қималарда эпюр өсінен тұрғызып, екі нүктені түзумен қосамыз (2.2.2,ж сурет).

CB аралығы ($0,6\text{ м} \leq z_4 \leq 0,8$ м): $N_4=-F_2+q\cdot 0,3 = 0,6$ кН. Эпюр - өске параллель түзу, өйткені N_4 шамасы z_4 координатасына тәуелсіз.

BA аралығы ($0,8$ м $\leq z_5 \leq 0,9$ м): $N_5 = -F_2 + q\cdot 0,3 + F_1 = 1,8$ кН. Мұндағы да эпюр өзінің өсіне параллель болып келеді.

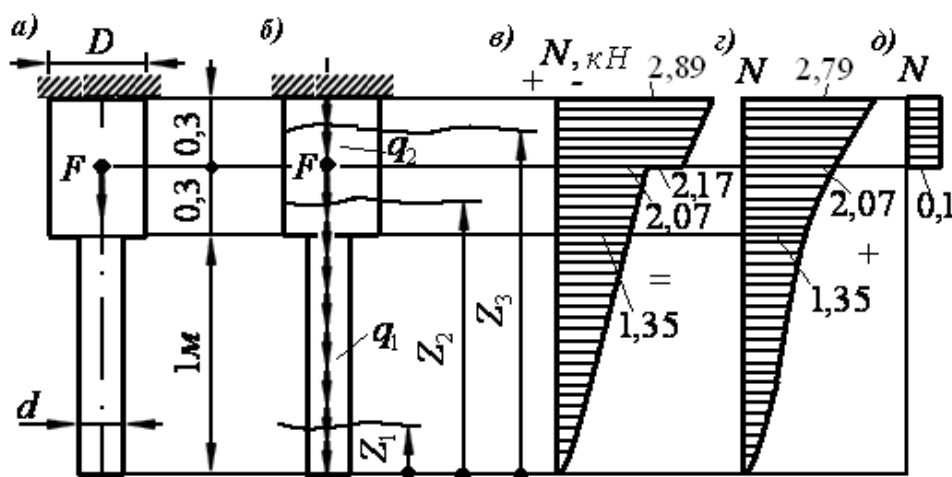
2.2.3 мысал. Болаттан жасалған цилиндрлік және қимасы сатылы сырық 2.2.3,а суретте көрсетілгендей $F = 100$ Н күшімен жүктеліп тұр. Сырық диаметрлері: $D = 0,2$ м, $d = 0,15$ м. Сырық салмағын ескеріп отырып, N эпюрін тұрғызу керек.

Шешуі: Қадалған F күшінен басқа сырық өз салмағынан пайда болатын таралған күштермен жүктеледі, олардың қарқындылығы: төменгі бөлікте q_1 және үстінгі бөлікте - q_2 (2.2.3,а сурет). q_1 мен q_2 анықтаймыз

$$q_1 = \rho \cdot g \cdot A_1 = \rho \cdot g \frac{\pi d^2}{4} = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} = 1,352 \text{ Н/м},$$

$$q_2 = \rho \cdot g \cdot A_2 = \rho \cdot g \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \frac{\pi \cdot 0,22^2}{4} = 2,404 \text{ Н/м}.$$

Мұндағы ρ – материалдың тығыздығы (болат үшін $\rho = 7,8 \cdot 10$ кг/м³), g – еркін түсу үдеуі ($g = 9,81$ м/с²); A_1 және A_2 – сәйкес төменгі және жоғарғы аралықтағы көлденең қиманың ауданы.



2.2.3-сурет

Әр аралықта N күшін анықтап, эпюрді тұрғызамыз (2.2.3,в сурет).

Төменгі аралықтағы N күшін, жүргізілген қиманың астыңғы жағынан түсірілген күштердің қосындысы ретінде анықтаймыз, сонда z_1 координатасының басын сырықтың төменгі шетіне орнатып, келесіні аламыз $N_1 = \sum_{act} F_{iz} = q_1 \cdot z_1$, сонда $z_1 = 0$ болғанда $N_1 = 0$, $z_1 = 1 \text{ м}$ болғанда $N_1 = 1,35 \text{ кН}$.

Ортаңғы аралықта (сырық қимасы сатылы өзгертін қимадан бастап F күші түсірілген қимаға дейін) жүргізілген қимадан төмен орналасқан бөлікті қарастырамыз. Сол кезде z_2 координатасының басын z_1 басымен түйістіріп, келесіні жазамыз

$$N_2 = \sum_{act} F_{iz} = q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot (z_2 - 1); \quad z_2 = 1 \text{ м болғанда } N_2 = 1,35 \text{ кН};$$

$z_2 = 1,3 \text{ м}$ болғанда $N_2 = 2,07 \text{ кН}$.

$$\text{Жоғарғы аралықта } N_3 = \sum_{act} F_{iz} = q_1 \cdot 1 + q_2 \cdot (z_3 - 1) + F; \quad z_3 = 1,3 \text{ м}$$

болғанда $N_3 = 2,17 \text{ кН}$, $z_3 = 1,6 \text{ м}$ болғанда $N_3 = 2,89 \text{ кН}$.

N эпюрін, 2.2.3,г және 2.2.3,д суреттерде көрсетілген сәйкес өз салмағынан және F күшінен бөлек тұрғызылған эпюрлердің қосындысы ретінде табуға болатынын айта кетейік.

2.3 Созылу және сығылу кезіндегі негізгі арақатынастар

Созылу және сығылу кезінде сырықтардың көлденең қималарында тік кернеулер σ орын алады, олар қима бойымен бірқалыпты үлестіріледі және келесідей анықталады

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.3.1)$$

мұндағы N – қарастырылатын қимадағы бойлық күш;

A – көлденең қиманың ауданы.

Сырық шеттерінде созу F күштерімен жүктелген, қимасы тұрақты біртекті сырықтың абсолют ұзаруы келесі формуламен анықталады (сырық материалы Гук заңына бағынатын болса)

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad (2.3.2)$$

мұндағы E – материалдың 1-ші ретті серпімділік модулі (Юнг модулі).

Жалпы жағдайда Δl келесідей анықталады

$$\Delta l = \sum \int \frac{N \cdot dz}{E \cdot A}. \quad (2.3.3)$$

Мұнда интегралдау аралық ұзындығы бойынша, қосу – аралықтар саны бойынша орындалады.

Сырықтағы серпімді деформацияның потенциялық U энергиясының жалпы формуласы келесі түрде жазылады

$$U = \sum \int \frac{N^2 \cdot dz}{2E \cdot A}, \quad (2.3.4)$$

мұндағы интегралдау және қосу (2.3.3) формуладағыдай орындалады.

Шеттерінде F күштерімен созылып немесе сығылып тұрған сырық үшін потенциялық энергиясын сыртқы күштердің жұмысы арқылы келесідей анықтауға болады

$$U = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l. \quad (2.3.5)$$

Статикалық түрде анықталатын топсалы-сырықты жүйелердегі орын ауыстыруларды анықтау келесі жолмен орындалады. Статика теңдеулерінен жүйе элементтеріндегі бойлық күштер анықталады және Гук заңымен элементтердің абсолют ұзаруы табылады. Деформация кезінде жүйе элементтері бір-бірінен ажырамайтын болғандықтан, доғалар әдісін қолданумен орын ауыстырулар арасындағы геометриялық байланыстарды анықтап, ізделетін орын ауыстыруларды табады. Сол кезде жүйе элементтері ұзаруы және топсадан айналуы мүмкін екенін ескеріп отыру керек. Сондықтан элементтің әр нүктесі сырық өсі бойымен және сәйкес радиусы бар шеңбер бойымен қозғалады. Орын ауыстырулардың кішілігіне байланысты сол доғаларды радиустерге перпендикуляр жүргізілген кескіндерге ауыстыруға болады.

Гук заңы бойынша созылу немесе сығылу кезіндегі салыстырмалы бойлық деформация

$$\varepsilon = \sigma / E, \quad (2.3.6)$$

ал салыстырмалы көлденең деформация

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon, \quad (2.3.7)$$

мұндағы μ - материалдың көлденең деформациясының коэффициенті (Пуассон коэффициенті).

Көлденең қима ауданының және сырық көлемінің салыстырмалы өзгерулерін келесі формулалармен анықтауға болады

$$\Delta A / A = -2\mu \cdot \varepsilon, \quad (2.3.8)$$

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} \sum \int N \cdot dz. \quad (2.3.9)$$

Шеттерінде F күштерімен созылып немесе сығылып тұрған сырық үшін аламыз

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} F \cdot l. \quad (2.3.10)$$

2.3.1 мысал. 2.2.1 мысалда қарастырылған сырық үшін σ тік кернеулер мен көлденең қималардың z өсі бойымен w орын ауыстыруларының эпюрлерін тұрғызу керек және сырықта жинақталған U потенциалдық энергиясын анықтау керек. Сырық материалы – болат, оның серпімділік модулі $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Шешуі: Сырықты және 2.2.1 мысалда тұрғызылған N эпюрін кескіндейміз (2.3.1, а, б суреттер).

Әр аралықтағы кернеулер (2.3.1) формуласымен анықталады

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{3 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} \frac{H}{m^2} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 10 \text{ МПа},$$

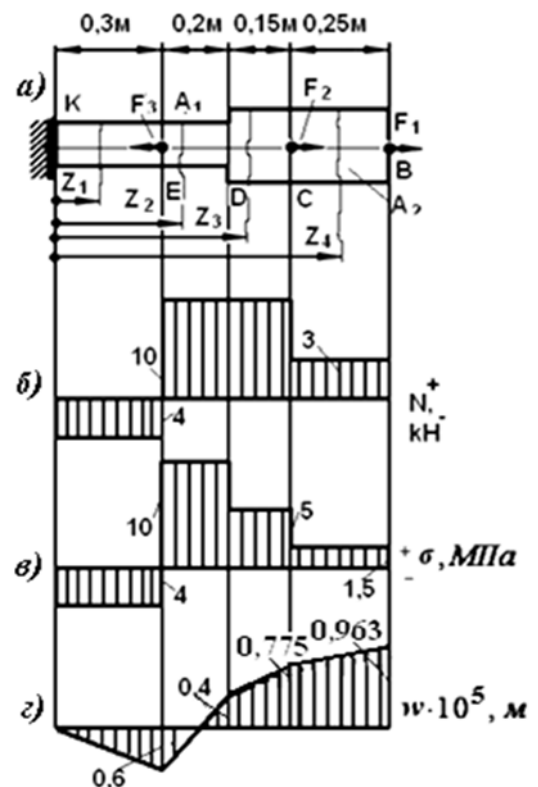
$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_1} = \frac{-4 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -4 \text{ МПа}.$$

σ эпюрі 2.3.1, в суретте көрсетілген.

Орын ауыстырулар w эпюрін тұрғызуға кірісеміз (2.3.1, г сурет). Эпюр тұрғызуын сырықтың сол жақ шетінен бастаймыз. Сол жақ шеті бекітіліп тұрғандықтан, оның орын ауыстыруы нөлге тең. KE аралығында кез келген қима жүргіземіз, оның орнын z_1 координатасымен анықтаймыз. Осы қиманың z_1 бойымен w_1 орын ауыстыруы ұзындығы z_1 сырық бөлігінің Δl_{z_1} абсолют ұзаруына тең болатыны

анық. N және A аралықта тұрақты, сондықтан $w_1 = \Delta l_{z_1} = \frac{N_4 \cdot z_1}{E \cdot A_1}$. Орын

ауыстыру w_1 мен координата z_1 арасында сызықты тәуелдік болғандықтан, орын ауыстырулардың эпюрі аралықта көлбеу түзу



2.3.1-сурет

болып келеді. Аралықтың шеткі қималарында сәйкес мәндерді анықтаймыз

$$z_1=0 \text{ болғанда } w_1=0,$$

$$z_1=0,3 \text{ м болғанда } w_1 = \Delta l_{KE} = \frac{-4 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,6 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

EK аралығындағы орын ауыстырулар теріс, яғни сырық мұндағы сығылып тұр, оған сәйкес қысқару деформациясы орын алады және барлық қималар сол жаққа қозғалады.

ED аралығында w_2 орын ауыстыру ұзындығы z_2 сырық бөлігінің ұзаруына тең

$$w_2 = \Delta l_{z_2} = \Delta l_{KE} + \Delta l_{(z_2-KE)} = -0,6 \cdot 10^{-5} + \frac{N_3 \cdot (z_2 - KE)}{E \cdot A_1}.$$

w_2 орын ауыстырудың шамасы z_2 координатасының сызықтық функциясы, сондықтан эпюр түзу болып келеді және аралықтың шеткі қималарында оның мәндері келесіге тең

$$z_2=0,3 \text{ м болғанда } w_2=-0,6 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$z_2=0,5 \text{ м болғанда } w_2 = -0,6 \cdot 10^{-5} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Тап осылай қалған екі аралықтағы эпюрді тұрғызамыз.

DC аралығында

$$w_3 = \Delta l_{z_3} = \Delta l_{KD} + \frac{N_2 \cdot (z_3 - KD)}{E \cdot A_2},$$

$$z_3=0,5 \text{ м болғанда } w_3=0,4 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$$z_3=0,65 \text{ м болғанда } w_3=0,775 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

CB аралығында

$$w_4 = \Delta l_{z_4} = \Delta l_{KC} + \frac{N_1(z_4 - KC)}{E \cdot A_2},$$

$$z_4=0,65 \text{ м болғанда } w_4=0,775 \cdot 10^{-5} \text{ м,}$$

$z_4=0,9 \text{ м}$ болғанда $w_4=0,963 \cdot 10^{-5} \text{ м}$. Сырықтың оң жақ шетінің орын ауыстыруы сырықтың толық ұзаруына тең болатыны анық.

Сырық деформациясының потенциялық энергиясын (2.3.4) формуласымен анықтаймыз

$$U = \sum \int \frac{N^2 \cdot dz}{2E \cdot A} = \frac{N_1^2 \cdot |BC|}{2E \cdot A_2} + \frac{N_2^2 \cdot |CD|}{2E \cdot A_2} + \frac{N_3^2 \cdot |DE|}{2E \cdot A_1} + \frac{N_4^2 \cdot |EK|}{2E \cdot A_1} =$$

$$= \frac{10^6}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} \left[\frac{3^2 \cdot 0,25}{2} + \frac{10^2 \cdot 0,15}{2} + \frac{10^2 \cdot 0,2}{1} + \frac{(-4)^2 \cdot 0,3}{1} \right] = 8,36 \text{ Дж.}$$

2.3.2 мысал. 2.3.2,*а* суретте көрсетілген жүйенің серпімді сырықтарында тік кернеулерді және күш түсірілген нүктенің орын ауыстыруын анықтау керек.

Шешуі: Түйіндерді ойып алу әдісін қолданып (2.3.2,*б* сурет), түйіннің тепе-теңдік теңдеулерін жазамыз

$$\sum F_{kx} = -N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = N_1 \cdot \cos 60^\circ + N_2 \cdot \cos 45^\circ - F = 0.$$

Теңдеулерді шешіп, сырықтардағы бойлық күштерді анықтаймыз: $N_1 = 11,0 \text{ кН}$ және $N_2 = 13,5 \text{ кН}$.

Сырықтардағы тік кернеулер келесіге тең

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{13,5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{\text{МН}}{\text{м}^2} = 33,6 \text{ МПа}.$$

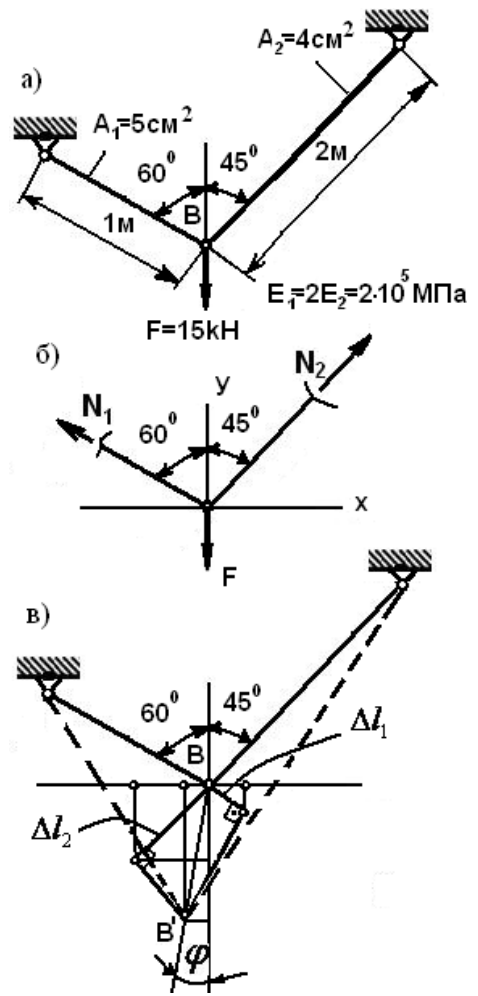
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{11 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 22,0 \text{ МПа}.$$

B нүктесінің δ орын ауыстыруын табу үшін алдымен сырықтардың абсолют ұзаруын анықтаймыз

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{11 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{13,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{1 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Содан кейін доғалар әдісін қолданамыз (2.3.2,*в* сурет), сол кезде доғаларды деформацияланбаған күйдегі сырық орындарына жүргізілген перпендикулярлармен ауыстырамыз. Жүйе деформацияланған соң күш түсірілген нүктесінің орны, сол перпендикулярлардың қиылысу нүктесі болып табылады (B' нүктесі); жүйенің деформацияланған күйі үзілмелі сызықпен көрсетіліп тұр. BB' векторы B нүктесінің толық орын ауыстыру векторы болып келеді. Сол орын ауыстырудың шамасы мен бағытын оның x және y өстеріне проекциялары арқылы анықтаймыз. Аламыз



2.3.2-сурет

$$\delta_x = \Delta l_1 \cdot \cos 30^\circ - \Delta l_2 \cos 45^\circ = -3,82 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$\delta_y = \Delta l_1 \cdot \cos 60^\circ + \Delta l_2 \cos 45^\circ = 5,28 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Сонда

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = 6,55 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\delta_x}{\delta_y} = -0,723 \text{ және } \varphi \approx 35^\circ.$$

2.4 Созылу және сығылу

кезіндегі беріктікке және қатандыққа есептеу

Қауіпсіз кернеулер әдісі бойынша созылу немесе сығылу кезіндегі беріктікке есептеу келесі формула бойынша жүргізіледі

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.4.1)$$

Мұнда σ – көлденең қимадағы есептелетін кернеу, N – бойлық күш, A - көлденең қиманың ауданы, $[\sigma]$ - қауіпсіз кернеу.

Қауіпсіз кернеу $[\sigma]$ берілген материал үшін межелік кернеудің бөлігі болып алынады

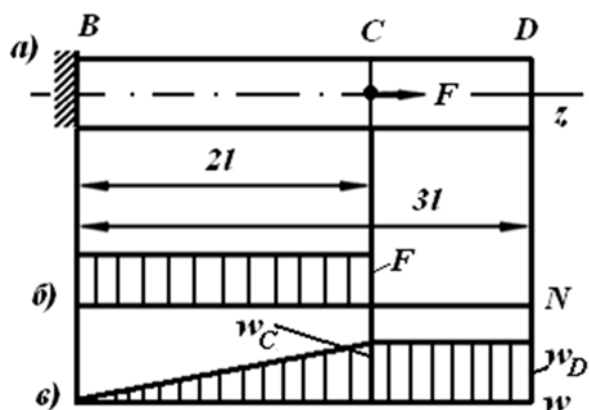
$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{меж}}}{[n]}. \quad (2.4.2)$$

Пластикалық материалдар үшін межелік кернеу $\sigma_{\text{меж}}$ ретінде оның аққыштық шегі $\sigma_{\text{ақ}}$ алынады (егер материал созылу мен сығылуға бірдей қарсыласпайтын болса, онда сәйкес $\sigma_{\text{ақ.соз}}$ - созылу кезіндегі аққыштық шегі және $\sigma_{\text{ақ.сығ}}$ - сығылу кезіндегі аққыштық шегі), ал морт материалдар үшін – олардың беріктік шегі (яғни, уақытша кедергісі) $\sigma_{\text{бер}}$ алынады; материал созылу мен сығылуды бірдей қабылдамайтын жағдайда, сәйкес $\sigma_{\text{бер.соз}}$ - созылу кезіндегі беріктік шегі және $\sigma_{\text{бер.сығ}}$ – сығылу кезіндегі беріктік шегі алынады. (2.4.2) формуласында $[n]$ – беріктік кепілдігінің нормативтік коэффициенті, оның мәні қарастырылатын құрылым жұмысының шарттарына және жауапкершілігіне, есептеу сұлбасының нақтылығына және тағы басқа факторларға тәуелді болады да есептік нормалар деп атаплатын құжаттарда келтіріледі.

Сырық қимасы тұрақты болған жағдайда есептеуді N бойлық күшінің модулі ең үлкен мәнге ие болатын қима үшін орындау жеткілікті болады. Сырық қимасы айнымалы болған жағдайда алдымен кернеулері ең үлкен болатын қауіпті қиманы анықтау керек, содан кейін есептеуді сол қима үшін жүргізу керек.

Егер беріктікті қамсыздандырудан басқа, жүйе нүктесінің немесе қимасының орын ауыстыруы қауіпсіз $[\delta]$ шамасынан аспау шарты қойылса, онда қатаңдыққа тексеру келесі шарт бойынша жүргізіледі

$$\delta \leq [\delta]. \quad (2.4.3)$$



2.4.1-сурет

2.4.1 мысал. Болаттан жасалған BD сырығы C қимасында F күшімен жүктеледі (2.4.1,а сурет). $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$, $A = 2 \text{ см}^2$, $l = 0,5 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ және сырықтың оң жақ шетінің орын ауыстыруының қауіпсіз мәні $[\delta]_D = 0,3 \text{ мм}$ қабылдап, қауіпсіз $[F]$ күшін табу керек.

Шешуі: Сырықтың BC

аралығы созылу күйінде болады ($N = F$), CD аралығында бойлық күш жоқ; N эпюрі 2.4.1,б суретте көрсетілген. 2.4.1,в суретте сырық қималарының өс бойымен w орын ауыстыру эпюрі көрсетілген, сол кезде CD аралығында барлық қималардың орын ауыстырулары бірдей болып келеді. Беріктік шартынан

$$\sigma_{max} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

F күшінің қауіпсіз мәнін анықтаймыз

$$[F]_{[\sigma]} = [\sigma] \cdot A = 200 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ МН} = 40 \text{ кН}.$$

Қатаңдық шартынан

$$w_D = w_C = \frac{N \cdot 2l}{E \cdot A} = \frac{F \cdot 2l}{E \cdot A} \leq [\delta]_D$$

тағы F күшінің қауіпсіз мәнін

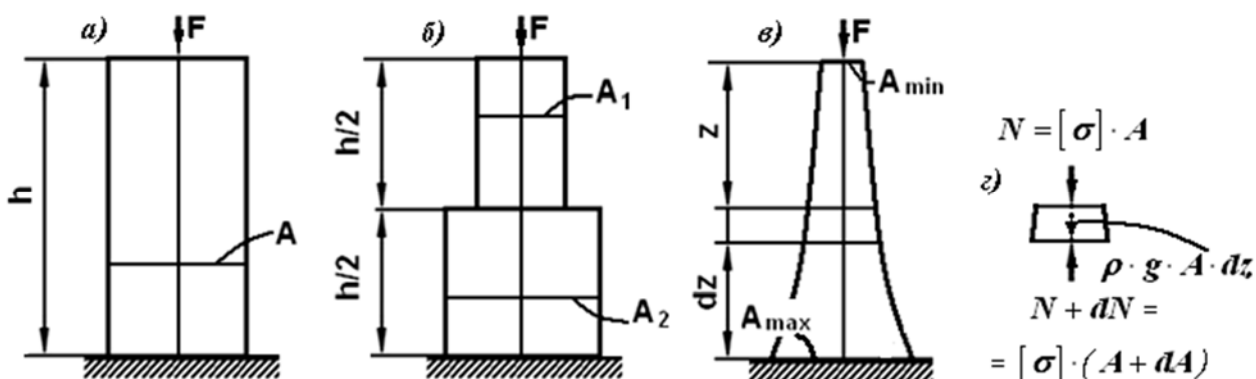
анықтаймыз

$$[F]_{[\delta]} = \frac{[\delta]_D \cdot E \cdot A}{2l} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0,5} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ Н} = 12 \text{ кН}.$$

$[F]$ күшінің екі мәнін салыстыруы анықтаушы шарт ретінде қатаңдық шарты болатынын көрсетеді, яғни екі шартқа да қанағаттандыру үшін $[F] = [F]_{[\delta]} = 12 \text{ кН}$ алу керек; сол кезде w_D мәні $[\delta]_D$ тең болады, ал кернеулер $[\sigma]$ мәнінен кіші болады.

2.4.2 мысал. Келесі үш жағдайда тастан құрылған колоннаның көлемін анықтау керек: 1) қарапайым призмалық (немесе цилиндрлік)

колонна (8,а сурет); 2) екі призмалық (немесе цилиндрлік) аралықтан құрылған колонна (8,б сурет); 3) бірқалыпты қарсыласу колоннасы, яғни барлық көлденең қималарында кернеулер тең болатын колонна (теңберіктік колонна). Сығу күші $F=2,0 \text{ МН}$, колонна биіктігі $h=30 \text{ м}$, материалдың тығыздығы $\rho=1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, қауіпсіз кернеу $[\sigma]=1,2 \text{ МПа}$.



2.4.2-сурет

Шешуі:

1. Бұл жағдайда беріктік шарты келесі түрде жазылады

$$\sigma_{max} = \frac{F + \rho \cdot g \cdot h \cdot A}{A} \leq [\sigma],$$

осыдан

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \rho \cdot g \cdot h} = \frac{2,0}{1,2 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 2,67 \text{ м}^2,$$

$$V = A \cdot h = 2,67 \cdot 30 = 80 \text{ м}^3.$$

2. Колоннаның жоғарғы бөлігі үшін беріктік шарты келесі

$$\sigma_{max} = \frac{F + \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2} A_1}{A_1} \leq [\sigma],$$

Осыдан

$$A_1 \geq \frac{F}{[\sigma] - \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2,0}{1,2 - 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot \frac{30}{2} \cdot 10^{-6}} = 2,11 \text{ м}^2,$$

$$V_1 = A_1 \cdot \frac{h}{2} = 2,11 \cdot \frac{30}{2} = 31,6 \text{ м}^3.$$

Астыңғы бөлік үшін жазылған беріктік шартынан

$$\sigma_{max} = \frac{F + \rho \cdot g \cdot V_1 + \rho \cdot g \frac{h}{2} \cdot A_2}{A_2} \leq [\sigma]$$

Анықтаймыз

$$A_2 \geq \frac{F + \rho \cdot g \cdot V_1}{[\sigma] - \rho \cdot g \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2,0 + 1,5 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 31,6 \cdot 10^{-6}}{1,2 - 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot \frac{30}{2} \cdot 10^{-6}} = 2,60 \text{ м}^2,$$

$$V_2 = F_2 \cdot \frac{h}{2} = 2,6 \cdot \frac{30}{2} = 39,1 \text{ м}^3.$$

Сонда колонна көлемі $V = V_1 + V_2 = 31,1 + 39,1 = 70,7 \text{ м}^3$.

3. Екі шексіз жақын қимамен кесіліп алынған сырық элементін қарастырып (2.4.2, в, г суреттер), тепе-теңдік теңдеуін келесі түрде жаза аламыз $[\sigma] \cdot A + \rho \cdot g \cdot A \cdot dz = [\sigma] \cdot (A + dA)$, осыдан $\frac{dA}{A} = \frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} \cdot dz$.

Осы өрнекті интегралдаған соң келесіні аламыз $\ln A = \frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} z + \ln C$

немесе $A = C \cdot e^{\frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} z}$. Сонда $z=0$ болғанда теңдеу жоғарғы көлденең қиманың A_{min} ауданын береді, ол $F/[\sigma]$ тең болу керек, сондықтан тұрақты $C = F/[\sigma]$, бірқалыпты қарсыласатын сырық ауданының өзгеру заңы келесі болады $A = \frac{F}{[\sigma]} \cdot e^{\frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} z}$. Колонна табанындағы қима

ауданы $A_{max} = \frac{F}{[\sigma]} e^{\frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} h}$.

Колоннаның көлемін табу үшін алдымен оның G салмағын анықтаймыз, ол астыңғы және жоғарғы қималардағы бойлық күштердің айырмашылығына тең

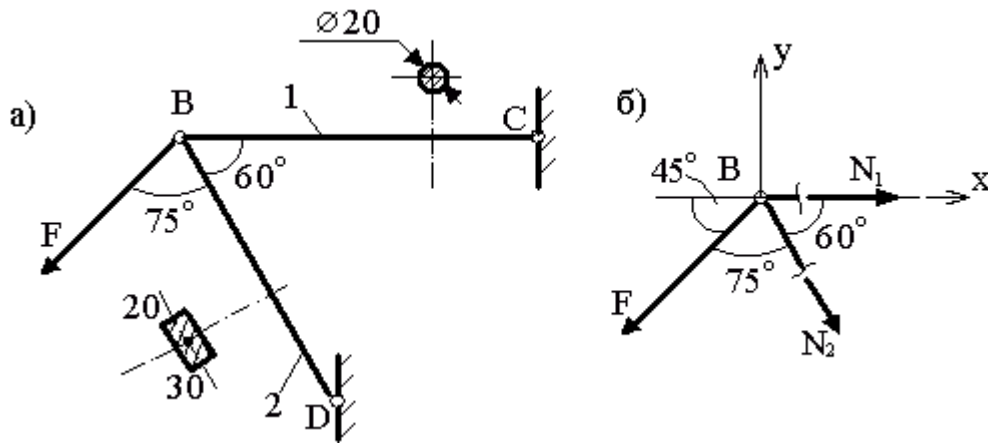
$$G = [\sigma] \cdot A_{max} - [\sigma] \cdot A_{min} = F(e^{\frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} h} - 1).$$

Енді колонна көлемі

$$V = \frac{G}{\rho \cdot g} = \frac{F}{\rho \cdot g} (e^{\frac{\rho \cdot g}{[\sigma]} h} - 1) = \frac{2,0 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^3 \cdot 10} (e^{\frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 10}{1,2 \cdot 10^6} \cdot 30} - 1) = 60,7 \text{ м}^3.$$

Барлық үш жағдайдағы колонна көлемін салыстырып, теңберікті колонна үшін ұтыс болатынын көреміз.

2.4.3 мысал. 2.4.3,*a* суретте көрсетілген сырық жүйесі үшін $F=40$ кН, $[\sigma_{\text{cos}}]=100$ МПа, $[\sigma_{\text{сығ}}]=60$ МПа қабылдап, беріктік шартын тексеру керек.



2.4.3-сурет

Шешуі: Алдымен *1* және *2* сырықтағы бойлық күштерді анықтаймыз, ол үшін *B* түйінін ойып аламыз және алып тастаған бөліктердің әсерін олардың N_1 және N_2 реакцияларымен ауыстырамыз (2.4.3,*б* сурет). Жазық тоғысатын күштер жүйесі үшін тепе-теңдік тендеулерін барлық күштердің *x* және *y* өстеріне проекцияларының қосындылары түрінде жазамыз

$$\sum F_{kx} = N_1 + N_2 \cdot \cos 60^\circ - F \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = -N_2 \cdot \sin 60^\circ - F \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

осы тендеулерден келесі күштерді табамыз

$$N_2 = -F \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = -40 \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = -32,7 \text{ кН},$$

$$N_1 = F \cdot \cos 45^\circ - N_2 \cdot \cos 60^\circ = 40 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-32,7) \cdot 0,5 = 44,5 \text{ кН}.$$

Мұндағы «-» таңбасы N_2 күштің шынайы бағыты алдында қабылданған бағытқа қарсы екенін білдіреді, яғни *2* сырық сығылады.

Сырықтар көлденең қималарының аудандарын анықтаймыз

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 400}{4} = 314 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 30 \cdot 20 = 600 \text{ мм}^2.$$

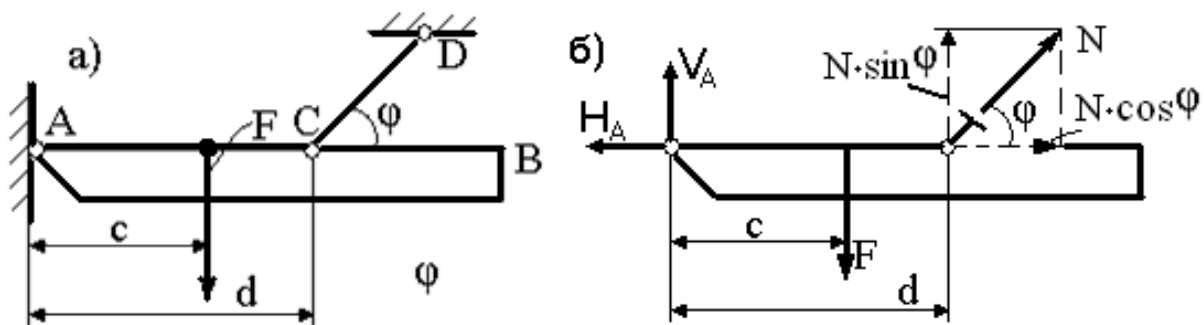
Енді сырықтар көлденең қималарындағы тік кернеулерді анықтап, оларды қауіпсіз кернеулермен салыстырамыз

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{44,5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{314 \text{ мм}^2} = 142 \text{ МПа} > [\sigma_{\text{cos}}] = 100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{32,7 \cdot 10^3 \text{ Н}}{600 \text{ мм}^2} = 54,5 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{сыз}}] = 60 \text{ МПа}.$$

Осыдан беріктік шарты 2 сырық үшін орындалатынын, ал 1 сырық үшін орындалмайтынын көреміз. Сондықтан бүтін құрылым үшін беріктік шарты орындалмайды, яғни ол үлкен пластикалық деформация алуы немесе (және) қирауы мүмкін.

2.4.4 мысал. *AB* қатты білеуі *A* нүктесінде топса арқылы бекітілген және көлденең қимасы дөңгелек, болаттан жасалған *CD* сырығымен ұсталып тұр (2.4.4,*a* сурет). Беріктік шартынан *CD* сырығы көлденең қимасының диаметрін анықтау керек. Берілгені: $F = 280 \text{ кН}$, $\sigma_{\text{ак}} = 240 \text{ МПа}$, $[n] = 1,5$, $c = 2,5 \text{ м}$, $d = 4,5 \text{ м}$, $\varphi = 60^\circ$.



2.4.4-сурет

Шешуі: *AB* білеуін *A* нүктесінде байланыстан ойша босатып және *CD* сырығын қиып, алып тастаған байланыстардың әсерін белгісіз H_A , V_A және N реакция күштерімен ауыстырамыз (2.4.4,*б* сурет). Барлық үш реакция қарастырылатын жазық күштер жүйесі үшін жазуға болатын үш тепе-теңдік теңдеулерінен анықталуы мүмкін. Бірақ есепті шығару үшін тек қана N күшін білу керек, сондықтан бір теңдеуді құрамыз $\sum M_A = N \cdot \sin \varphi \cdot d - F \cdot c = 0$, осыдан

$$N = F \frac{c}{d \cdot \sin \varphi} = 280 \frac{2,5}{4,5 \cdot \sin 60^\circ} = 180 \text{ кН}.$$

Беріктік шартынан

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{ак}}}{[n]} \text{ аламыз}$$

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{N \cdot [n]}{\sigma_{ак}} = \frac{180 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{240} = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Сырық диаметрі келесі шартты қанағаттандыру керек

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1,125 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 3,78 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 37,9 \text{ мм}.$$

2.5 Элементтері созылу-сығылу жағдайындағы статикалық түрде анықталмайтын жүйелерді есептеу

Статикалық түрде анықталмайтын жүйелер деп байланыстар реакцияларын және барлық элементтердегі ІКФ тек қана тепе-теңдік теңдеулерін қолданып, анықтауға болмайтын жүйелер аталады. Белгісіз шамалар мен статиканың тәуелсіз теңдеулер санының айырмашылығы жүйенің статикалық анықталмау дәрежесі деп аталады. Статикалық түрде анықталмайтын жүйелер шешудің жалпы жоспары келесідей:

а) статика теңдеулерін құрады және статикалық анықталмау дәрежесін анықтайды;

б) жүйенің деформацияланған жағдайын қарастырып, жеке элементтердің деформацияларын байланыстыратын теңдеулерді құрады (деформациялар теңдеулерін);

в) деформациялар теңдеулерінде деформациялардың (ұзарулардың) шамаларын Гук заңы бойынша күштер арқылы өрнектейді;

г) статика теңдеулері мен түрлендірілген деформациялар теңдеулерін бірге шешеді.

Статикалық түрде анықталмайтын жүйелер сырықтарының температурасы өзгергенде, сырықтың l ұзындығына, материалдың сызықтық кеңею α коэффициентіне және температураның Δt өзгеруіне тәуелді температуралық деформациялар пайда болады. Осы деформациялар әдетте деформациялар теңдеулерін қанағаттандырмайды, сондықтан сырықтарда серпімді кернеулер және оларға сәйкес келетін серпімді деформациялар пайда болады. Қосынды деформациялар (серпімді және температуралық) деформациялар теңдеулерін қанағаттандыру керек. Температуралық кернеулер ескерумен есептерді шығару жоғарыда көрсетілген жалпы тәртіп бойынша орындалады, сол кезде сырықтың қосынды ұзаруы келесідей анықталады

$$\Delta l = \Delta l_{сер} + \Delta l_{t^{\circ}}, \quad (2.5.1)$$

мұндағы $\Delta l_{сер}$ – сырықтың (2.3.2) немесе (2.3.3) формуламен анықталатын серпімді абсолют ұзаруы;

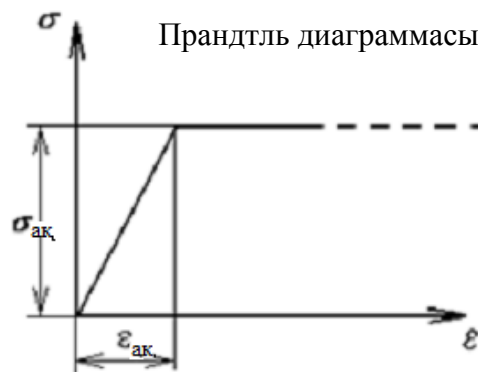
$\Delta l_{t^{\circ}}$ - сырықтың температуралық абсолют ұзаруы, ол келесі формуламен анықталады

$$\Delta l_{t^{\circ}} = \alpha \cdot l \cdot \Delta t^{\circ}. \quad (2.5.2)$$

Статикалық түрде анықталмайтын жүйелерді өңдеу кезінде, сырықтарды шеттерімен біріктіруді күштер түсірілмей орындау керек, ол үшін сырықтар өлшемдері нақты болу керек. Керісінше жағдайда монтаждық, яғни бастапқы кернеулер орын алады. Монтаждық кернеулерді анықтау статика теңдеулері мен деформациялар теңдеулерін қолданумен орындалады. Сол кезде соңғы шарттарда жүйе элементтері ұзындықтарының берілген дәлсіздіктерін ескеру керек. Гук заңы бойынша жазылған ұзарулардың өрнектеріне шынайы емес, жобаланған ұзындықтарын қояды, өйткені олардың өзара айырмашылығы өте аз шама болып келеді.

Қауіпсіз кернеулер бойынша есептеу кезінде ең үлкен кернеуі бар сырықта $\sigma \leq [\sigma]$ шартының орындалуын қанағаттандыру керек. Егер қауіпсіз кернеу $[\sigma]$ аққыштық шегі $\sigma_{ак}$ арқылы анықталатын болса, онда статикалық түрде анықталмайтын жүйелер үшін беріктік кепілдігінің шынайы мәні статикалық түрде анықталатын жүйелердегі кепілдігінен әрқашан артық болып шығады. Оны келесімен түсіндіруге болады: статикалық түрде анықталатын жүйелердің кемінде бір элементінде кернеу аққыштық шегіне жетуі сәйкес байланыс жоғалатынын білдіреді, сонда жүйе кинематикалық өзгертін жүйеге айналады. Статикалық түрде анықталмайтын жүйелерде барлық элементтерінде кернеу аққыштық шегіне жеткенде ғана оның жүк көтергіш қабілеті жойылады, яғни аққыштық тізбекпен барлық сырықтарда орын алатын жағдайда ғана жүйе кинематикалық өзгертін жүйеге айналады.

Жүк көтергіш қабілеті бойынша (межелік жағдай бойынша) есептеу келесі жолмен орындалады. Сырық материалы идеал серпімді-пластикалық болатынын болжамдап



2.5.1-сурет

(материал үшін 2.5.1 суретте көрсетілген Прандтль диаграммасы қабылданады), жүктеменің межелік мәні есептеледі. Сол кезде жүктеменің межелік мәні $F_{ак}$ тек қана тепе-теңдік теңдеулерінен анықталады (деформациялар теңдеуі керек емес), өйткені межелік жағдайда сырықтардағы N_i бойлық күштері $\sigma_{ак} \cdot A_i$ тең. Берілген $[n]$

беріктік кепілдігі үшін $[F]$ қауіпсіз күші $\frac{F_{ак}}{[n]}$ тең.

2.5.1 мысал. AB қатты денесі A топсалы тірегімен және екі болаттан жасалған 1 және 2 сырықтарымен ұсталып тұр (2.5.2,а сурет). Сырықтар көлденең қималарының аудандары $A_1:A_2=1:3$ қатынасымен байланысатынын қабылдап, олардың көлденең қималарының аудандарын беріктік шартынан таңдау керек. Есепте келесі берілген: $F = 280 \text{ кН}$, $\sigma_{ак}=240 \text{ МПа}$, $[n]=1,5$, $a=d=2 \text{ м}$, $b=4,5 \text{ м}$, $c=e=2,5 \text{ м}$, $\varphi = 60^\circ$.

Шешуі: Денеге әсер ететін барлық актив және реактив күштерін түсіріп (2.5.2,б сурет), тепе-теңдік теңдеулерін құрамыз

$$\sum F_{kx} = A_x + N_2 \cdot \cos \varphi = 0,$$

$$\sum F_{ky} = A_y + N_1 + N_2 \cdot \sin \varphi - F = 0,$$

$$\sum M_A = N_1 \cdot a + N_2 \cdot \sin \varphi \cdot b - F \cdot c = 0.$$

Үш тепе-теңдік теңдеуінде 4 белгісіз күш бар, сондықтан жүйе бір рет статикалық түрде анықталмайтын жүйе болып келеді.

Орын ауыстырулардың (деформациялардың) теңдеуін құру үшін жүйенің бастапқы күйі мен оның деформацияланған күйін қарастырайық (2.5.2,в сурет). Сырықтардың ұзару нәтижесінде AB денесі A топсадан түзу болып айналады. Орын ауыстырулардың кішілігіне байланысты AB дененің барлық нүктелері вертикаль төмен қозғалады деп есептейміз. Сонда D топсаның орын ауыстыруы 1 сырықтың абсолют ұзаруына тең: $DD' = \Delta l_1$. 2 сырықтың ұзаруын, C нүктесінен сырықтың жаңа орнына перпендикуляр түсіріп аламыз, сонда $\Delta l_2 = C_1 C_2$. $\Delta CC_1 C_2$ қарастырып және β бұрышы кішкене деп, яғни φ бұрышы деформацияланған күйде бұрынғыдай қалады деп алып,

анықтаймыз $CC_1 = \frac{C_1 C_2}{\cos(90^\circ - \varphi)} = \frac{\Delta l_2}{\sin \varphi}$. ADD_1 және ACC_1

үшбұрыштарының ұқсастығынан аламыз $\frac{DD_1}{CC_1} = \frac{a}{b}$ немесе

$\frac{\Delta l_1 \cdot \sin \varphi}{\Delta l_2} = \frac{a}{b}$, осыдан деформациялардың теңдеуін келесі түрде аламыз

$$\Delta l_1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{\Delta l_2}{\sin \varphi}.$$

Гук заңы бойынша жазамыз $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot d}{E \cdot A_1}$, $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot e}{E \cdot A_2}$, оларды деформациялардың теңдеуіне қойып, табамыз

$$\frac{N_1 \cdot d}{E \cdot A_1} = \frac{a}{b \cdot \sin \varphi} \cdot \frac{N_2 \cdot e}{E \cdot A_2}.$$

Осыдан, $A_2 = 3A_1$ қатынасын ескеріп, $N_1 = N_2 \frac{a \cdot e}{3 \cdot b \cdot d \cdot \sin \varphi}$ аламыз.

Осы өрнекті соңғы тепе-теңдік теңдеуіне қойып, табамыз

$$N_2 = \frac{F \cdot c}{\frac{a^2 \cdot e}{3b \cdot d \cdot \sin \varphi} + b \cdot \sin \varphi} = \frac{280 \cdot 2,5}{\frac{2^2 \cdot 2,5}{3 \cdot 4,5 \cdot 2 \cdot 0,866} + 4,5 \cdot 0,866} = 162 \text{ кН},$$

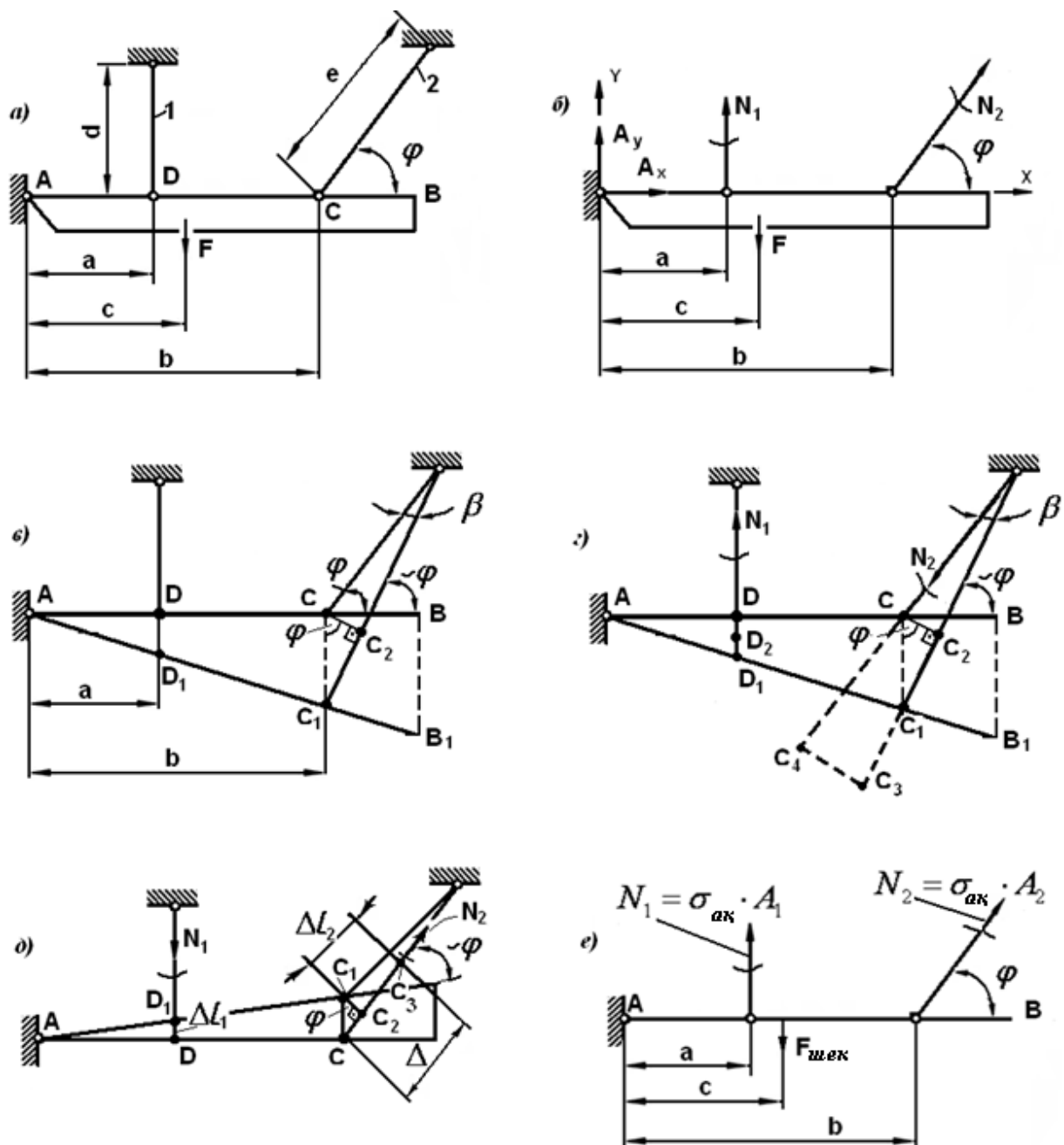
және бойлық күштер қатынасынан

$$N_1 = 162 \frac{2 \cdot 2,5}{3 \cdot 4,5 \cdot 2 \cdot 0,866} = 34,6 \text{ кН}.$$

Қауіпсіз кернеу әдісі бойынша сырықтардың созылу кезіндегі беріктік шартынан ($\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$) сырықтар көлденең қималарының аудандарын анықтаймыз

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{34,6 \cdot 10^{-3}}{160} = 2,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{162 \cdot 10^{-3}}{160} = 10,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$



2.5.2-сурет

Бірақ көлденең қималардың аудандары $A_2=3A_1$ берілген қатынасын да қанағаттандыру керек. Сондықтан бір жолата аламыз

$$A_2 = 10,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \quad A_1 = \frac{A_2}{3} = 3,36 \cdot 10^{-4} > 2,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Сол кезде сырықтардағы кернеулер келесіге тең болады

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{34,6 \cdot 10^{-3}}{3,36 \cdot 10^{-4}} = 100,5 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{162 \cdot 10^{-3}}{10,1 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа.}$$

2.5.2 мысал. 2.5.1 мысалда қарастырылған құрылым үшін табылған аудандарды және $F = 0$ қабылдап, сырықтар температурасының $\Delta t^\circ = 50^\circ \text{C}$ өзгеру себебінен пайда болатын кернеулерді анықтау керек.

Шешуі: Егер D және C нүктелерінде сырық деформацияларына еш нәрсе кедергі жасамаса, онда температураның өзгеруіне байланысты олар сәйкес $DD_1 = \Delta l_{1t} = \alpha \cdot d \cdot \Delta t^\circ$ және $CC_4 = \Delta l_{2t} = \alpha \cdot e \cdot \Delta t^\circ$ шамаларына ұзаратын еді (2.5.2,2 сурет). Болат үшін $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$. Жалпы жағдайда осы ұзарулар деформациялар теңдеуін қанағаттандырмайтын болғандықтан, сырықтарда N_1 және N_2 күштері пайда болады. Белгілілік үшін 1 сырық созылады, ал 2 сырық сығылады деп алайық, яғни AB денесі кейбір AB_1 орнын алады дейміз, сонда D_1 нүктесі D_2 , нүктесінен төмен, ал C_1 нүктесі C_4 нүктесінен жоғары орналасады. Егер есептеу нәтижесінде күштің таңбасы теріс шықса, онда оның шынайы бағыты қабылданған бағытқа қарсы болады.

Тепе-теңдік теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = N_1 \cdot a - N_2 \cdot b \cdot \sin \varphi = 0,$$

$$\text{осыдан } N_1 = N_2 \cdot \frac{b \cdot \sin \varphi}{a}.$$

ADD_1 және ACC_1 үшбұрыштарының ұқсастығынан β кішілігін ескеріп, аламыз $CC_4 = C_2C_3$, және

$$\frac{a}{b} = \frac{DD_1}{CC_1} = \frac{DD_1 \sin \varphi}{C_1 C_2} = \frac{(DD_2 + D_2 D_1) \sin \varphi}{(C_2 C_3 - C_3 C_1)} = \frac{(DD_2 + DD_1) \sin \varphi}{(CC_4 - C_3 C_1)} =$$

$$= \frac{(\Delta l_{1t} + \Delta l_{1cep}) \cdot \sin \varphi}{(\Delta l_{2t} - \Delta l_{2cep})} = \frac{(\alpha \cdot d \cdot \Delta t^\circ + \frac{N_1 \cdot d}{E \cdot A_1}) \sin \varphi}{\alpha \cdot e \cdot \Delta t^\circ - \frac{N_2 \cdot e}{E \cdot A_2}}.$$

Жоғарыда N_1 мен N_2 арасындағы алынған қатынасын осыған қойып және есептеулерді жүргізіп, аламыз $N_2 = -6,95 \text{ кН}$, $N_1 = -13,6 \text{ кН}$.

Сонымен 1 сырықта сығылу кернеулері $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -40,4 \text{ МПа}$, 2 сырықта – созылу кернеулері $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 6,88 \text{ МПа}$ орын алады.

2.5.3 мысал. 2.5.1 мысалда қарастырылған құрылым үшін табылған аудандарды және $F = 0$ қабылдап, 2 сырық жобаланған ұзындығынан 0,02% қысқа өнделгенін ескеріп, құрастырудан кейін пайда болатын кернеулерді анықтау керек.

Шешуі: Құрылымды құрастырған соң AB денесі 2.5.2,д суретте көрсетілгендей көлбеу орналасады. Сол кезде 1 сырық $DD_1 = \Delta l_1$ шамасына қысқарады, ал 2 сырық $C_2C_3 = \Delta l_2$ шамасына ұзарады, N_1 және N_2 күштерінің бағыттары бірден дұрыс анықталады. Сонда

$$\Delta = \frac{0,02}{100} e = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Тепе-теңдік теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\sum M_A = -N_1 \cdot a + N_2 \cdot b \cdot \sin \varphi = 0, \text{ осыдан } N_1 = N_2 \frac{b \cdot \sin \varphi}{a}.$$

ADD_1 және ACC_1 үшбұрыштарының ұқсастығын пайдаланып, деформациялар теңдеуін жазуға болады. Аламыз $\frac{DD_1}{CC_1} = \frac{a}{b}$; бірақ

$$CC_1 = \frac{CC_2}{\sin \varphi} = \frac{CC_3 - C_2C_3}{\sin \varphi} = \frac{\Delta - \Delta l_2}{\sin \varphi}, \text{ осыдан аламыз } \frac{\Delta l_1 \cdot \sin \varphi}{\Delta - \Delta l_2} = \frac{a}{b}.$$

Ұзаруларды күштер арқылы өрнектеп, жазамыз

$$\frac{N_1 \cdot d \cdot \sin \varphi}{E \cdot A_1} = \frac{a}{b} \left(\Delta - \frac{N_2 \cdot e}{E \cdot A_2} \right).$$

Осыған тепе-теңдік теңдеуінен алынған $N_1 = N_2 \frac{b \cdot \sin \varphi}{a}$ өрнегін қойып, түрлендіру мен есептеуді жүргізіп анықтаймыз $N_2 = 20 \text{ кН}$, $N_1 = 39 \text{ кН}$. Сонда сырықтардағы кернеулер келесіге тең болады

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -108 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 19,8 \text{ МПа}.$$

2.5.4 мысал. 2.5.1 мысалдың шарты бойынша көлденең қималардың аудандарын межелік күйлер әдісін қолданып таңдау керек; екі жағдайдағы материал шығынын салыстыру керек.

Шешуі: Жүйенің межелік жағдайын қарастырып (2.5.2, е сурет), тепе-теңдік теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\sum M_A(F_i) = \sigma_{ак} \cdot A_1 + \sigma_{ак} \cdot A_2 \cdot b \cdot \sin \varphi - F_{меж} \cdot c = 0$$

мұндағы $F_{меж}$ - жүйенің межелік жүктемесі (жүк көтергіш қабілеті).

Осы теңдеуді $[n]$ мәніне бөліп және $A_2 = 3A_1$ алып, $\frac{F_{меж}}{[n]} = F$

болатынын ескеріп, жазамыз $\frac{\sigma_{ак} \cdot A_1}{[n]} (a + 3b \cdot \sin \varphi) - F \cdot c = 0$, осыдан

аламыз

$$A_1 = \frac{F \cdot c \cdot [n]}{\sigma_{ак} \cdot (a + 3b \cdot \sin \varphi)} = \frac{280 \cdot 2,5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{240 \cdot (2 + 3 \cdot 4,5 \cdot 0,866)} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2,$$

$$A_2 = 3A_1 = 9,6 \text{ см}^2.$$

Сырықты өндеу үшін G_k қауіпсіз кернеу әдісімен және $G_{шек}$ межелік күй әдісімен анықталатын материал шығынын салыстырамыз

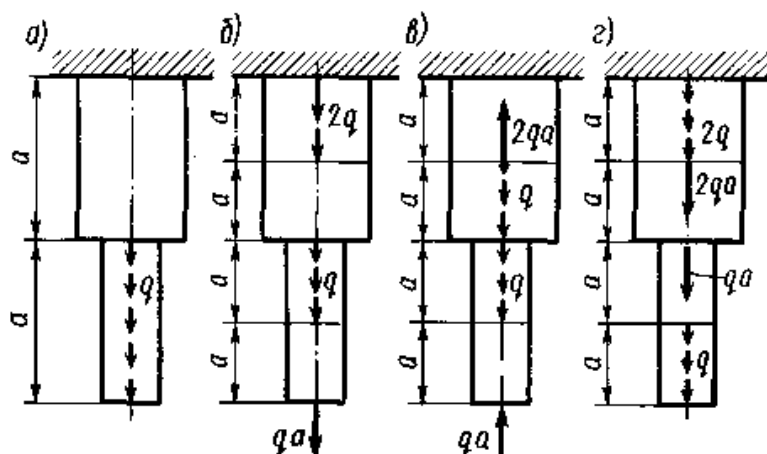
$$\frac{G_k}{G_{шек}} = \frac{3,36 \cdot 200 + 10,1 \cdot 250}{3,2 \cdot 200 + 9,6 \cdot 250} = 1,05.$$

Сөйтіп, межелік күй әдісі материалдың 5% тең үнемдігін береді.

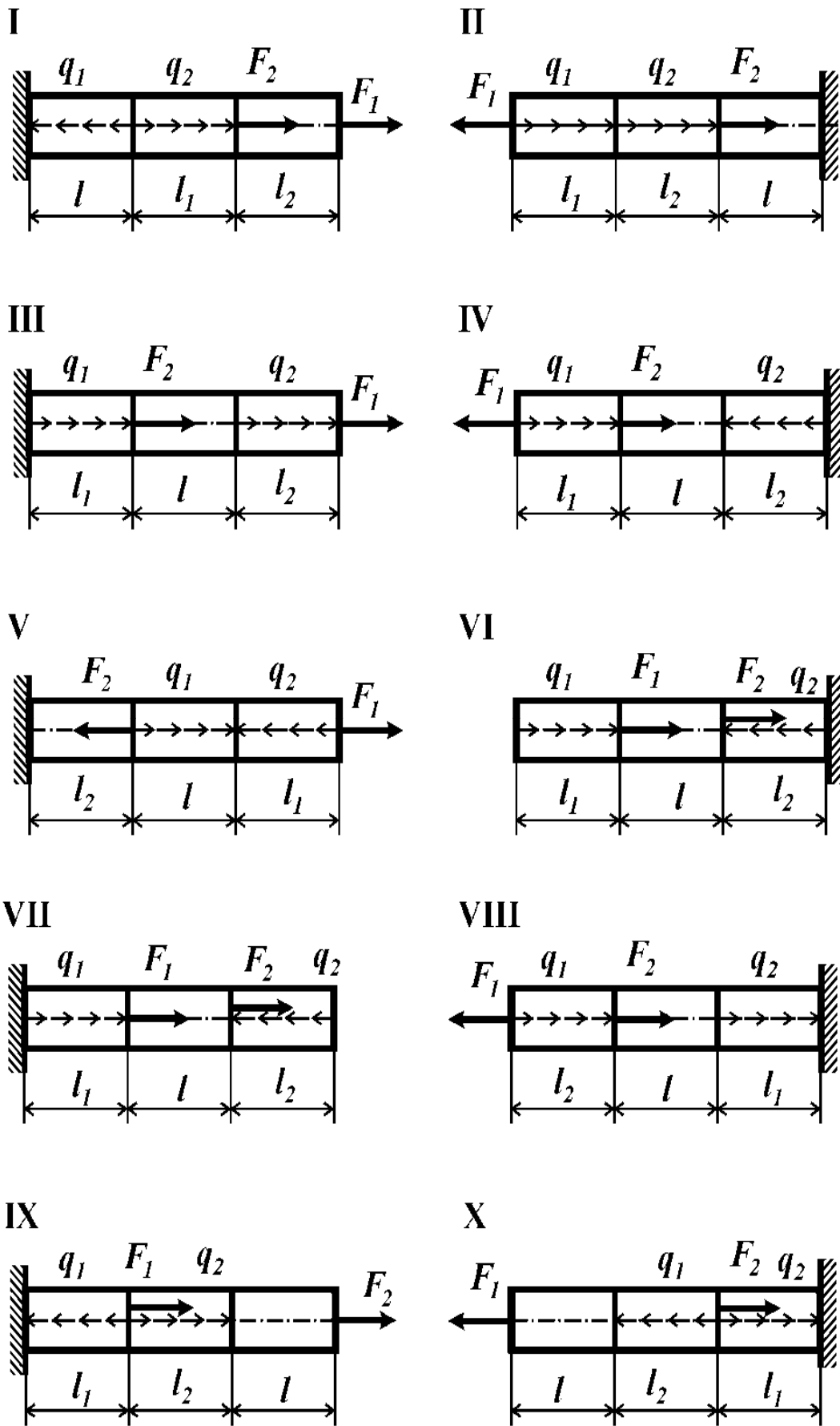
2.6 «Созылу және сығылу» тақырыбы бойынша есептер

2.6.1 есеп. 2.6.1 суретте көрсетілген, қадалған және таралған күштермен жүктелген сырықтар үшін бойлық күштер эпюрлерін тұрғызыңыз.

2.6.2 есеп. 2.6.2 суретте көрсетілген қадалған және таралған күштермен жүктелген сырықтар үшін бойлық күш эпюрлерін тұрғызу керек. Берілгендері 2.6.1 кестеде келтірілген. Оларды 4-цифралы вариант бойынша алу керек.



2.6.1-сурет



2.6.2-сурет

2.6.1 кесте

Варианттың цифрасы	Цифраның варианттағы реттік нөмірі						
	1		2	3		4	
	F_1/ql	l_1/l	q_1/q	q_2/q	l_2/l	F_2/ql	Сұлбаның нөмірі
1	-1,0	1,0	-1,0	1,0	2,0	2,0	I
2	2,5	1,5	2,0	-2,0	1,5	-2,5	II
3	-2,0	2,0	1,0	-2,0	2,5	1,0	III
4	1,5	2,5	-2,0	1,0	1,0	-1,5	IV
5	-1,0	3,0	1,0	2,0	1,0	3,0	V
6	1,5	2,0	-1,0	2,0	1,5	-2,0	VI
7	-2,0	2,5	2,0	-1,0	2,5	1,5	VII
8	3,0	1,0	-2,0	-1,0	2,0	-1,0	VIII
9	-1,5	1,5	-1,0	1,0	1,5	2,0	IX
0	2,0	2,0	1,0	2,0	1,0	-3,0	X

2.6.3 есеп. Салмағы $G=1,2 \text{ кН}$ ауыр қатаң тақта (2.6.3 сурет) $F=8 \text{ кН}$ күшімен жүктелген. Беріктік шартынан CD сырығының диаметрін анықтаңыз, егер $\alpha=45^\circ$, $[\sigma]=150 \text{ Н/мм}^2$.

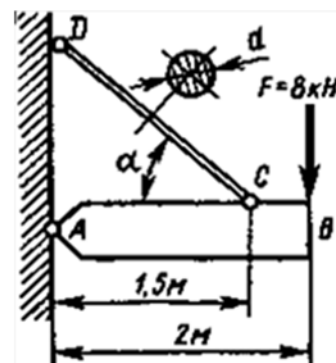
Жауабы: 12 мм.

2.6.4 есеп. Арқан диаметрі 2мм болат 100 сымнан тұрады. Арқандағы кернеулерді санап шығарыңыз, егер арқанды созып тұрған күш 50 кН тең болса.

Жауабы: 159 МПа.

2.6.5 есеп. Рычагты механизмнің 1 және 2 сырықтарының беріктік шартынан (2.6.4 сурет) F күшінің қауіпсіз шамасын анықтаңыз, егер $d=4 \text{ мм}$, $[\sigma]=140 \text{ МПа}$.

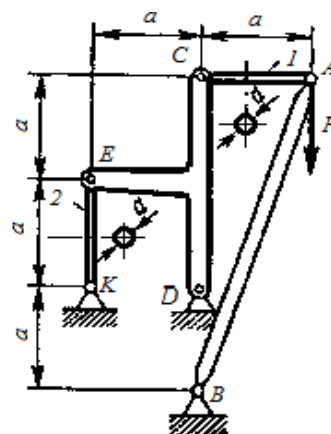
Жауабы: 2,64 кН.



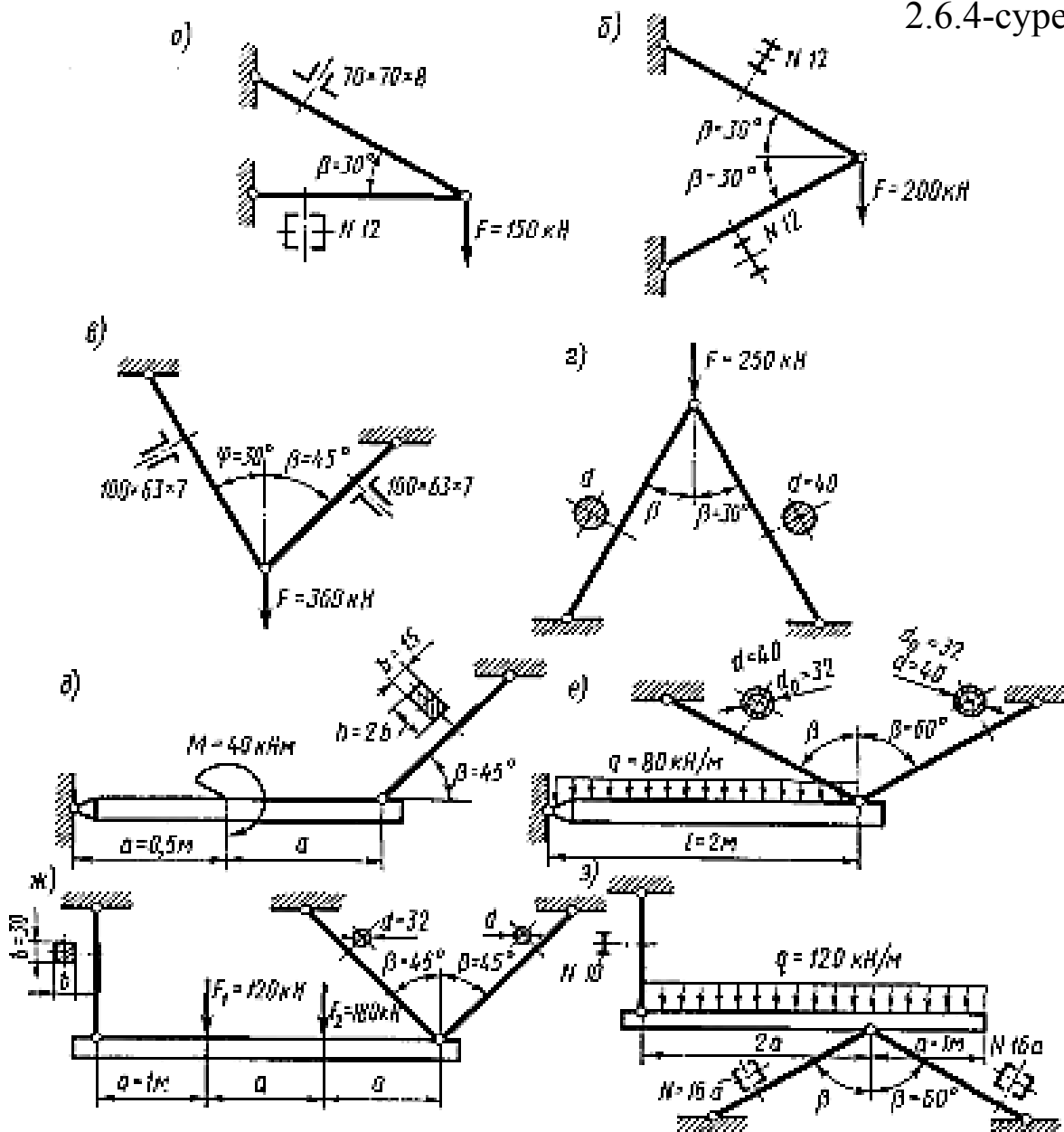
2.6.3-сурет

2.6.6 есеп. Сырықтардың (2.6.5 сурет) көлденең қималарындағы кернеулерді санап шығарыңыз.

Жауабы: а) 140 МПа, 97,8 МПа; б) 136 МПа; в) 120 МПа, 83,6 МПа; г) 115 МПа, д) 126 МПа; е) 177 МПа; ж) 156 МПа, 141 МПа; з) 74,7 МПа.

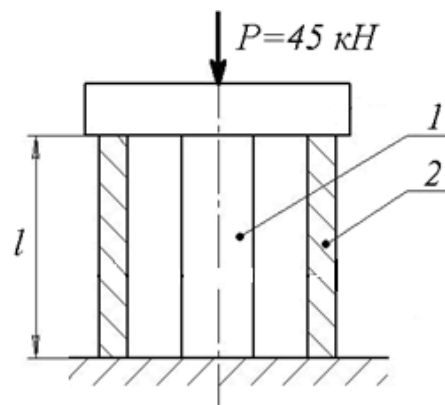


2.6.4-сурет



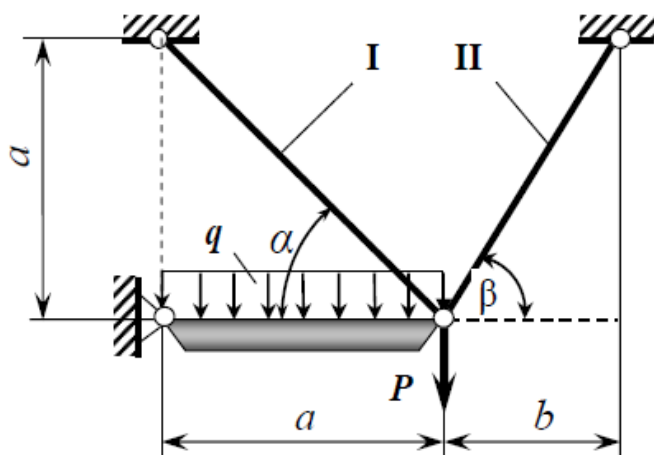
2.6.5-сурет

2.6.7 есеп. $P = 45 \text{ кН}$ күші абсолют қатаң тақта арқылы көлденең қимасының ауданы 15 см^2 тұтас болаттан 1 цилиндріне және көлденең қимасының ауданы 20 см^2 жезден жасалған ойық 2 цилиндріне беріледі (2.6.6 сурет). Күш екі цилиндрдің өстерінің бойымен әсе етіп тұр. Табу керегі: болат және жез цилиндрлердегі бойлық күштер N_1 және N_2 ; болат және жез цилиндрлердегі бойлық күштерді бірдей қылдыратын ($N_1 = N_2$) температура өзгерісін. Берілгендері: $P = 45 \text{ кН}$; $A_1 = 15 \text{ см}^2$; $A_2 = 20 \text{ см}^2$; $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; температуралық ұлғаю еселігі болат үшін $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град}$, жез үшін $\alpha_2 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/град}$.

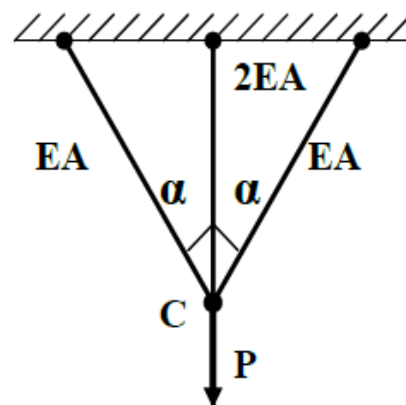


2.6.6-сурет

Жауабы: $N_1 = -27 \text{ кН}$, $N_2 = -18 \text{ кН}$; $9,4^\circ\text{C}$; 16°C .



2.6.7-сурет



2.6.8-сурет

2.6.8 есеп. 2.6.7 суретте көрсетілген конструкция бір шетінде топсалы екінші шетінде I және II сырықтардың көмегімен бекітілген абсолют қатаң арқалықтан тұрады. Арқалыққа қадалған P күші және таралған q күші түсіп тұр.

Берілгендері: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$; $P = 5 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}^2$; $A_2 = 2A_1$; $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $a = 0,5 \text{ м}$; $b = 0,4 \text{ м}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 51^\circ$.

Табу керегі: қауіпсіз кернеулер негізіндегі беріктік шартынан екі сырықтың көлденең қималарының диаметрлерін. Алынған шамаларды $0,5 \text{ мм}$ дәлдігімен үлкен жағына дөңгелектендіріңіз.

Жауабы: $d_1 = 5,5 \text{ мм}$, $d_2 = 7,5 \text{ мм}$.

2.2.9 есеп. 2.6.8 суретте көрсетілген конструкция үшін $[\sigma]$ қауіпсіз кернеуі берілген деп оған түсірілген күштің $[P]$ қауіпсіз шамасын табыңыз.

Жауабы: $[P] = 2A(1 + \cos^3 \alpha) \cdot [\sigma]$.

2.7 Бұралу. Бұраушы моменттердің эпюрі

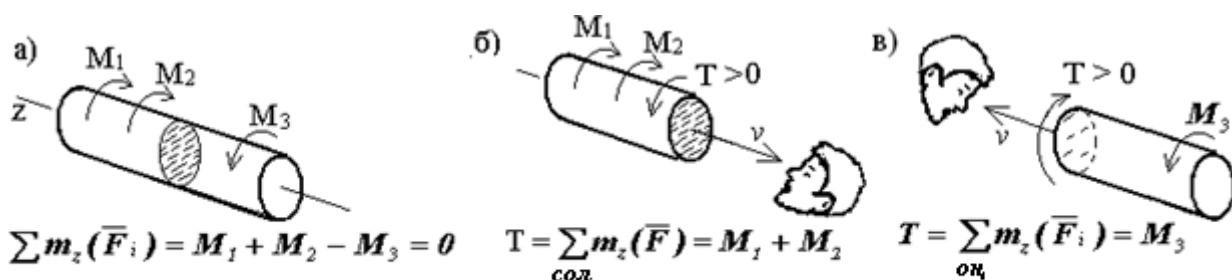
Бұралу деп сырықтың көлденең қималарында тек қана бұраушы момент $T = M_z$ орын алып (2.1.1,2 сурет), басқа ІКФ нөлге тең болатын сырықтың жүктелу түрі аталады.

Қималар әдісі бойынша сырықтың кез келген көлденең қимасындағы бұраушы момент T сырықтың кесілген бір бөлігіне түсірілген сыртқы күштердің бойлық өске қатысты моменттерінің алгебралық қосындысына тең

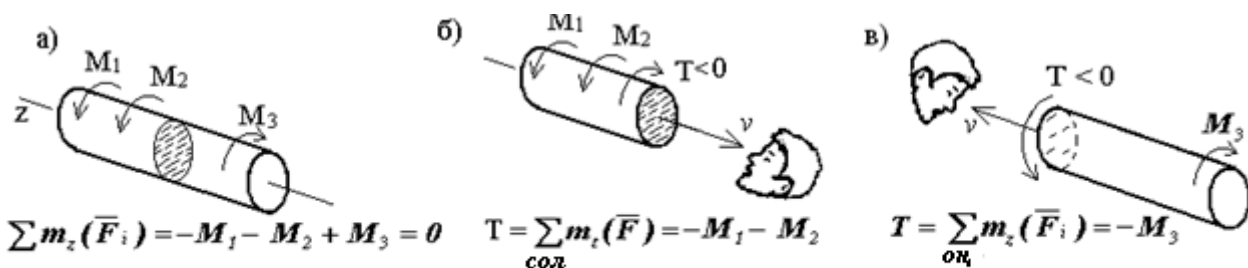
$$T = M_z = \sum_{\text{бөл}} M_z(\bar{F}_i). \quad (2.7.1)$$

Сырыққа күштер жұптары да түсірілген болса, (2.7.1) формуласының оң жағына олардың моменттері де кіреді.

Егер байқаушы көлденең қимасының сыртқы нормалі ν жағынан қарағанда, бұраушы момент сағат тілінің жүрісіне қарсы бағытталады болса, онда бұраушы момент T шартты түрде оң (2.7.1 сурет), ал сағат тілінің жүрісіне бағытталса – теріс деп есептеледі (2.7.2 сурет).



2.7.1 сурет



2.7.2-сурет

Осыған сәйкес, егер байқаушы сыртқы күш немесе күштер жұбының моментін сағат тілінің жүрісіне бағытталатынын көрсетсе, онда (2.7.7) өрнегінде сол моментті “+” таңбасымен, ал сағат тіліне қарсы бағытталатынын көрсетсе, онда «-» таңбасымен алу керек.

Өсі түзу сызықтық сырықтардың бұралуы әдетте 2.7.1 және 2.7.2 суреттерде көрсетілгендей, өске перпендикуляр жазықтықтарда жататын күштер жұптарының әсерінен пайда болады. Егер осыған қосымша сырық бойымен m қарқындылығымен таралған сыртқы моменттер болса, онда (2.7.1) формуласы келесі түрде жазылады

$$T = \sum_{\text{бөл}} M + \sum_{\text{бөл}} \int m \cdot dz . \quad (2.7.2)$$

Сурет жазықтығына перпендикуляр жазықтықта жатқан күштер жұптарын көрсету үшін екі дөңгелек түрінде шартты кескін қолданылады, сол кезде нүктесі бар дөңгелек байқаушыға бағытталған күшті, ал крестісі бар дөңгелек – байқаушыдан әрі қарай бағытталған күшті білдіреді.

Бұраушы T моменттерінің эпюрін тұрғызу мысалдарын қарастырайық.

2.7.1 мысал. 2.7.3,а суретте көрсетілген сырық үшін T эпюрін тұрғызу керек.

Шешуі: Сырықта 2 аралық бар. Екеуінде де бұраушы T моментін анықтағанда, қиманың сол жағындағы сырық бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз, сол кезде қатты бекітпенің реактивтік моментін анықтамауға болады.

1-ші аралықта (2.7.3,б сурет): $0 \leq z_1 \leq a$, $T_1 = \sum_{\text{сол}} M = M$.

2-ші аралықта (2.7.3,в сурет): $a \leq z_2 \leq a+b$, $T_2 = \sum_{\text{сол}} M = M - 3M = -2M$.

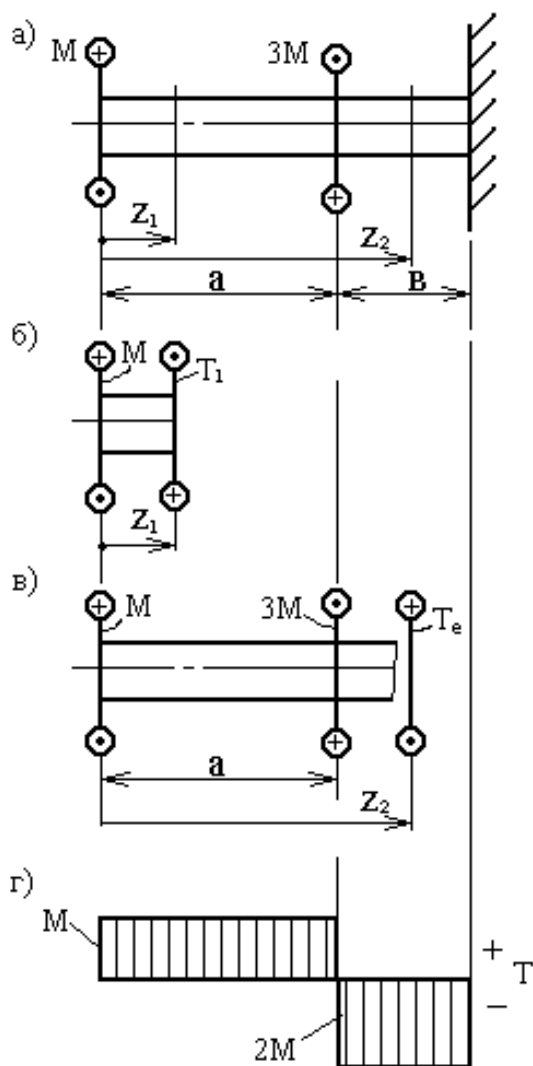
Әр аралықта бұраушы момент тұрақты, T эпюрі 2.7.3, г суретте келтірілген.

2.7.2 мысал. 2.7.4,а суретте көрсетілген сырық үшін T эпюрін тұрғызу керек.

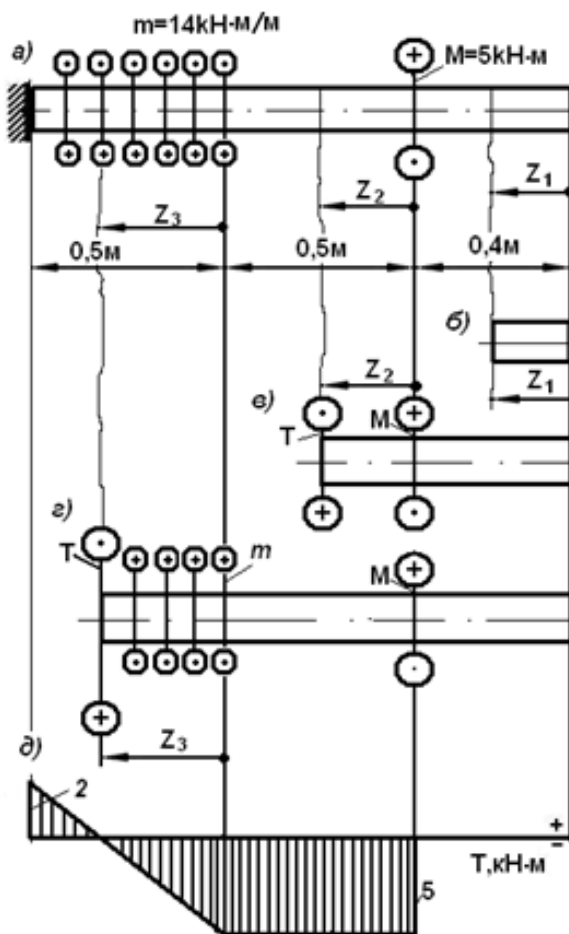
Шешуі: Реактивтік моментті анықтамай ақ, сырықтың оң жағынан бастап 3 аралықты бірінен соң қарастырамыз.

1-ші аралықта (2.7.4,б сурет): $0 \leq z_1 \leq 0,4 \text{ м}$, $T = \sum_{\text{оң}} M = 0$.

2-ші аралықта (2.7.4,в сурет): $0 \leq z_2 \leq 0,5$, $T = \sum_{\text{оң}} M = -M = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.



2.7.3-сурет



2.7.4-сурет

3-ші аралықта (2.7.4,г сурет): $0 \leq z_3 \leq 0,5 \text{ м}, T = \sum_{\text{он}} M = -M + m \cdot z_3$.

Бұл аралықта T шамасы қиманың z_3 координатасына сызықты тәуелді, сондықтан эпюр көлбеу түзу болып келеді. Аралықтың шеткі қималарында T мәндерін анықтаймыз: $z_3=0$ болғанда $T=-5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $z_3=0,5 \text{ м}$ болғанда $T=-5+14 \cdot 0,5=2 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

T эпюрі 2.7.4,д суретте көрсетілген.

2.8 Бұралу кезіндегі кернеулер. Бұралу бұрышы және деформацияның потенциалық энергиясы

Диаметрі d дөңгелек көлденең қимасы бар сырықтың бұралу кезінде оның көлденең қималарында τ жанама кернеулері пайда болады (2.8.1,а сурет), олар қарастырылатын нүктеден қиманың центріне дейін ρ арақашықтығына пропорционал болады

$$-\tau = \frac{T}{J_p} \rho$$

(2.8.1)

мұндағы $J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ - дөңгелек қиманың полюстік инерция моменті.

Ең үлкен жанама кернеулер центрден ең үлкен қашықтықта орналасқан нүктелерде орын алады және олар келесіге тең

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p}, \quad (2.8.2)$$

мұндағы W_p - қиманың полюстік қарсыласу моменті; дөңгелек қима үшін

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi \cdot d^4 / 32}{d / 2} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.8.3)$$

Қимасы дөңгелек сырықтың l ұзындығымен аралықтың φ бұралу бұрышын, T және d тұрақты болған жағдайда келесі формуламен анықтайды

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_p}, \quad (2.8.4)$$

мұндағы $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ - материалдың ығысу модулі.

Егер сырықтың бірнеше аралығы болса және T мен d шамасы кез келген заңдылықпен өзгертін болса, онда сырықтың толық бұралу бұрышы келесі формуламен анықталады

$$\varphi = \sum \int \frac{T \cdot dz}{GJ_p}. \quad (2.8.5)$$

мұндағы интегралдау әр аралықтың ұзындығы бойынша, ал қосу – сырықтың барлық аралықтары бойынша орындалады.

Сақина түріндегі қима үшін жоғарыдағы формулаларды қолданады, сол кезде

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \approx 0,1 D^4 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad (2.8.6)$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] \approx 0,2 D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad (2.8.7)$$

мұндағы D мен d – қиманың сәйкес сыртқы және ішкі диаметрлері.

Сырықтың қимасы дөңгелек емес жағдайда жоғарыдағы формулаларда W_p және J_p орнына сәйкес W_δ және J_δ , яғни қиманың бұралу кезіндегі қарсыласу моментін және инерция моментін қою керек, олардың өрнектері қиманың әртүрлі формалары үшін оқулықтарда және анықтамалықтарда келтіріледі. Қималары дөңгелек және сақина тәрізді сырықтар үшін $W_\delta = W_p$, $J_\delta = J_p$.

Бұралу кезінде сырықта пайда болған потенциялық энергиясы келесі формуламен анықталады

$$U = \sum \int \frac{T^2 \cdot dz}{2G \cdot J_p}, \quad (2.8.9)$$

мұндағы интегралдау және қосу (2.8.4) формуласындағыдай орындалады.

2.8.1 мысал. 2.8.2,а суретте көрсетілген білік үшін бұраушы моменттердің, кернеулердің және бұралу бұрыштардың эпюрлерін тұрғызу керек. Ығысу модулі $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Сырықта жинақталған потенциялық энергияны анықтау керек.

Шешуі: Қарастырылатын білік қимасының оң жағында түсірілген сыртқы моменттерді қосып, бұраушы моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.8.2,б сурет).

Әр аралықтағы максималдық қ жанама кернеулер (2.8.4) формуласымен анықталады, сонда I аралық үшін

$$W_P = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 24,5 \text{ см}^3, \text{ II және}$$

III аралық үшін

$$W_P' = \frac{\pi \cdot D^3}{16} = 196,3 \text{ см}^3.$$

Білік өсі бойымен τ_{max} өзгеру эпюрі 2.8.2,в суретте көрсетілген; үш аралық үшін радиус бойымен τ өзгеру эпюрі 2.8.2,г суретте көрсетілген.

φ бұралу бұрыштарының эпюрін $\varphi=0$ болатын қатаң бекітпеден бастап тұрғызамыз (2.8.2,д сурет).

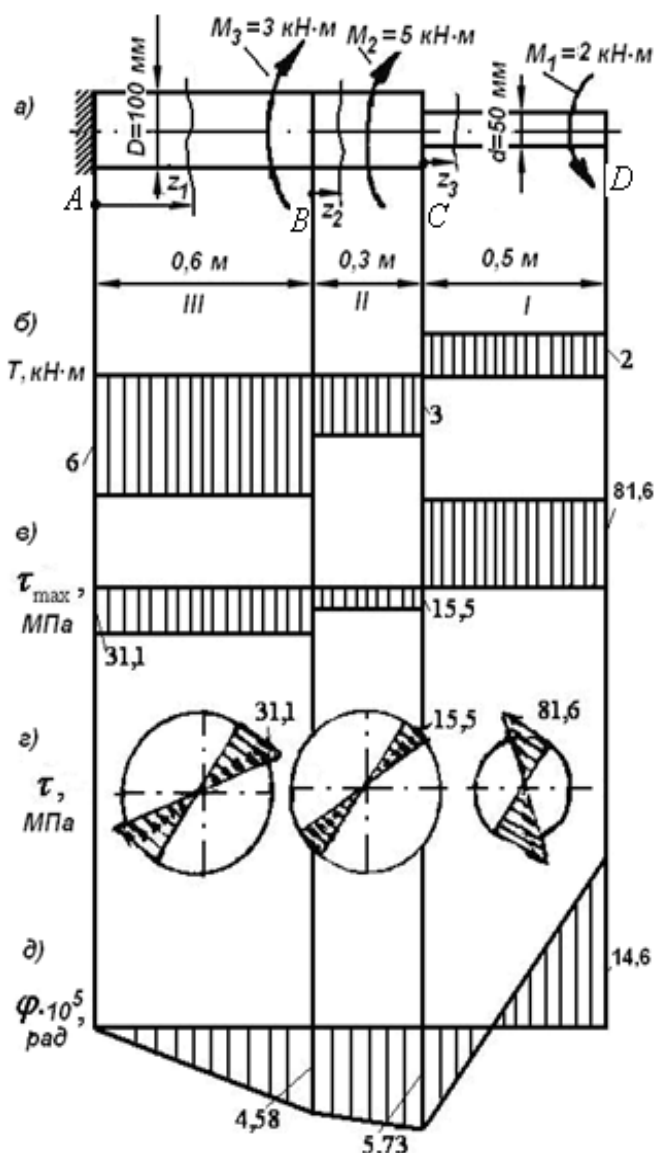
AB аралығында қатты бекітпеден z_1 қашықтығында орналасқан қиманың бұралу бұрышы $\varphi_{z_1} = \frac{T_{III} \cdot z_1}{G \cdot J_P'}$, мұндағы

$$J_P' = \frac{\pi \cdot D^4}{32} = 981,7 \text{ см}^4.$$

φ_{z_1} бұрышының z_1 координатасына тәуелділігі түзу сызықпен кескінделеді: $z_1=0$ болғанда $\varphi_{z_1}=0$, $z_1=0,6$ м болғанда $\varphi_{z_1} = \varphi_B = 4,58 \cdot 10^{-5}$ рад.

BC аралығында осы бұрышқа келесі шама қосылады $\frac{T_{II} \cdot z_2}{G \cdot J_P'}$, мұндағы z_2 координатасы B қимасынан бастап алынады. CD аралығында φ эпюрі тап осылай тұрғызылады.

Деформацияның потенциалдық энергиясы келесідей анықталады



2.8.2-сурет

$$U = \sum \frac{T_i^2 \cdot l_i}{2G \cdot J_{pi}} = \frac{(2 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,614 \cdot 10^{-10}} + \frac{(3 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,3}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 9,82 \cdot 10^{-10}} + \frac{(6 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,6}{2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 9,82 \cdot 10^{-10}} = 3,583 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

2.9 Бұралы кезіндегі қауіпсіз кернеулер әдісі бойынша беріктік пен қатаңдыққа есептеу

Қауіпсіз кернеулер әдісі бойынша қимасы тұрақты сырықтың бұралы кезіндегі беріктікке есептелуі келесі формуламен орындалады

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_{\phi}} \leq [\tau], \quad (2.9.1)$$

мұндағы T_{max} – модулі ең үлкен бұраушы момент;

W_{ϕ} – сырық көлденең қимасының бұралуға қарсыласу моменті, ол қимасы дөңгелек сырық үшін W_p полюстік қарсыласу моментіне тең;

$[\tau]$ – қауіпсіз жанама кернеу, ол сырық материалы үшін межелік кернеудің бір бөлігіне тең

$$[\tau] = \frac{\tau_{меж}}{[n]}. \quad (2.9.10)$$

Пластикалық материалдар үшін $\tau_{меж}$ ретінде ығысу кезіндегі аққыштық шегі $\tau_{ак}$, ал морт материалдар үшін - ығысу кезіндегі беріктік шегі $\tau_{бер}$ алынады.

Кейбірде l ұзындығындағы ϕ бұралы бұрышы $[\phi]$ қауіпсіз бұралы бұрышынан аспау бойынша қосымша шарт қойылады. Осы жағдайда қатаңдыққа есептеу тұрақты қима және тұрақты бұраушы момент үшін келесі шарт бойынша орындалады

$$\phi = \frac{T \cdot l}{G \cdot J_{\phi}} \leq [\phi]. \quad (2.9.11)$$

Кейбірде қатаңдық шартын салыстырмалы бұралы бұрышына қояды

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} = \frac{T}{G \cdot J_{\phi}} \leq [\theta]. \quad (2.9.12)$$

Айналудағы біліктер үшін білік арқылы берілетін P қуаты мен біліктегі момент (ол T бұраушы моментіне тең) арасындағы тәуелдікті қолдану керек болады

$$P = T \cdot \omega, \quad (2.9.13)$$

мұндағы $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ - біліктің бұрыштық жылдамдығы (rad/c), n - біліктің бір минут ішінде жасайтын айналым саны (айналу жиілігі).

2.9.1 мысал. Турбинаның қуыс білігі айналу жиілігі 100 айн/мин болғанда 5 МВт тең қуат береді. Біліктің ішкі d_1 диаметрі сыртқы диаметрдің жартысына $d/2$ тең, қауіпсіз кернеу 30 МПа, қауіпсіз салыстырмалы бұралу бұрышы $[\theta] = 2$ град/м, ығысу модулі $G = 8 \cdot 10^4$ МПа тең деп алып, біліктің d диаметрін анықтау керек.

Шешуі: Білік арқылы берілетін моментті (2.9.13) формуласынан анықтаймыз

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{5 \cdot 30}{\pi \cdot 100} = 0,477 \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

(2.9.1) беріктік шартынан қиманың полюстік қарсыласу моментінің қажетті мәнін анықтаймыз

$$W_p \geq \frac{T}{[\tau]} = \frac{0,477}{30} = 1,59 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3.$$

(2.8.7) формуласы бойынша

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^4 \right],$$

Осыдан

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^4 \right]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,59 \cdot 10^{-2}}{\pi [1 - 0,5^4]}} = 0,442 \text{ м} = 442 \text{ мм}.$$

Қатандық шартынан қиманың инерция моментінің қажетті мәнін анықтаймыз

$$J_p \geq \frac{T}{G \cdot [\theta]} = \frac{0,477 \cdot 180}{8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \pi} = 1,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

(2.8.6) формуласынан табамыз

$$d = \sqrt[4]{\frac{J_p \cdot 32}{\pi \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^4 \right]}} \geq \sqrt[4]{\frac{1,71 \cdot 10^{-4} \cdot 32}{\pi [1 - 0,5^4]}} = 0,0481 \text{ м} = 48,1 \text{ мм.}$$

Осыдан анықтаушы шарт ретінде беріктік шарты болатынын көреміз, сондықтан келесіні аламыз: $d=442 \text{ мм}$, $d_1=221 \text{ мм}$.

2.9.2 мысал. 2.9.1 мысалдың шарттары үшін тұтас біліктің d_m диаметрін анықтап, екі жағдайдағы материал шығынын салыстыру керек.

Шешуі: 2.9.1 мысалда табылған W_p қажетті шамасы бойынша диаметрді анықтаймыз

$$d_m = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,59 \cdot 10^{-2}}{\pi}} = 0,433 \text{ м.}$$

Қажетті J_p бойынша диаметрді табамыз

$$d_m = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot J_p}{\pi}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,71 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,204 \text{ м.}$$

Соңында $d_m=443 \text{ мм}$ аламыз, ал материал шығыны қима ауданына пропорционал болады, сонда

$$\frac{A_{\text{тұтас}}}{A_{\text{қыс}}} = \frac{\pi \frac{d_m^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]} = \frac{d_m^2}{d^2 (1 - 0,5^2)} = \frac{433^2}{442^2 \cdot 0,75} = 1,28.$$

Сонымен, тұтас білік жағдайында материал шығыны 28% жоғары болады.

2.10 Элементтері бұралу

жағдайындағы статикалық түрде анықталмайтын жүйелер

Статикалық анықталмауды ашу статика теңдеулері мен деформациялар теңдеуін бірге шешуге келтіріледі. Мысалы, екі шеті қатты бекітілген, тек қана сыртқы күштер жұптарымен жүктелген және бірнеше түзу сызықты, өстері беттескен элементтерден тұратын жүйе үшін тепе-теңдік теңдеу барлық сыртқы актив және реактив күштер жұптарының алгебралық қосындысын нөлге теңестіру, ал деформациялар теңдеуі - барлық аралықтардың бұралу бұрыштарының алгебралық қосындысын нөлге теңестіру түрінде жазылады.

2.10.1 мысал. 2.10.1,а суретте көрсетілген білік үшін $\tau_{ақ}=200$ МПа, $[n]=1,5$, $M=15$ кН·м, $l=1$ м тең деп алып, беріктік шартынан білік диаметрін анықтау керек. Максималдық жанама кернеулердің және бұралу бұрыштардың эпюрлерін тұрғызу керек.

Шешуі: A және C қималарындағы белгісіз реактивтік моменттерді M_A және M_C арқылы белгілеп (2.10.1,б сурет), тепе-теңдік теңдеулерін келесі түрде жазамыз

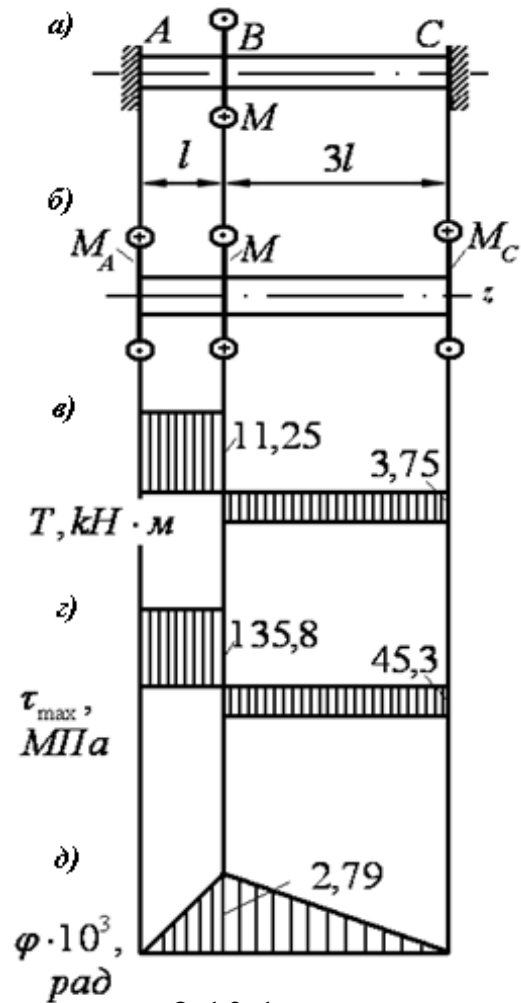
$$\sum M_z = -M_A + M - M_C = 0.$$

Деформациялар теңдеуін A және C қималары қозғалмайтындығынан аламыз

$$\varphi_{AC} = -\frac{M_A \cdot l}{G \cdot I_p} + \frac{(M - M_A) \cdot 3l}{G \cdot I_p} = 0.$$

Екі теңдеуді бірге шешіп, аламыз $M_A = \frac{3}{4}M = 11,25$ кН·м,

$M_C = \frac{1}{4}M = 3,75$ кН·м. Бұраушы моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.10.1,в сурет).



2.10.1-сурет

Беріктік шартынан $[\tau] = \frac{\tau_{ак}}{[n]}$ ескеруімен біліктің диаметрін

анықтаймыз

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{max} \cdot [n]}{\pi \cdot \tau_{ак}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 11,25 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{\pi \cdot 200 \cdot 10^6}} = 7,55 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Диаметрдің мәнін сызықты өлшемдердің стандарт қатарындағы ең жақын мәніне дейін дөңгелектендіріп алуға болады, сонда $d=75$ мм аламыз. Жуықтау кішірейту арқылы орындалғандықтан, білік жүктемесінің асыра тиілгендігі болады; кернеулер полюстік қарсыласу моменттеріне кері пропорционал, ал олар диаметрлердің үшінші дәрежесіне пропорционал, сонда жүктеменің асыра тиілгендігі

келесіге тең $\frac{75,5^3 - 75^3}{75^3} 100\% = \left[\left(\frac{75,5}{75} \right)^3 - 1 \right] 100\% \approx 2,0\%$, және

шамасы аз болғандықтан, оны қабылдауға болады.

Алынған диаметр үшін максималдық жанама кернеулердің және бұралу бұрыштардың эпюрлері 2.10.1, 2, d суреттерде көрсетілген.

2.11 «Бұралу» тақырыбы бойынша есептер

2.11.1 есеп. Дөңгелек қималы, бұралу жағдайындағы біліктің қимасының ауданын екі есе үлкейткенде одағы максимал жанама кернеудің шамасы қалай өзгереді?

Жауабы: 2,8 есе кемиді.

2.11.2 есеп. Дөңгелек қималы, бұралу жағдайындағы сырықтың максимал жанама кернеудің шамасы қалай өзгереді, егер бұраушы момент 2 есе өссе, ал сырықтың диаметрі 1,5 есе өссе?

Жауабы: 1,69 есе кемиді.

2.11.3 есеп. Көлденең қимасы сақина тәріздес сырықтың қима өлшемдерін табыңыз, егер оның беріктігі көлденең қимасының диаметрі 300 мм дөңгелек сырықтың беріктігімен бірдей болса, ал массасы 2 есе аз болса.

Жауабы: 360 және 288 мм.

2.11.4 есеп. Беріктікке есептеу негізінен көлденең дөңгелек қималы біліктің диаметрін табыңыз, егер $[\tau]=40$ МПа; білік $P=48$ кВт қуатын береді және $n = 970$ айн/мин жылдамдығымен айналады.

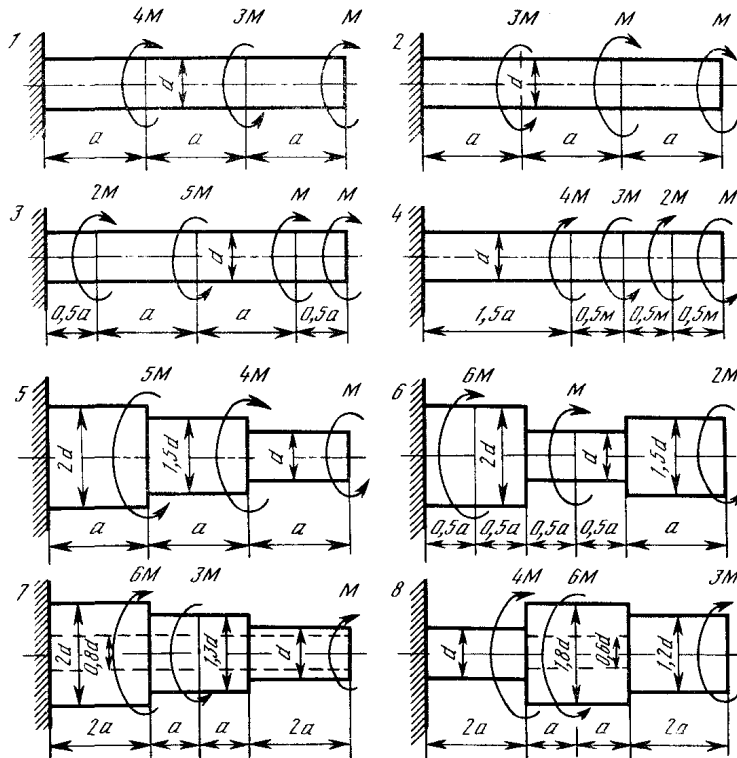
Жауабы: 40 мм.

2.11.5 есеп. Бұралу жағдайындағы дөңгелек қималы сырықтың қатаңдығы оның көлденең қимасының ауданын екі есе үлкейткенде неше есе өседі?

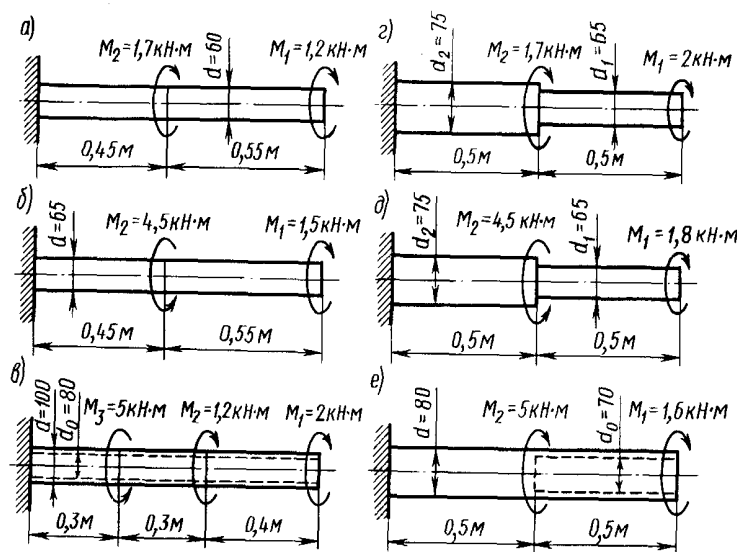
Жауабы: 4 есе.

2.11.6 есеп. 2.11.1 суретте көрсетілген сырықтар үшін $M_{бұр}$, ең үлкен жанама кернеулер және бұралу бұрыштар эпюрлерін салыңыз.

2.11.7 есеп. 2.11.2 суретте көрсетілген сырықтар үшін ең үлкен жанама кернеулер мен ең үлкен салыстырмалы бұралу бұрыштарды табыңыз



2.11.1-сурет



2.11.2-сурет

Жауабы:

Сұлба	а)	б)	в)	г)	д)	е)
$\tau_{max}, МПа$	68,4	55,7	27,6	44,6	33,4	65,6
$\theta_{max}, град/м$	1,63	1,23	0,4	0,86	0,74	1,18

2.12 Ығысу кезіндегі беріктікке есептеу

Ығысу деп сырықтың көлденең қималарында тек қана көлденең күш (кесу күші) Q орын алып, басқа ІКФ нөлге тең болатын сырықтың жүктелу түрі аталады. Көптеген жағдайда осыған жақын жүктелуді машина немесе құрылым элементтерін біріктіруге арналған тетікбөлшектер алады - тойтармалар, штифттар, бұрандалар (саңылаусыз қойылған жағдайда) және т.б. (2.12.1 сурет).

Аталып кеткен тетікбөлшектер жұмысының шынайы шарттары ығысудан күрделі болып келеді. Олар құрылымды өндеудің және құрастырудың технологиясына айтарлықтай тәуелді болады. Сонымен элементтердің көлденең қималарында тек қана көлденең күш Q емес, қосымша июші момент M және соған байланысты тік кернеулер σ пайда болады. Бірақ инженерлік тәжірибеде осы тетікбөлшектерді есептеу шартты түрде орындалады, ол келесі болжамдарға негізделеді:

а) көлденең қималарда бір ғана ІКФ орын алады – көлденең күш Q ;

б) көлденең қималар бойымен жанама кернеулер бірқалыпты таралады, яғни $\tau = Q/A$;

в) егер біріктіру бірнеше бірдей біріктіру элементтері көмегімен орындалса (бұрандалар, тойтармалар және т.б.), онда жүктеме олардың арасында бірқалыпты үлестіріледі деп есептеледі (біріктірілетін тетікбөлшектердің жапсар жазықтығындағы күштер жұптарымен жүктелуден басқа жағдайларда).

Біріктіруші элементтердің беріктігі жеткіліксіз болғанда, олардың қирауы біріктірілетін тетікбөлшектер жапсарының беті бойымен орын алады. Сондықтан осы элементтер кесілуге жұмыс атқарады деп айтады, сонымен көлденең қимадағы кесуші жанама кернеуді $\tau_{кес}$ арқылы белгілейді.

Кесуші кернеулер бойынша беріктік шарты келесі түрде жазылады

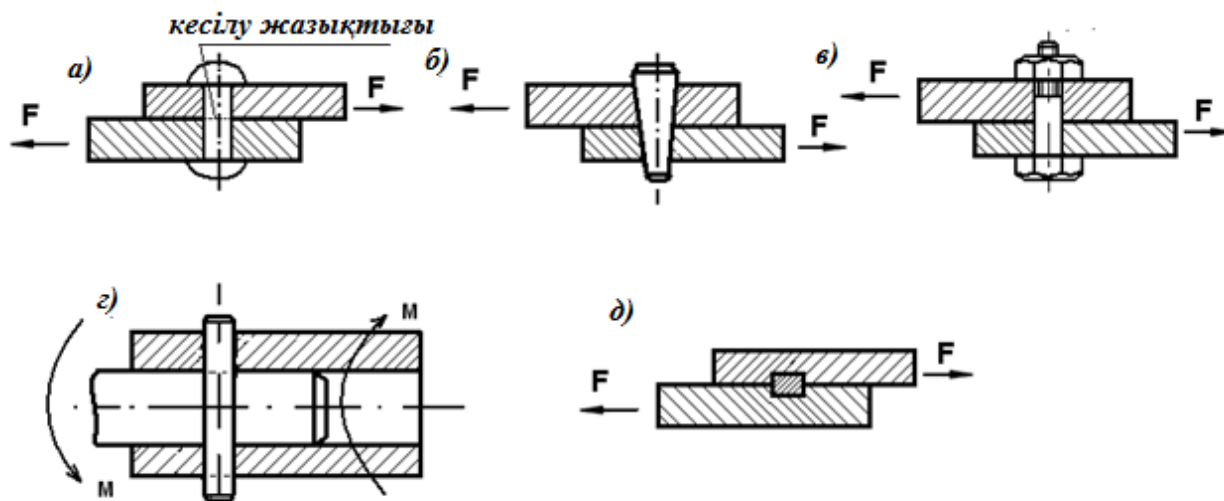
$$\tau_{кес} = \frac{Q}{A_{кес}} \leq [\tau_{кес}], \quad (2.12.1)$$

мұндағы Q – көлденең күш; бірнеше бірдей элемент болғанда $Q=F/i$ (F – жалпы жүктеме, i - элементтер саны);

$A_{кес}$ – бір элементтің кесілу ауданы;

$[\tau_{кес}]$ - кесілуге қауіпсіз кернеу (әдетте $[\tau_{кес}] = (0,25...0,3) \cdot \sigma_{ақ}$,

мұндағы $\sigma_{ақ}$ - элемент материалының аққыштық шегі).



2.12.1-сурет

Кесілуге есептеу біріктіруші элементтердің беріктігін қамтамасыз еткен мен жалпы құрылымның сенімділігіне кепілдік бермейді. Егер қосылатын тетікбөлшектердің қалыңдығы кішкене болса, онда біріктіруші элементтері мен қосылатын тетікбөлшектер қабырғаларының арасындағы қысым себебінен соңғылардың жаншылуы орын алады, сонда біріктіру сенімділігінен айырылады. Элементтер мен қабырғалар арасындағы қысымдар жаншылу кернеу деп аталады және $\sigma_{жан}$ арқылы белгіленеді. Тетікбөлшектер қабырғаларының жаншылуы болмау үшін жаншылуға есептеу келесі беріктік шарты бойынша орындалады

$$\sigma_{жан} = \frac{F}{i \cdot A_{жан}} \leq [\sigma_{жан}], \quad (2.12.2)$$

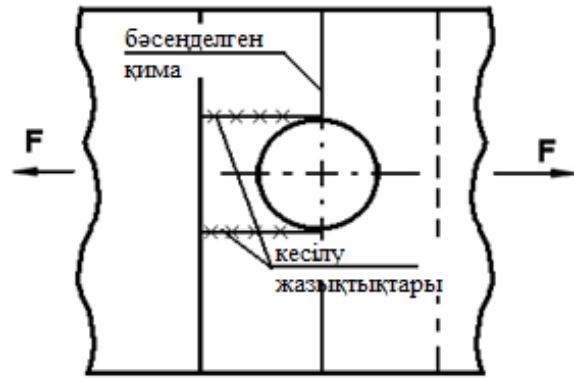
мұндағы F/i - бір біріктіруші элементке түсірілген жүктеме;

$A_{жан}$ – жаншылудың есептік ауданы;

$[\sigma_{жан}]$ - жаншылуға қауіпсіз кернеу (аз көміртекті болаттар үшін

$[\sigma_{жан}] = 100...120 \text{ МПа}$).

Жаншылудың есептік ауданы ретінде жанасу жазықтықпен орын алғанда (2.12.1,δ сурет) жанасу бетінің шынайы ауданы алынады, цилиндрлік бетімен орын алғанда – жанасу бетінің диаметрі арқылы өтетін жазықтыққа проекциясы алынады, яғни $A_{жан} = d \cdot \delta$ (диаметр мен қалындықтың көбейтіндісіне тең). Қосылатын тетік-бөлшектердің қалыңдығы әртүрлі болғанда, формулаға δ_{min} қою керек.



2.12.2-сурет

Кесілу мен жаншылуға есептеуден басқа қосылатын тетікбөлшектерді бәсеңделген қимасы бойынша созылуға беріктігін тексеру керек және күштің әсер ету сызығы бойымен элемент бөлігін кесілуге есептеу керек (2.12.2 сурет). Барлық есептеу түрлері 2.12.1 мысалда қарастырылады.

2.12.1 мысал. 1 және 2 тетікбөлшек өзара тесіктеріне салынған 3 сырық (штырь) арқылы қосылады (2.12.3 сурет) және F күштерімен жүктеледі. Қауіпсіз кернеулерді созылуға $[\sigma_{соз}] = 120 \text{ МПа}$, кесілуге $[\tau_{кес}] = 80 \text{ МПа}$, жаншылуға $[\sigma_{жан}] = 210 \text{ МПа}$ алып, F күшінің қауіпсіз мәнін анықтау керек.

Шешуі: Қауіпсіз күш ретінде тетікбөлшектерді созылуға, қосатын сырықты кесілуге, тесіктер беттерін жаншылуға және олардың шеттерін опырылуға есептеу арқылы табылған күш мәндерінің ең кішісін алу керек.

1. 1 тетік бөлшегін созылуға есептеу арқылы табамыз:

а) I-I қимасы бойынша

$$F^I_{қайыңс.соз} = [\sigma_{соз}] \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 54,2 \text{ кН};$$

б) II-II қимасы бойынша

$$F^{II}_{қайыңс.соз} = [\sigma_{соз}] \cdot 2(b_1 - d_{ш}) \cdot \delta_1 = 46,1 \text{ кН}.$$

2. 2 тетікбөлшегін созылуға есептеу арқылы табамыз

а) III-III қимасы бойынша

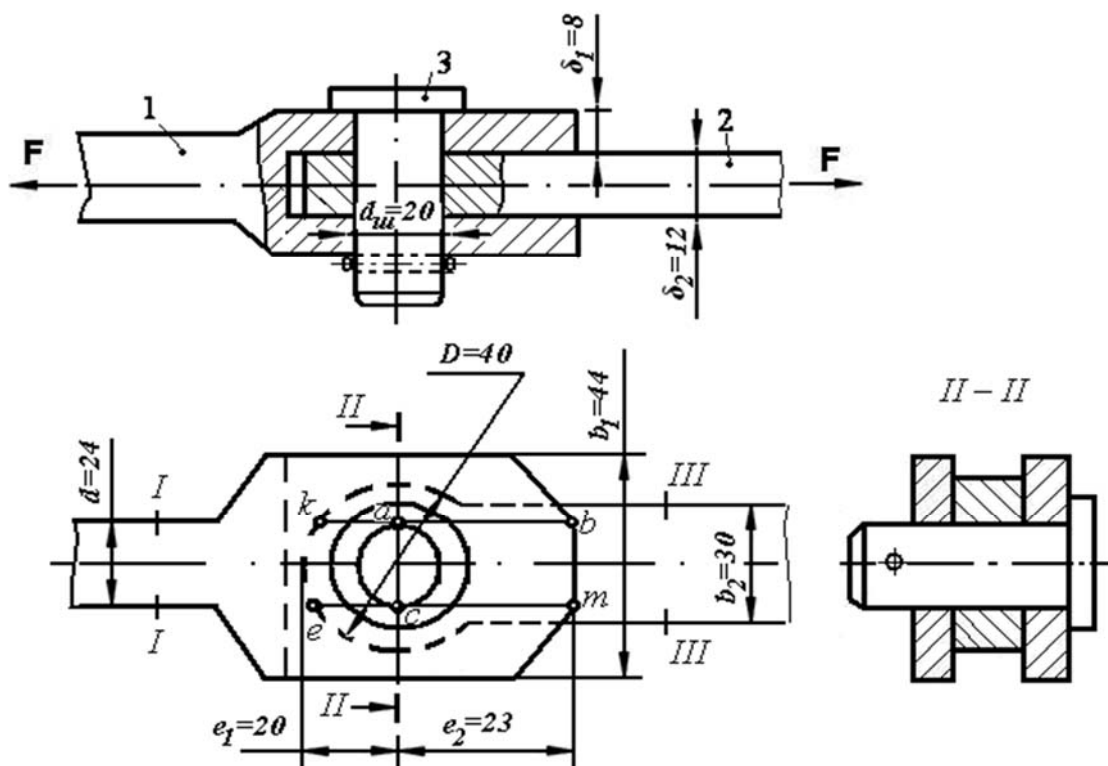
$$F^{III}_{қайыңс.соз} = [\sigma_{соз}] \cdot b_2 \cdot \delta_2 = 43,2 \text{ кН};$$

б) IV-IV қимасы бойынша

$$F^{IV}_{қайыңс.соз} = [\sigma_{соз}] \cdot (D - d_{ш}) \cdot \delta_2 = 28,8 \text{ кН}.$$

3. Қосатын сырықты кесілуге есептеуден табамыз

$$F_{\text{қауіпс.кес}} = [\tau_{\text{ср}}] \cdot 2 \frac{\pi \cdot d_{\text{ш}}^2}{4} = 50,2 \text{ кН.}$$



2.12.3-сурет

4. Тесіктер беттерін жаншылуға есептеуден табамыз

- 1 тетікбөлшек үшін: $A^I_{\text{жан}} = 2\delta_1 \cdot d_{\text{ш}} = 320 \text{ мм}^2$;

- 2 тетікбөлшек үшін: $A^{II}_{\text{жан}} = \delta_2 \cdot d_{\text{ш}} = 240 \text{ мм}^2$.

Ең көп жүктеліп тұрған 2 тетікбөлшегі, ол үшін жаншылу ауданы $A_{\text{min}} = 240 \text{ мм}^2$. Осыдан

$$F_{\text{қауіпс.жан}} = [\sigma_{\text{жан}}] \cdot A^{II}_{\text{жан}} = 50,4 \text{ кН.}$$

5. Тесік шеттерін опырылуға есептеу арқылы табамыз

а) 1 тетікбөлшегінің тесігі үшін ($ab=cm=e_2$ бойынша опырылу)

$$F^I_{\text{қауіпс.оп.}} = [\tau_{\text{кес}}] \cdot 2e_2 \cdot 2\delta_1 = 58,9 \text{ кН};$$

б) 2 тетікбөлшегінің тесігі үшін ($ak=ce \approx e_1$ бойынша опырылу)

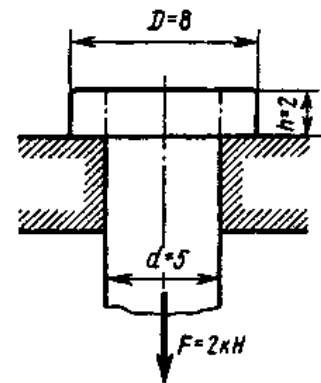
$$F^{II}_{\text{қауіпс.оп.}} = [\tau_{\text{кес}}] \cdot 2e_1 \cdot \delta_2 = 38,4 \text{ кН.}$$

Сонымен қауіпсіз күш $F_{\text{қауіпс.}} = 28,8 \text{ кН}$. Ол 2 тетікбөлшегінің созылуға беріктігімен шектеледі.

2.13 «Ығысу» тақырыбы бойынша есептер

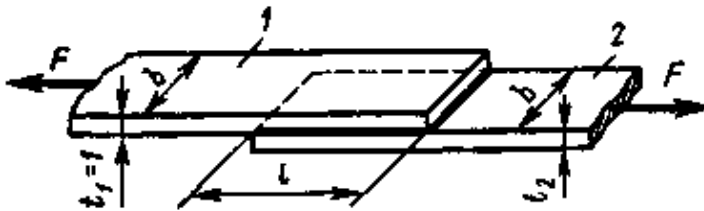
2.13.1 есеп. 2.13.1 суретте көрсетілген сырық үшін созылудан туындайтын кернеулерді, оның бүркеншігіндегі кесілу кернеулерін және тіреуіш беттегі жаншылу кернеулерін анықтаңыз.

Жауабы: $\sigma_{\text{соз}}=102 \text{ МПа}$, $\tau_{\text{кес}}=63,7 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{жан}}=65 \text{ МПа}$.



2.13.1-сурет

2.13.2 есеп. 2.13.2 суретте қалыңдығы $t_1=1 \text{ мм}$ дуралюмин табақша 1 мен шыныпластик табақша 2-нің желімдеумен біріктіруі көрсетілген. Беріктікке есептеудің негізінде келесі шамаларды анықтау керек: екі табақшаның



2.13.2-сурет

ортақ енін b , шыныпластик табақшаның қалыңдығын t_2 және желімдік жапсарының ұзындығын l . Берілгендері: созылуға қауіпсіз кернеу дуралюмин үшін $[\sigma]_d=100 \text{ МПа}$, шыныпластик үшін

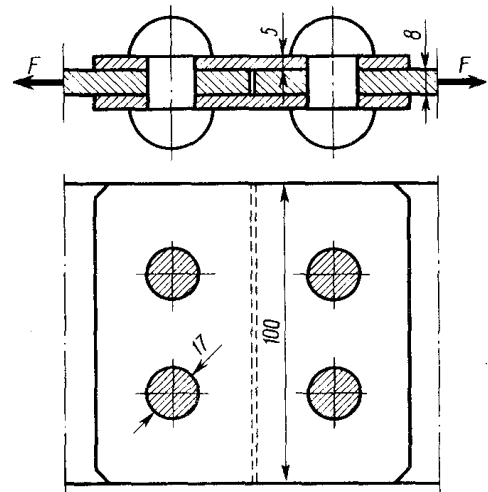
$[\sigma]_{ш}=75 \text{ МПа}$, желім үшін кесілуге қауіпсіз кернеу $[\tau]_{\text{кес}}=5 \text{ МПа}$.

Жауабы: $b=5 \text{ мм}$, $t_2=1,33 \text{ мм}$, $l=20 \text{ мм}$.

2.13.3 есеп. 2.13.3 суретте көрсетілген тойтарма біріктірме F күші қандай мәнге жеткенде және қай элементінде қирайды, егер тілкем және бастырмалар материалы үшін $\sigma_{\text{бер}}=400 \text{ МПа}$, ал тойтарма шегелердің материалы үшін $\tau_{\text{бер}}=270 \text{ МПа}$?

Жауабы: $F_{\text{қир}}=219,5 \text{ кН}$.

2.13.4 есеп. Білік арқылы $M=300 \text{ Н·м}$ момент беріледі (2.13.4 сурет). Шпонкадағы кесілу кернеулерін және шпонка мен доңғалақ күпшегінің арасындағы жаншылу кернеулерін анықтаңыз.



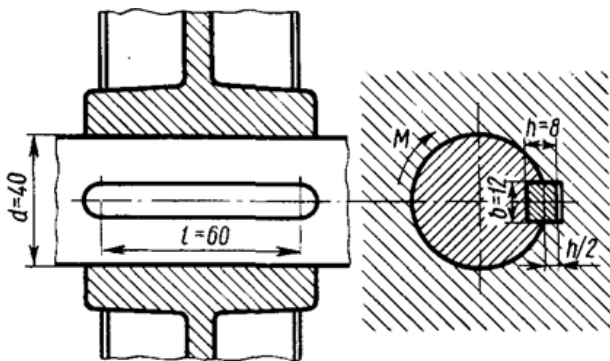
2.13.3-сурет

Жауабы: $\tau_{\text{кес}}=20,8 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{жан}}=62,5 \text{ МПа}$.

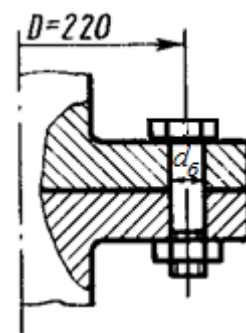
2.13.5 есеп – Екі біліктің шеттеріндегі олармен бірге соғылған фланецтері тесіктеріне саңылаусыз қондырылған бұрандамалардың көмегімен біріктірілген (2.13.5 сурет). Кесілуге есептеу негізінде

бұрандамалардың диаметрін анықтау керек, егер біліктер арқылы $M=6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ момент беріледі, бұрандамалардың саны 6, $[\tau_{\text{кес}}]=270 \text{ МПа}$?

Жауабы: $d_6=15 \text{ мм}$.



2.13.4-сурет

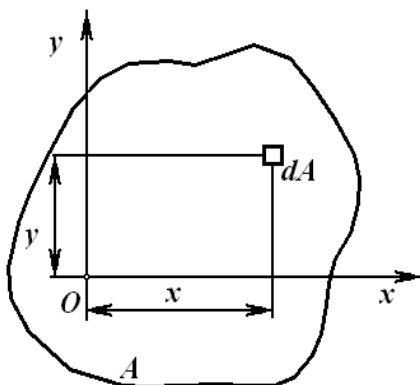


2.13.5-сурет

2.14 Сырық көлденең

қималарының геометриялық сипаттамалары

Иілу есептерін шешу кезінде сырық көлденең қималарының кейбір геометриялық сипаттамалары қолданылады; осы тарауда олардың анықтамалары, қасиеттері және есептеу әдістері қарастырылады.



2.14.- сурет

Кез келген жазық фигураны x, y координат жүйесінде қарастырайық (2.14.1 сурет). Келесі интегралдар

$$S_x = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A x \cdot dA \quad (2.14.1)$$

фигураның сәйкес x өсіне және y өсіне қатысты статикалық моменттері деп аталады. Мұндағы A – қима ауданы, dA – ауданның шексіз аз элементі, x және y – осы элементтің

координаттары.

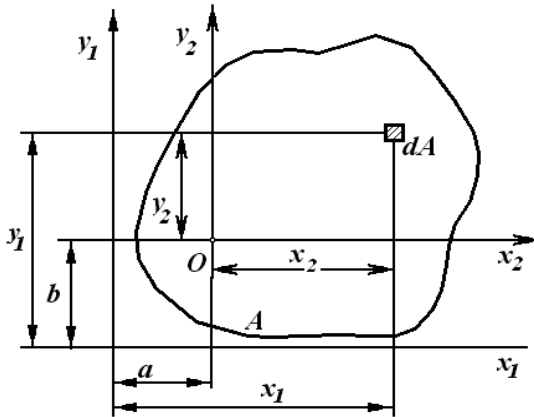
Координат өстерін параллель көшіргенде статикалық моменттердің өзгеруін қарастырамыз (2.14.2 сурет). Мұнда $x_2 = x_1 - a$; $y_2 = y_1 - b$ болатыны анық. Сонда

$$S_{x_2} = \int_A (y_1 - b) \cdot dA = S_{x_1} - b \cdot A, \quad S_{y_2} = \int_A (x_1 - a) \cdot dA = S_{y_1} - a \cdot A. \quad (2.14.2)$$

a мен b шамаларын S_{x_2} және S_{y_2} нөлге тең болатындай тандауға болады (параллель өстердің қатарында олар жалғыз ғана болып табылады). Оған қатысты статикалық момент нөлге тең болатын өс, центрлік өс деп аталады. Центрлік өстердің қиылысу нүктесі қиманың ауырлық центрі деп аталады.

(x_1, y_1) координат жүйесінде ауырлық центрінің координаттары келесідей анықталады

$$a = x_C = \frac{S_{y1}}{A}, \quad b = y_C = \frac{S_{x1}}{A}. \quad (2.14.3)$$



2.14.2-сурет

(2.14.3) формулалары бойынша кері есепті де шешуге болады – қиманың берілген ауданы мен ауырлық центрінің координаттары бойынша оның статикалық моменттерін анықтауға болады.

Қарапайым фигуралардан немесе қысыммен өңделген стандартталған профильдерден құрастырылған күрделі қималардың ауырлық центрін анықтау кезінде келесі формулаларды

қолданады

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}, \quad (2.14.4)$$

мұндағы A_i , x_i , y_i - құраушы i фигураның сәйкес ауданы мен оның ауырлық центрінің координаттары.

Кез келген жазық фигура үшін (2.14.1 сурет) келесі интегралдарды

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA, \quad J_y = \int_A x^2 \cdot dA, \quad (2.14.5)$$

фигураның x және y өстеріне қатысты өстік инерция моменттері деп атайды, ал келесі анықталған интегралды

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA, \quad (2.14.6)$$

- қиманың өзара перпендикуляр x және y өстеріне қатысты өрістік (центрден тепкіш) инерция моменті деп атайды.

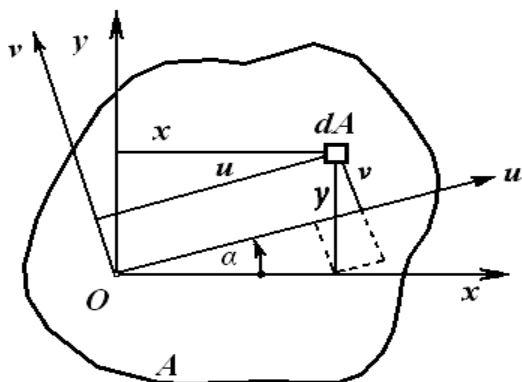
Центрлік x_0, y_0 өстерінен оларға параллель және олардан a мен b қашықтықтарында орналасқан x, y өстеріне көшкенде, фигураның инерция моменттері келесі формулалармен есептеледі

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{x0} + a^2 \cdot A, \\ J_y &= J_{y0} + b^2 \cdot A, \\ J_{xy} &= J_{x0y0} + a \cdot b \cdot A. \end{aligned} \right\} \quad (2.14.7)$$

Кері жағдайда, яғни центрлік емес өстерден центрлік өстерге көшкенде, (2.14.7) өрнектерінде екінші қосылымның алдындағы “+” таңбалары “-” таңбаларына ауыстырылады.

Координат өстерін айналдырғанда, яғни x, y өстерінен u, v өстеріне көшкенде (2.14.3 сурет), өстік және өрістік инерция моменттері келесі формулаларен есептеледі

$$\left. \begin{aligned} J_u &= J_x \cdot \cos^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha, \\ J_v &= J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha, \\ J_{uv} &= J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.14.8)$$



2.14.3 сурет

Өстік инерция моменттері ең үлкен және ең кіші мәндерге ие болатын, ал өрістік инерция моменті нөлге тең болатын өстер бас инерция өстері, сол өстерге қатысты өстік инерция моменттері бас инерция моменттері деп аталады. Бас инерция өстерінің x, y координат жүйесіндегі орны келесі формуламен табылатын α_0 бұрышы арқылы анықталады

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.14.9)$$

Бас инерция моменттері деп бас инерция өстеріне қатысты өстік инерция моменттері аталады; олардың мәндері келесі формуламен анықталады

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (2.14.10)$$

Қиманың ауырлық центрінен өтетін бас инерция өстері бас центрлік өстері, ал оларға қатысты инерция моменттері – бас центрлік инерция моменттері деп аталады.

Егер қиманың кемінде бір симметриялық өсі болса, сол өс және оған перпендикуляр, ауырлық центрінен өтетін өс бас центрлік өстері болып келеді.

Күрделі қималардың кез келген өстерге қатысты инерция моменттерін құраушы фигуралардың сол өстерге қатысты сәйкес инерция моменттерін қосу арқылы анықтайды.

2.14.4 суретте көрсетілген тік төртбұрыш, дөңгелек, сақина үшін бас центрлік инерция моменттерінің формулалары келтіріледі.

ТІК ТӨРТБҰРЫШ ҮШІН

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (2.14.11)$$

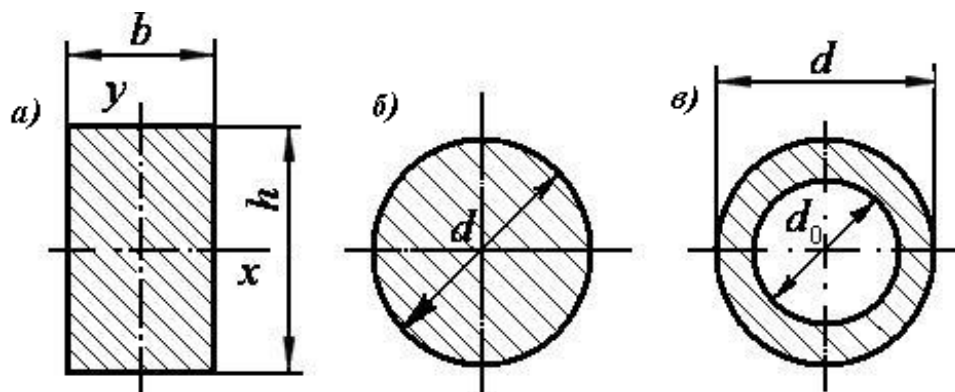
Дөңгелек үшін

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (2.14.12)$$

САҚИНА ҮШІН

$$J_x = J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} (1 - c^4), \quad c = \frac{d_0}{d}. \quad (2.14.13)$$

Сақина мен дөңгелек үшін барлық центрлік өстер бас инерция өстері болып келеді және оларға қатысты инерция моменттері өзара тең болады. Осындай қасиетке кез келген екі бас центрлік моменті бірдей болатын қима ие болады (мысалы, квадрат немесе теңқабырғалы үшбұрыш).



2.14.4 сурет

Стандартталған профильдер (коставрлар, швеллерлер, бұрыштар) үшін инерция моменттерінің мәндері анықтамалықтарда келтіріледі.

Жазық фигураның x өсіне қатысты инерция радиусы деп келесі шаманы атайды

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad (2.14.14)$$

мұндағы J_x - қарастырылатын x өсіне қатысты фигураның өстік инерция моменті;

A – фигураның ауданы.

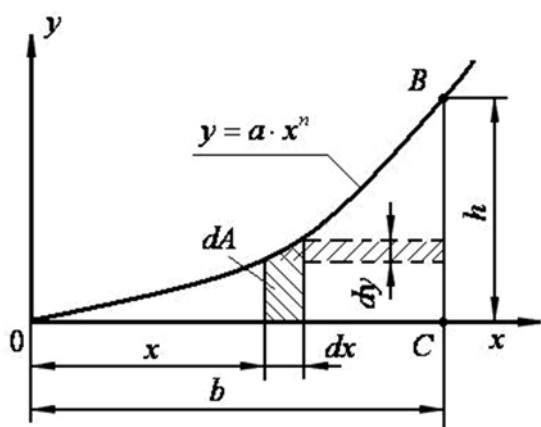
2.14.1 мысал. Параболалық COB үшбұрышы ауырлық центрінің орнын анықтау керек (2.14.5 сурет), егер $OC=b$, ал OB параболасы $y=a \cdot x^n$ теңдеумен сипатталатын болса.

Шешуі: Алдымен h биіктігін анықтаймыз, $h=a \cdot b^n$. Содан кейін $dA=y \cdot dx=a \cdot x^n \cdot dx$ анықтап, ауданды табамыз

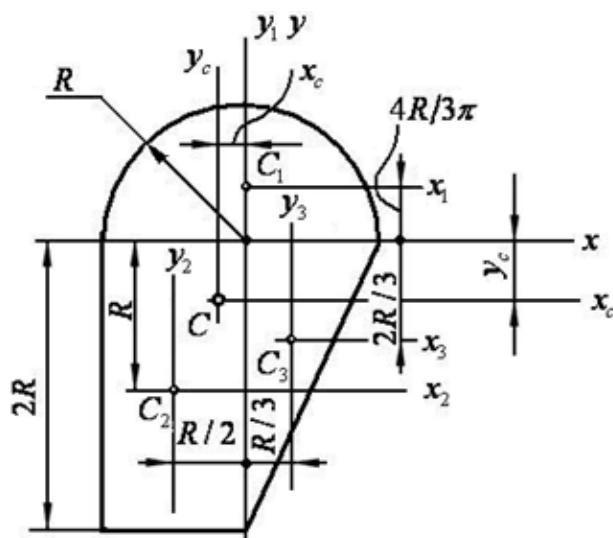
$$A = \int dA = a \int_0^b x^n \cdot dx = \frac{a \cdot b^{n+1}}{n+1} = \frac{b \cdot h}{n+1}.$$

Фигураның y өске қатысты статикалық моменті (2.14.1) формуласымен анықтаймыз

$$S_y = \int_A x \cdot dA = a \int_0^b x^{n+1} \cdot dx = \frac{a \cdot b^{n+2}}{n+2} = \frac{b^2 \cdot h}{n+2}.$$



2.14.5 сурет



2.14.6 сурет

S_x анықтау үшін dA элементін басқаша өрнектейміз, $dA=(b-x) \cdot dy=(b-x) \cdot n \cdot a \cdot x^{n-1} \cdot dx$. Сонда (2.14.1) формуласымен аламыз

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_0^b a \cdot x^n \cdot (b-x) \cdot n \cdot a \cdot x^{n-1} \cdot dx = a^2 \cdot n \cdot \int_0^b x^{2n-1} \cdot (b-x) \cdot dx = \frac{b \cdot h^2}{2(2n+1)}.$$

Ауырлық центрінің координаттарын (2.14.3) формулаларымен анықтаймыз

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{b^2 \cdot h \cdot (n+1)}{(n+2) \cdot b \cdot h} = \frac{n+1}{n+2} b, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{b \cdot h^2 \cdot (n+1)}{2(2n+1) \cdot b \cdot h} =$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+1)} h.$$

2.14.2 мысал. 2.14.6 суретте көрсетілген күрделі құралған қиманың ауырлық центрінің орнын анықтау керек.

Шешуі: Қиманы қарапайым фигураларға бөлеміз: үшбұрыш, тік төртбұрыш пен жарты дөңгелекке. x , y координат жүйесін қабылдап, құраушы фигуралардың ауырлық центрлерінің координаттарын анықтаймыз.

Үшбұрышта ауырлық центрі табанынан биіктіктің $1/3$ бөлігіне тең қашықтықта орналасады; тік төртбұрышта – симметриялық өстерінің қиылысу нүктесінде; жарты дөңгелекте – симметриялық өсінде тік диаметрінен $\frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}$ тең қашықтықта орналасады.

$$\text{Құралған фигураның ауданы } A = \frac{\pi \cdot R^2}{2} + 2R^2 + R^2 \approx 4,57R^2.$$

Оның ауырлық центрінің координаттарын x , y координат жүйесінде (2.14.4) формулалары бойынша анықтаймыз

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{R \cdot 2R \cdot \left(-\frac{R}{2}\right) + \frac{1}{2} R \cdot 2R \cdot \frac{R}{3}}{\frac{\pi+6}{2} \cdot R^2} = -\frac{4R}{3(\pi+6)} \approx -0,146R,$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{\pi \cdot R^2}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} - R \cdot 2R \cdot R - \frac{1}{2} R \cdot 2R \cdot \frac{2R}{3}}{\frac{\pi+6}{2} \cdot R^2} =$$

$$= -\frac{10R}{3(\pi+6)} \approx -0,365R.$$

2.14.3 мысал. Жарты дөңгелек түріндегі қиманың (2.14.7 сурет) бас центрлік өстерінің орнын және бас центрлік инерция моменттерінің мәндерін анықтау керек.

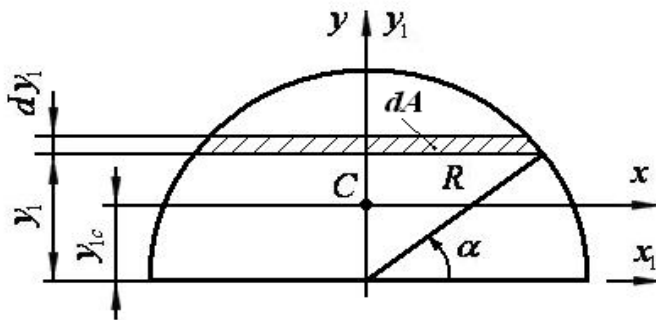
Шешуі: Ауырлық центрдің орнын анықтаймыз. Ол симметриялық өсінде (y өсінде) орналасатыны анық. Көмекші x_1, y_1 өстерін

таңдаймыз; сонда $y_{IC} = \frac{S_{x1}}{A}$, $A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$, $dA = 2R \cdot \cos \alpha \cdot dy_1$, $y_1 = R \cdot \sin \alpha$,
 $dy_1 = d(R \cdot \sin \alpha) = R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha$ және

$$S_{x1} = \int_A y_1 \cdot dA = \int_0^{\pi/2} R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \cos \alpha \cdot R \cos \alpha \cdot d\alpha =$$

$$= 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha = \frac{2}{3} R^3,$$

$$y_{IC} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} = 0,424R.$$



2.14.7 сурет

Симметриялық y өсі және орны табылған x өсі бас центрлік инерция өстері болып келеді. Бас центрлік инерция моменттерінің мәндерін есептейміз

$$J_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot R^4}{8} \approx 0,393R^4;$$

және, $J_{x1} = J_y$ болғандықтан,

$$J_x = J_{x1} - y_{IC}^2 \cdot A = 0,393R^4 - (0,424R)^2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} \approx 0,111R^4.$$

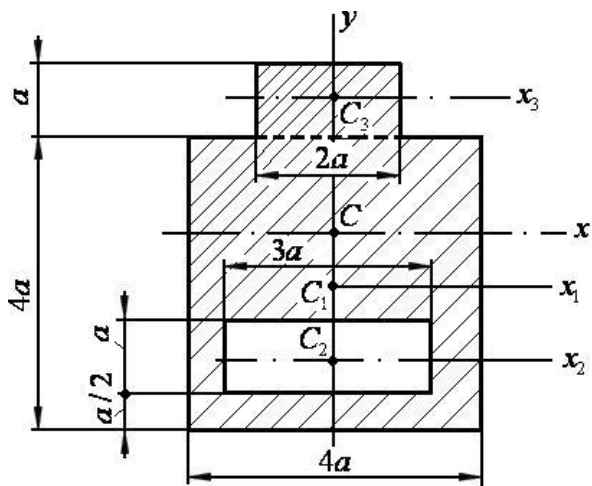
2.14.4 мысал. 2.14.8 суретте көрсетілген қиманың бас центрлік инерция моменттерін есептеу керек.

Шешуі: Қиманың симметриялық өсі болғандықтан, оның ауырлық центрі сол өсте орналасады. Қиманы 3 тік төртбұрышқа жіктеп, табамыз

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = 16a^2 - 3a^2 + 2a^2 = 15a^2,$$

$$S_{x1} = S_{x1}^{(1)} - S_{x1}^{(2)} + S_{x1}^{(3)} = A_1 \cdot 0 - A_2 \cdot C_1 C_2 + A_3 \cdot C_1 C_3 = 0 - 3a^2(-a) + 2a^2 \cdot 2,5a = 8a^3,$$

$$y_{IC} = S_{x1} / A = 8a^3 / 15a^2 = 0,533a.$$



2.14.8 сурет

Қиманың x өсіне қатысты инерция моментін, тік төртбұрыш үшін (2.14.11) және көшіру (2.14.7) формулаларын қолданып, анықтаймыз

$$\begin{aligned}
 J_x &= J_x^{(1)} - J_x^{(2)} + J_x^{(3)} = \\
 &= (J_{x_1}^{(1)} + CC_1^2 \cdot A_1) - (J_{x_2}^{(2)} + CC_2^2 \cdot A_2) + \\
 &+ (J_{x_3}^{(3)} + CC_3^2 \cdot A_3) = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} + \\
 &+ (0,533a)^2 \cdot 16a^2 - \\
 &- \left[\frac{3a \cdot a^3}{12} + (1,533a)^2 \cdot 3a^2 \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2a \cdot a^3}{12} + (1,967a)^2 \cdot 2a^2 = 26,48a^4.$$

Қиманың y өсіне қатысты инерция моментін, y өсі бүтін қима үшін де, оны құраушы фигуралар үшін де центрлік өс болып келетінін ескеруімен табамыз. Сонда аламыз

$$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} + J_y^{(3)} = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} - \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = 19,75a^4.$$

2.14.5 мысал. 2.14.9,а суретте көрсетілген қиманың бас центрлік инерция моменттерін анықтау керек.

Шешуі: 1) Ауырлық центрдің координаттарын анықтаймыз, ол үшін көмекші x_1 және y_1 өстерін қабылдаймыз. Қиманы құрайтын швеллер мен бұрыш үшін түржиын (сортамент) кестесінен қажетті деректерді жазып алып, 2.14.1 кестеге енгіземіз.

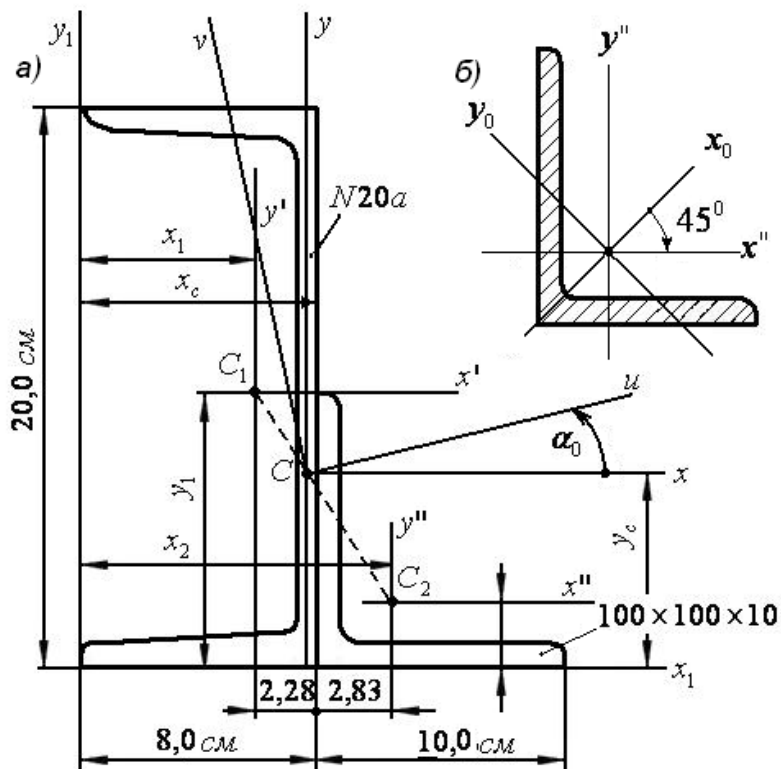
Алдымен x_c және y_c координаттарын анықтаймыз

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{25,2(8,0 - 2,28) + 19,2 \cdot 2,83}{25,2 + 19,2} = 7,93 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{25,2 \cdot 10 + 19,2 \cdot 2,83}{25,2 + 19,2} = 6,9 \text{ см}.$$

2.14.1 кесте

Фигуралар	Қиманың ауданы $A, \text{см}^2$	Ауырлық центрінің орны $z_0, \text{см}^2$	Өз өстеріне қатысты инерция моменттері, см^4			
			горизонталь оське қатысты	вертикаль оське қатысты	J_{x0} (max)	J_{y0} (min)
Швеллер №20а	25,2	2,28	1670	139	-	-
Бұрыш 100×100×10	19,2	2,83	179	179	284	74,1



2.14.9 сурет

Содан кейін көмекші центрлік x және y өстерін жүргіземіз. Қиманың ауырлық центрі бұрыш пен швеллердің ауырлық центрлерін қосатын сызықта орналасу керек екенін айтып өтейік.

2) x және y өстеріне қатысты инерция моменттерін есептейміз

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} = 1670 + 25,2 \cdot (10 - 6,9)^2 + 179 + 19,2(6,9 - 2,83)^2 = 2409 \text{ см}^4,$$

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = 139 + 25,2(5,72 - 7,93)^2 + 179 + 19,2(8 + 2,83 - 7,93)^2 = 603 \text{ см}^4.$$

Енді x және y өстеріне қатысты өрістік инерция моментін есептейміз. Швеллердің горизонталь x' өсі симметриялық өсі болғандықтан, швеллер үшін оның центрлік өстері x', y' бас инерция

өстері болып келеді және $J_{x',y'} = 0$. Бұрыш үшін оның центрлік өстері x'' , y'' бас өстері болмайды. Ол үшін x_0 , y_0 бас инерция өстері болып келеді, өйткені x_0 – симметриялық өсі (2.14.9,б сурет). (2.14.7)-н үшінші формуласы бойынша $\alpha = -45^\circ$ болған кезде

$$J_{xy} = 0 + \frac{284 - 74,1}{2} \cdot \sin(-90^\circ) = -104,95 \text{ см}^4.$$

Сонда бүтін қиманың x , y өстеріне қатысты өрістік инерция моменті келесіге тең

$$J_{xy} = J_{xy}^I + J_{xy}^{II} = 0 + 25,2 \cdot (10 - 6,9) \cdot (5,72 - 7,93) - 104,95 + 19,2 \cdot (2,83 - 6,9) \cdot (8 + 2,83 - 7,93) = -501,9 \text{ см}^4.$$

(4.9) формуласы бойынша бас өстерінің көлбеу бұрышын анықтаймыз

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-501,9)}{603 - 2409} = 0,555, \quad 2\alpha_0 = 29^\circ 03', \quad \alpha_0 = 14^\circ 31' 30''.$$

Осы бұрышты сағат тілінің жүрісіне қарсы тұрғызып, u және v бас центрлік инерция өстерін жүргіземіз.

4) Бас центрлік инерция моменттерін (4.10) формуласымен есептейміз

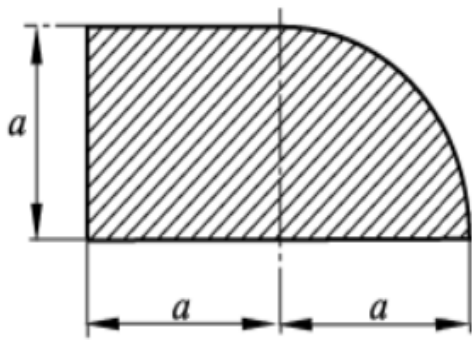
$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{2409 + 603}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2409 - 603}{2}\right)^2 + 501,95^2} = 1506 \pm 1030 \text{ см}^4.$$

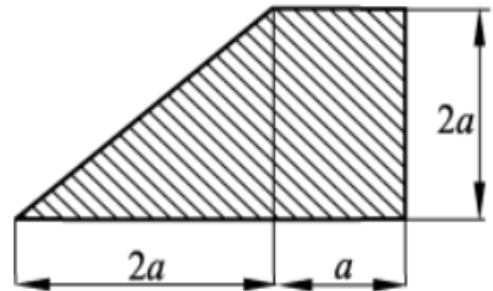
Сондықтан $J_{\max} = 2536 \text{ см}^4$, $J_{\min} = 476 \text{ см}^4$ және, $J_x > J_y$ болғандықтан, J_{\max} – u өсіне қатысты инерция моменті, ал J_{\min} – v өсіне қатысты инерция моменті болып табылады.

2.15 «Сырық көлденең қималарының геометриялық сипаттамалары» тақырыбы бойынша есептер

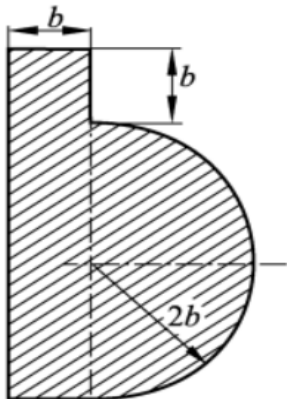
2.15.1 – 2.15.7 есептер. 2.15.1 – 2.15.7 суреттерде келтірілген жазық фигуралардың бас центрлік өстерін және бас инерция моменттерін табу керек



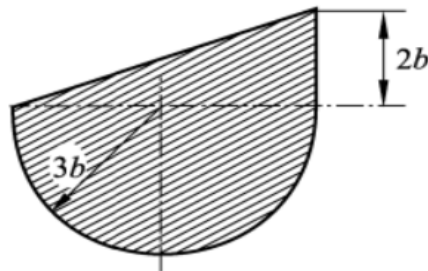
2.15.1 сурет



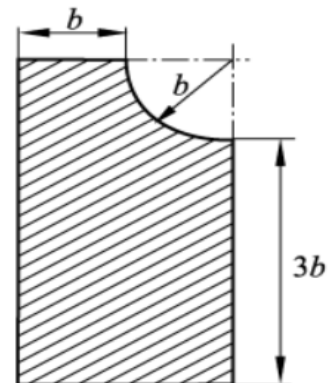
2.15.2 сурет



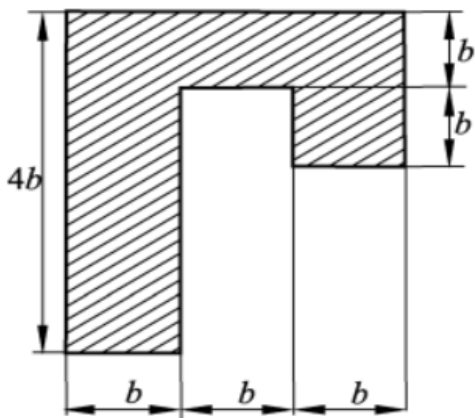
2.15.3 сурет



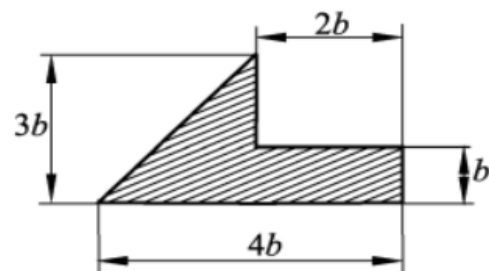
2.15.4 сурет



2.15.5 сурет



2.15.6 сурет



2.15.7 сурет

Жауабы:

Есеп	2.15.1	2.15.2	2.15.3	2.15.4	2.15.5	2.15.6	2.15.7
J_{max}	$0,520a^4$	$2,31a^4$	$17,7b^4$	$49,6b^4$	$8,55b^4$	$10,5b^4$	$5,34b^4$
J_{min}	$0,135a^4$	$0,880a^4$	$6,90b^4$	$24,4b^4$	$2,23b^4$	$4,03b^4$	$1,30b^4$
z_C	$0,467a$	$0,833a$	$2,22b$	$2,31b$	$1,83b$	$2,50b$	$0,8b$
y_C	$0,906a$	$1,92a$	$1,25b$	$3,30b$	$0,937b$	$1,21b$	$2,0b$
α	$-7,13^\circ$	$-29,2^\circ$	$10,1^\circ$	$14,7^\circ$	$7,1^\circ$	$-33,4^\circ$	$-24,0^\circ$

2.16 Иілу.

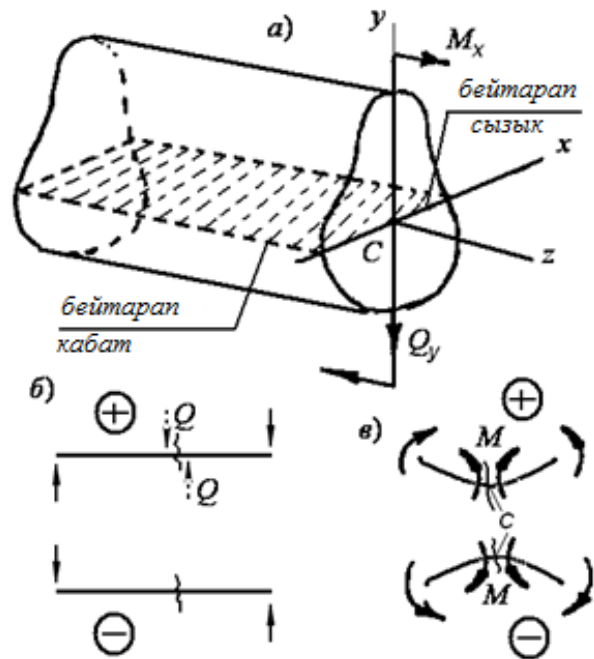
Көлденең күштер мен июші моменттердің эпюрлерін тұрғызу

Иілу деп сырықтың көлденең қималарында июші момент M орын алатын жүктелу түрі аталады. Егер июші момент жалғыз ІКФ болса, онда таза иілу орын алады. Көптеген жағдайда қимада июші моментпен қатар көлденең күш Q пайда болады, онда көлденең иілу орын алады.

Иілуге жұмыс атқаратын сырықты әдетте арқалық деп атайды. Екі тұғыр арасындағы арқалық бөлігі оның аралығы деп аталады. Арысты (консольды) арқалық деп бір шеті қатты бекітілген, ал екінші шеті бекітілмеген арқалық аталады.

Арыс (консоль) деп арқалық тұғырларынантерінен тыс тұрған арқалық бөлігі аталады (осы жағдайда арқалық ұзындығы аралық ұзындығынан көп болады). Сырықтың бас инерция жазықтығы ретінде көлденең қиманың бас центрлік инерция өстерінің біреуі мен сырықтың бойлық өсі арқылы өтетін жазықтықты түсінеді. Егер барлық сыртқы күштер (тұғырлар реакцияларын қосқанда) бір ғана сырықтың бас инерция жазықтықтарының біреуіменен беттесетін жазықтықта орналасса, онда сырықтың майысқан өсі де сол жазықтықта орналасады, мұндай жағдайдағы иілу тік немесе жазық иілу деп аталады. Мысалы, егер барлық сыртқы күштер zy жазықтығында орналасса (2.16.1 сурет), онда сырықтың көлденең қималарында көлденең күш Q_y және июші момент M_x пайда болады. Егер бастапқы арқалық өсі түзу сызықты болса, ол майысады және майысқан өс тап сол zy жазықтығында орналасады. Арқалық талшықтары дөңес жағында ұзарады, ал ойыс жағында – қысқарады, сонда олардың арасында талшықтардың ұзындықтары өзгермейтін, тек қана майысатын қабат болады, ол бейтарап қабат деп аталады. Бейтарап қабаттың арқалықтың көлденең қимасымен қиылысу сызығы бейтарап сызық деп аталады. Тік иілу кезінде бейтарап сызық, күштердің әсер ету жазықтығына перпендикуляр орналасқан көлденең қиманың бас центрлік инерция өсімен беттеседі.

Көлденең күш Q_y деп қарастырылатын көлденең қимадағы ішкі күштердің тең әсерлі күшінің бас центрлік y өсіне проекциясы аталады (2.1.1, в сурет). Ол қарастырылатын қимамен кесілген сырық



2.16.1 сурет

бөліктерінің біреуіне түсірілген барлық сыртқы күштердің y өске проекцияларының алгебралық қосындысына тең

$$Q_y = \sum_{\text{бөл}} F_{ky}. \quad (2.16.1)$$

Егер көлденең күш, сырықтың кесілген бөлігін қиманың ауырлық центріне қатысты сағат тілінің жүрісіне бағытталған айналдыруға тырысса, ол оң деп есептеледі. Сонда (2.16.1) өрнегінде F_k күштерінің таңбаларын 2.16.1,б суретте көрсетілген ережемен алуға болады: сырықтың кесілген бөлігін қарастырылатын қиманың нүктесіне қатысты сағат тілінің жүрісіне бағытталған айналдыруға тырысатын сыртқы күш оң көлденең күшті пайда болғызады.

Июші момент M_x деп ішкі күштердің қарастырылатын көлденең қиманың ауырлық центріне қатысты бас моментінің x бас инерция өсіне проекциясы аталады (2.1.1,в сурет). Яғни, июші момент M_x қарастырылатын көлденең қимадағы ішкі күштердің көлденең қиманың x бас центрлік инерция өсіне қатысты қосынды моменті болып келеді. Ол қарастырылатын қимамен кесілген сырық бөліктерінің біреуіне түсірілген барлық сыртқы күштердің x өсіне қатысты моменттерінің алгебралық қосындысына тең

$$M_x = \sum_{\text{бөл}} m_x(\bar{F}_k). \quad (2.16.2)$$

Июші моменттердің эпюрін әдетте сығылған талшық үстінде тұрғызады. Сонда деформацияланбаған қалпында бойлық өсі горизонталь орналасқан арқалық үшін сыртқы күш моментінің (немесе сыртқы күштер жұбы моментінің) таңбасы келесі ереже бойынша алынады: егер сол күш (немесе күштер жұбы) қарастырылатын қимаға қатысты арқалық бөлігінің төмен жағын дөңес болғызып майыстыруға тырысса, оның моменті «+» таңбасымен алынады (эпюрдің оң ординаттары өстен жоғары тұрғызылатын шартта); керісінше жағдайда моменті «-» таңбасымен алу керек. Сәйкес ереже 2.16.1,в суретте көрсетілген. Сұлбаларда арқалық қалыңдығын әдетте көрсетпейді, сондықтан (2.16.2) өрнегінде $m_x(\bar{F}_k)$ орнына $m_C(\bar{F}_k)$ жазуға болады, мұндағы C – одан қарастырылатын қима өтетін, арқалық өсіндегі нүкте

$$M_x = \sum m_C(\bar{F}_k). \quad (2.16.3)$$

Тап осылай Q_x және M_y ұғымдары енгізіледі.

Көлденең күштер мен июші моменттердің эпюрлерін тұрғызу кезінде әдетте әр аралықтағы Q мен M өрнектерін құрастырады, сонда аралықтар шекаралары ретінде шеткі қималар, сыртқы күштер мен күштер жұптары (сыртқы моменттер) түсірілген қималар, қарқындылығы q белгілі бір заңмен өзгертін *таралған* күштердің басталатын және аяқталатын қималары алынады. Жылдамдық эпюрлерді мінездемелік нүктелер бойынша тұрғызуға да болады,

сонымен жалпы заңдылықтарды, соның ішінде июші момент M , көлденең күш Q және таралған күштердің қарқындылығы q арасындағы тәуелдіктерді, ескеріп отыру керек. Бұл тәуелдіктер келесідей

$$Q = \frac{dM}{dz}, \quad (2.16.4)$$

$$q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (2.16.5)$$

Төменде Q және M эпюрлері үшін негізгі заңдылықтар келтіріледі:

а) қадалған сыртқы күш түсірілген арқалық қимасында Q эпюрінде сол күштің шамасына тең үзік орын алады, ал M эпюрінде жанаманың көлбеу бұрышы өзгереді (яғни сынық орын алады);

б) сыртқы күштер жұбы (сыртқы момент) түсірілген арқалық қимасында M эпюрінде сол моменттің шамасына тең үзік орын алады;

в) таралған күштер жоқ арқалық аралығында көлденең күш тұрақты, ал июші моменттің эпюрі сызықты болады (Q эпюрі абсцисс өсіне параллель түзумен, ал M эпюрі – көлбеу түзумен шектеледі);

г) бір қалыпты таралған күштермен жүктелген арқалық аралығында көлденең күш сызықты заңмен, ал июші момент M – квадратты заңмен өзгереді (Q эпюрі көлбеу түзумен, ал M эпюрі – квадратты параболамен шектеледі);

д) Q эпюрі абсцисса өсін қиып өтетін (нөлден өтетін) қимада, июші момент экстремалды мәніне ие болады;

е) егер таралған күштер төменге қарай бағытталса ($q < 0$), M эпюрі дөңес жағы жоғарыда болатын параболамен кескінделеді;

ж) аралықтың екі қима арасындағы июші момент мәндерінің өзгерісі сол екі қима арасындағы көлденең күш эпюрінің ауданына тең болады.

2.16.1 мысал. Берілген арқалық үшін (2.16.2,а сурет) Q және M эпюрлерін тұрғызу керек.

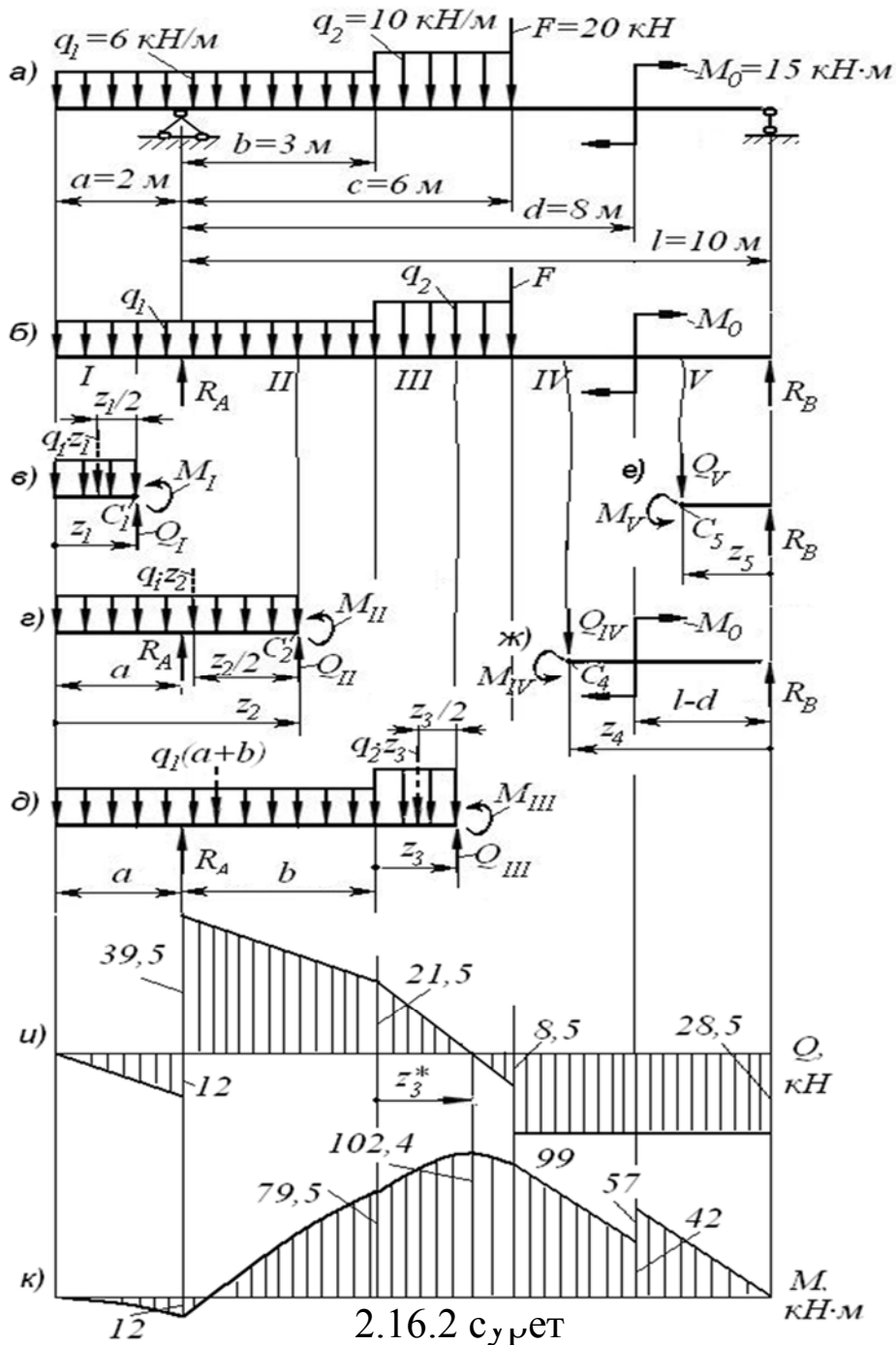
Шешуі: Q және M эпюрлерін тұрғызу алдында тұғырлар реакцияларын анықтау керек. Тұғырларды терді ойша алып тастап, олардың әсерін реакция күштерімен ауыстырамыз.

B нүктесінде топсалы-жылжымалы тұғыр орналасқан, оның реакциясы тіреуші бетке әрқашан перпендикуляр болады, мұнда оны жоғары қарай бағыттаймыз (2.16.2,б сурет). A нүктесінде топсалы жылжымайтын тұғыр орналасқан, оның реакциясы жалпы жағдайда жазықтықта кез келген бағытталуы мүмкін, яғни реакциясының 2 құраушысы болады. Қарастырылатын жағдайда басқа барлық күштер вертикаль болғандықтан, A тіректің реакциясы да вертикаль болады, оны да жоғары қарай бағыттаймыз. Тепе-теңдік теңдеулерін A және B нүктелеріне қатысты барлық күштер моменттерінің қосындылары түрінде жазамыз

$$\sum m_A = q_1 \cdot (a+b) \cdot \left(b - \frac{a+b}{2}\right) + q_2 \cdot (c-b) \cdot \left(b + \frac{c-b}{2}\right) + F \cdot c + M_0 - R_B \cdot l = 0,$$

$$\sum m_B = M_0 - F \cdot (l-c) - q_2 \cdot (c-b) \cdot \left(l - b + \frac{c-b}{2}\right) - q_1 \cdot (a+b) \cdot \left[l - \left(b - \frac{a+b}{2}\right)\right] + R_A \cdot l = 0.$$

Осыдан, берілген мәндерді қойып, табамыз $R_B = 28,5 \text{ кН}$, $R_A = 51,5 \text{ кН}$.



Тепе-теңдік теңдеуін барлық күштердің y өсіне проекцияларының қосындысы түрінде жазып, реакциялар дұрыс табылғанын көреміз

$$\sum F_y = -q_1(a+b) - q_2(c-b) - F + R_A + R_B = \\ = -6(2+3) - 10(6-3) - 20 + 51,5 + 28,5 = 0.$$

Эпюрлерді тұрғызуға көшеміз. Арқалықтың 5 аралығы бар.

I аралықта кез келген қима жүргізіп, кесілген арқалықтың сол жақ бөлігін қарастырамыз (2.16.2, *в* сурет); кез келген қиманың орнын z_1 координатасы арқылы анықтаймыз z_1 ($0 \leq z_1 \leq a$). Сонда (2.16.1) формуласы бойынша таңбалар ережесін ескерумен аламыз $Q_1 = \sum_{\text{сол}} F_{ky} = -q_1 \cdot z_1$. Мұнда Q_1 шамасы z_1 координатасына сызықты тәуелді, сондықтан Q_1 эпюрі көлбеу түзу болып келеді. Сол түзуді тұрғызу үшін Q_1 мәндерін шекаралық қималарда есептейміз: $z_1=0$ болғанда $Q_1 = 0$; $z_1=a$ болғанда $Q_1 = -q_1 \cdot a = -12 \text{ кН}$. Q эпюрінде (2.16.2, *и* сурет) сәйкес мәндерді тұрғызып, түзу жүргіземіз.

(2.16.3) формуласы бойынша таңбалар ережесін ескерумен июші моментті анықтаймыз

$$M_1 = \sum_{\text{сол}} m_{c1} = -q_1 \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2}.$$

M_1 шамасы z_1 координатасының квадраттық функциясы болып келеді, сондықтан M эпюрі квадраттық параболамен кескінделеді. Қарастырылатын аралықта параболаның төбесі болуы мүмкін. Оны білу үшін (2.16.4) өрнегін қарастырамыз, одан параболаның төбесі $Q = 0$ болатын қимада орын алатыны анық. Біздің жағдайымызда параболаның төбесі $z_1 = 0$ қимада орын алады. Сонымен қарастырылатын аралықта M_1 мәндерін тек қана оның шекаралық қималарында анықтаған жеткілікті болады: $z_1=0$ болғанда $M_1 = 0$, $z_1=a$ болғанда $M_1 = -q_1 \cdot \frac{a^2}{2} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Эпюр 2.16.2, *к* суретте көрсетілген; оның дөңес жағы (2.16.5) формуласына сәйкес q_1 белгілейтін нұсқамаларға қарсы бағытталады.

II аралықтағы эпюрлерді тұрғызамыз, ол үшін *II* аралықта кез келген қима жүргіземіз. Кесілген арқалықтың сол жақ бөлігін қарастырамыз; кез келген қиманың орнын z_2 координатасы арқылы анықтаймыз, оның басын арқалықтың сол жақ шетіне орналастырған

Ыңғайлы болады (2.16.2,г сурет). Сонда ($a \leq z_2 \leq a + b$):
 $Q_2 = \sum_{сол} F_{ky} = -q_1 \cdot z_2 + R_A$ - мұнда Q_2 шамасы z_2 координатасына
 сызықты тәуелді; Q_2 эпюрі - түзу; $z_2 = a$ болғанда
 $Q_2 = -q_1 \cdot a + R_A = -6 \cdot 2 + 51,5 = 39,5 \text{ кН}$; $z_2 = a + b$ болғанда
 $Q_2 = -q_1 \cdot (a + b) + R_A = -6 \cdot (2 + 3) + 51,5 = 21,5 \text{ кН}$. II аралықтағы Q
 эпюрін тұрғызамыз (2.16.2,и сурет).

II аралықтағы июші моменттің өрнегін жазамыз:

$M_2 = \sum_{сол} m_{C2} = -q_1 \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} + R_A \cdot (z_2 - a)$ - бұл z_2 координатасының
 квадраттық функциясы; эпюр - парабола; Q_2 нөлден өтпейтін бол-
 ғандықтан, M_2 мәндерін тек қана шекаралық қималарда анықтаған
 жеткілікті болады

$z_2 = a$ болғанда

$$M_2 = -q_1 \cdot \frac{a^2}{2} = -12 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$z_2 = a + b$ болғанда

$$M_2 = \sum_{сол} m_{C2} = -q_1 \cdot \frac{(a + b)^2}{2} + R_A \cdot b = -6 \cdot \frac{5^2}{2} + 51,5 \cdot 3 = 79,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Табылған мәндер бойынша M эпюрін II аралықта тұрғызамыз
 (2.16.2,к сурет).

III аралықты қарастырамыз. Арқалықты осы аралықтағы кез
 келген қимасымен екі бөлікке кесеміз. Алдыңғыдай арқалықтың сол
 жақ бөлігін қарастырамыз, кез келген қима орнын z_3 координатасы
 арқылы анықтаймыз, оның басын III аралықтың сол шак шетіне
 орналастырамыз (2.16.2,д сурет). z_3 координатасы келесі шектерде
 өзгереді: $0 \leq z_3 \leq c - b$. Көлденең күштің өрнегін жазамыз

$$Q_3 = \sum_{сол} F_{ky} = -q_1 \cdot (a + b) + R_A - q_2 \cdot z_3.$$

Бұл - z_3 координатасына сызықты тәуелдік;

Q_3 эпюрі - түзу;

$z_3 = 0$ болғанда

$$Q_3 = -q_1 \cdot (a + b) + R_A = 21,5 \text{ кН},$$

$z_3 = c - b$ болғанда

$Q_3 = -q_1 \cdot (a + b) + R_A - q_2 \cdot (c - b) = -6(2 + 3) + 51,5 - 10(6 - 3) = -8,5 \text{ кН}$.
Табылған мәндер бойынша III аралықтағы Q эпюрін тұрғызамыз (2.16.2, *u* сурет).

Июші моменттің үшінші аралықтағы өрнегін жазамыз

$$M_3 = \sum_{\text{кол}} M_{C3} = -q_1(a + b) \left(\frac{a + b}{2} + z_3 \right) + R_A(b + z_3) - q_2 \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2}.$$

Бұл - z_3 координатасының квадраттық тәуелдігі;

эпюр – парабола болып табылады. Аралықта Q нөлден өтетін болғандықтан, июші моменттің максималдық қ мәніне сәйкес келетін параболаның төбесі болады (өйткені Q шамасы оң таңбадан теріс таңбаға ауысады); осыған сәйкес z_3^* мәнін Q өрнегін нөлге теңестіріп табамыз

$$Q_3(z_3^*) = -q_1(a + b) + R_A - q_2 \cdot z_3^* = 0,$$

осыдан

$$z_3^* = \frac{-q_1(a + b) + R_A}{q_2} = \frac{-6(2 + 3) + 51,5}{10} = 2,15 \text{ м}.$$

Июші моменттің үш нүктедегі мәндері келесі болады

$z_3 = 0$ болғанда

$$M_3 = -q_1 \frac{(a + b)^2}{2} + R_A \cdot b = -6 \frac{(2 + 3)^2}{2} + 51,5 \cdot 3 = 79,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$z_3 = 2,15 \text{ м}$ болғанда

$$M_3 = -6(2 + 3) \left(\frac{2 + 3}{2} + 2,15 \right) + 51,5(3 + 2,15) - 10 \frac{2,15^2}{2} = 102,4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$z_3 = 3 \text{ м}$ болғанда

$$M_3 = -6(2 + 3) \left(\frac{2 + 3}{2} + 3 \right) + 51,5(3 + 3) - 10 \frac{3^2}{2} = 99 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Табылған мәндер бойынша III аралықтағы M эпюрін тұрғызамыз (2.16.2, *к* сурет).

IV және V аралықтар үшін қималардың оң жағында орналасқан арқалық бөліктерін қарастырамыз.

2.16.2, *e* суретте V аралықта Q және M эпюрлерін тұрғызу үшін қиманың оң жағындағы арқалық бөлігі көрсетілген; кез келген қима орны z_5 координатасымен анықталады, оның басы арқалықтың оң жақ шетімен түйістірілген ($0 \leq z_5 \leq l - d$).

Сонда $Q_5 = \sum_{oH} F_{ky} = -R_B = -28,5 \text{ кН}$ - z_5 координатасына

тәуелсіз; эпюр – абсцисса өсіне параллель түзу болып келеді.

$M_5 = \sum_{oH} M_{C5} = R_B \cdot z_5$ - бұл z_5 координатасының сызықтық

тәуелдігі, эпюр – көлбеу түзу; $z_5=0$ болғанда $M_5 = 0$; $z_3=l-d$ болғанда $M_5 = R_B(l-d) = 28,5(10-8) = 57 \text{ кН} \cdot \text{м}$. M эпюрі 2.16.2,к суретте көрсетілген.

2.16.2,ж суретте IV аралықта Q және M эпюрлерін тұрғызу үшін қиманың оң жағындағы арқалық бөлігі көрсетілген; кез келген қима орны, басы арқалықтың оң шетінде орналасатын z_4 координатасымен анықталады ($l-d \leq z_4 \leq l-c$).

Сонда $Q_4 = \sum_{oH} F_{ky} = -R_B = -28,5 \text{ кН}$ - z_4 координатасына

тәуелсіз; эпюр – абсцисса өсіне параллель, тап сол V аралықтағы түзудің жалғасы болып келеді (2.16.2,и сурет). Июші моменттің өрнегі: $M_4 = R_B \cdot z_4 - M_0$ - ол z_4 координатасына сызықты тәуелді, эпюр – көлбеу түзу; $z_4 = l-d$ болғанда

$$M_4 = R_B(l-d) - M_0 = 28,5(10-8) - 15 = 42 \text{ кНм};$$

$z_4 = l-c$ болғанда

$$M_4 = R_B(l-c) - M_0 = 28,5(10-6) - 15 = 99 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

M эпюрі 2.16.2,к суретте көрсетілген.

2.16.2 мысал. 2.16.3,а суретте көрсетілген арқалық үшін $M_0=16 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_1=4 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $F=30 \text{ кН}$, $q=10 \text{ кН/м}$, $a=b=2 \text{ м}$, $c=4 \text{ м}$ болғанда Q және M эпюрлерін тұрғызу керек.

Шешуі: Тұғырлар реакцияларын анықтаудан бастаймыз, ол үшін тепе-теңдік теңдеулерін құрастырамыз (реакция күштері 2.16.3,а суретте үзілмелі сызықпен көрсетілген)

$$\sum m_A = R_B(a+b+c) - q \cdot c \left(a + b + \frac{c}{2} \right) + F(a+b) - M_1 + M_0 = 0,$$

$$\sum m_B = R_A(a+b+c) - M_0 + M_1 + F \cdot c - q \frac{c^2}{2} = 0,$$

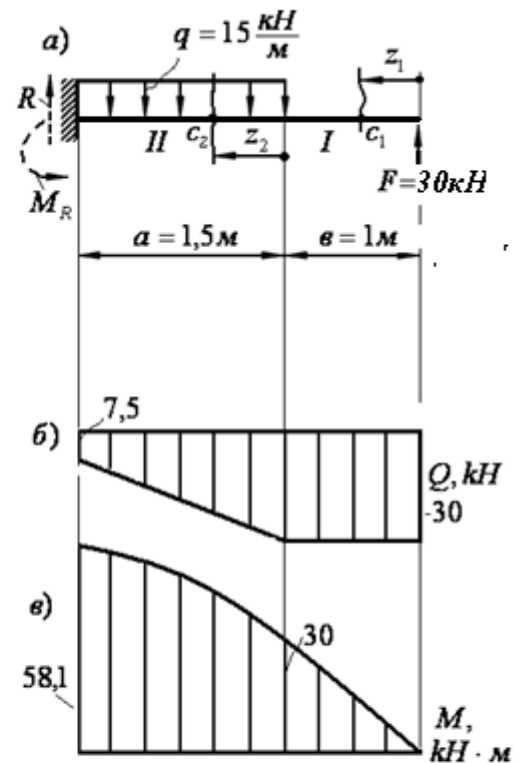
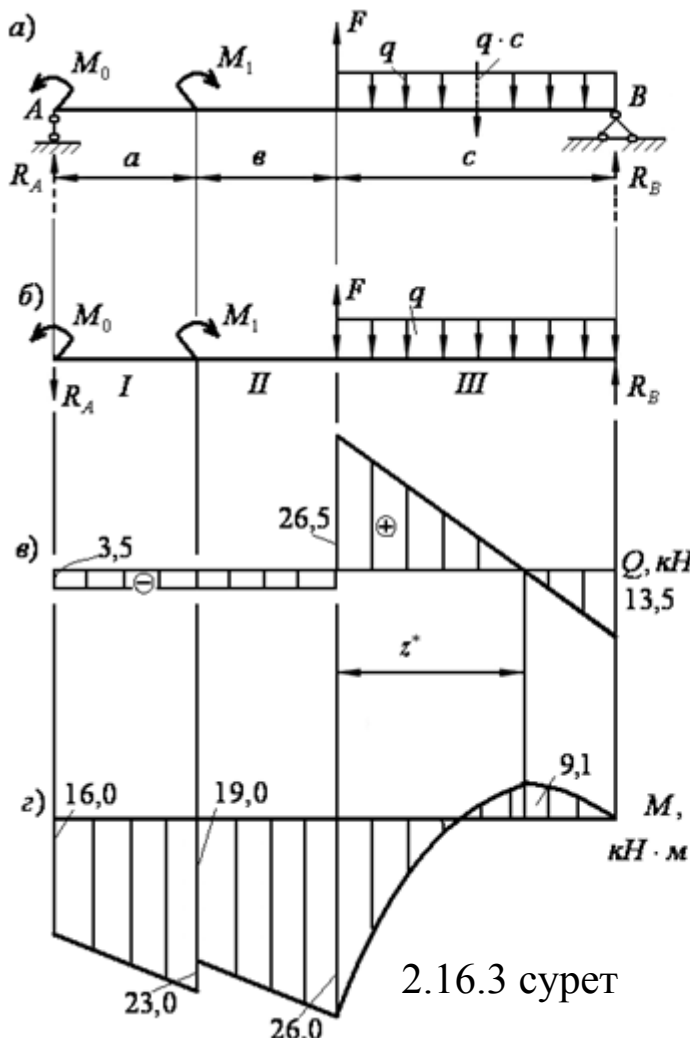
осыдан

$$R_B = \frac{q \cdot c \cdot (a + b + \frac{c}{2}) - F(a + b) + M_1 - M_0}{a + b + c} =$$

$$= \frac{10 \cdot 4(2 + 2 + \frac{4}{2}) - 30(2 + 2) + 4 - 16}{2 + 2 + 4} = 13,5 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{M_0 - M_1 - F \cdot c + q \frac{c^2}{2}}{a + b + c} = \frac{16 - 4 - 30 \cdot 4 + 10 \frac{4^2}{2}}{2 + 2 + 4} = -3,5 \text{ кН}.$$

«-» таңбасы реакция бағыты алдында қабылданған бағытқа қарсы болатынын көрсетеді; 2.16.3,б суретте реакциялардың шынайы бағыттары көрсетілген.



I аралықта (2.16.3,б сурет) Q_I тұрақты (таралған күштер жоқ болғандықтан), оның модулі $R_A = 3,5 \text{ кН}$ тең және таңбасы теріс (I аралықтағы кез келген қиманың сол жағында төмен бағытталады) – 2.16.3,в суреттегі эпюрді тұрғызамыз. Июші моменттің эпюрі мұнда

сызықты, кемитын болады (Q_I теріс болғандықтан), аралықтың сол жақ шетінде $M_I = -M_0 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}$ мәнінен басталады, ал оң жақ шетінде келесіге тең $M_I = -M_0 - R_A \cdot a = -16 - 3,5 \cdot 2 = -23 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (мұндағы R_A мәнін «+» таңбасымен алдық, өйткені M_I өрнегінде біз реакцияның шынайы бағытын ескердік). Эпюр 2.16.3,2 суретте көрсетілген.

II аралықта Q_{II} эпюрінің түрі I аралықтағыдай болады: $Q_{II} = -R_A = -3,5 \text{ кН}$. Июші момент сызықты заңмен өзгереді және аралықтың сол жақ шетінде $M_{II} = -M_0 + M_I - R_A \cdot a = -19 \text{ кН} \cdot \text{м}$ мәніне ие болады (M_I мәніне жоғары қарай үзік болады); оң жақ шетінде $M_{II} = -M_0 + M_I - R_A \cdot (a + b) = -26 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

III аралықта көлденең күш сызықты заңмен өзгереді (аралықта бірқалыпты таралған күштер болғандықтан). III аралықтың сол жақ шетінде эпюрге F шамасына тең үзік болады: $Q_{III} = -R_A + F = -3,5 + 30 = 26,5 \text{ кН}$. Оң жақ шетінде, аралықтың сол жақ бөлігін қарастыратын болсақ, $Q_{III} = -R_A + F - q \cdot c = -3,5 + 30 - 10 \cdot 4 = -13,5 \text{ кН}$. Егер оң жақ бөлігін қарастырсақ, онда $Q_{III} = -R_B = -13,5 \text{ кН}$, шамалары бірдей шықты. Июші момент III аралықта квадраттық заңмен өзгереді. Эпюр сол жақ шетінде $M_{III} = -26 \text{ кН} \cdot \text{м}$ мәнінен басталады, аралықтың бір жерінде максималдық шамасына ие болады (Q_{III} эпюрі нөлден өтетін қимада) және оң жақ шетінде нөлге тең болу керек. Соңғысын тексереміз

$$M_{III} = -M_0 + M_I - R_A(a + b + c) + F \cdot c - q \frac{c^2}{2} =$$

$$= -16 + 4 - 3,5(2 + 2 + 4) + 30 \cdot 4 - 10 \frac{4^2}{2} = 0.$$

Енді июші моменттің аралықтағы максималдық мәнін іздейміз. Q_{III} эпюрін құрайтын үшбұрыштар ұқсастығынан аламыз $26,5 : z^* = 13,5 : (c - z^*)$, осыдан $z^* = c \frac{26,5}{40} = 2,65 \text{ м}$. Аралықтың сол жақ шеті мен максималдық момент болатын қима арасындағы июші момент мәндерінің өзгерісі оң және сол екі қима арасындағы

көлденең күш эпюрінің ауданына тең болғандықтан, аламыз

$$M_{\max} = -26 + \frac{1}{2} \cdot 26,5 \cdot 2,65 = 9,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2.16.3 мысал. 2.16.4,*a* суретте көрсетілген арқалық үшін эпюрлерді тұрғызу керек.

Шешуі: Арқалықта екі аралық бар. Қатты бекітпедегі R реакциясы мен M_R реактивтік моментін анықтамау үшін, екі аралықта да қимамен кесілген оң жақ бөлікті қарастырамыз.

I аралықта ($0 \leq z_1 \leq b$): $Q_1 = \sum_{\text{он}} F_{ky} = -F = -30 \text{ кН}$, ол z_1 координатасына тәуелсіз; $M_1 = \sum_{\text{он}} M_{C1} = F \cdot z_1$ - бұл түзудің теңдеуі; сонда $z_1 = 0$ болғанда $M_1 = 0$, $z_1 = b$ болғанда $M_1 = F \cdot b = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

II аралықта ($0 \leq z_2 \leq a$): $Q_2 = \sum_{\text{он}} F_y = -F + q \cdot z_2$ - түзудің теңдеуі; $z_2 = 0$ болғанда $Q_2 = -F = -30 \text{ кН}$; $z_2 = a$ болғанда $Q_2 = -F + q \cdot a = -7,5 \text{ кН}$. Июші момент $M_2 = F \cdot (b + z_2) - q \frac{z_2^2}{2}$ - бұл параболаның теңдеуі; аралықта Q_2 таңбасын өзгертпейтін болғандықтан, параболаның төбесі болмайды; $z_2 = 0$ болғанда $M_2 = F \cdot b = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $z_2 = a$ болғанда

$M_2 = 30 \cdot (1 + 1,5) - 15 \frac{1,5^2}{2} = 58,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Эпюрлер 2.16.4,*б,в* суреттерде көрсетілген.

2.16.4 мысал. ABC арқалығы үшін модулі максималдық қ июші моментті анықтау керек (2.16.5,*a* сурет).

Шешуі: ABC аралығына үстіндегі DCE арқалығының тұғырлары арқылы жүктеме түсіріледі, оны анықтау үшін DCE арқалығын бөлек қарастырамыз (2.16.5,*б* сурет). Тепе-теңдік теңдеулерін жазып, тұғырлардың R_D және R_C реакцияларын анықтаймыз

$$\sum m_D = M_0 - R_C \cdot 2a + F \cdot a = 0,$$

осыдан

$$R_C = \frac{M_0 + F \cdot a}{2a} = \frac{4F \cdot a + F \cdot a}{2a} = \frac{5}{2} F,$$

$$R_D = \frac{-M_0 + F \cdot a + F \cdot 2a}{2a} = \frac{-4F \cdot a + F \cdot a + F \cdot 2a}{2a} = -\frac{F}{2}.$$

R_D теріс болып шықты, яғни D нүктесіндегі DCE арқалығына ABC арқалығынан түскен күш төменге бағытталады.

Енді ABC арқалығын қарастырамыз (2.16.5, в сурет). D нүктесінде түсірілген күш $\bar{R}_D' = -\bar{R}_D$, $R_D' = F/2$ және жоғарыға бағытталады. C нүктесінде әсер ететін күш $\bar{R}_C' = -\bar{R}_C$, $R_C' = 5/2 F$ және төмен бағытталады. R_A және R_B реакцияларын жоғарыға бағыттап, оларды тепе-теңдік тендеулерінен анықтаймыз

$$\sum m_A = \frac{5}{2} F \cdot 3a - R_B \cdot 2a - \frac{F}{2} a = 0$$

осыдан

$$R_B = \frac{\frac{5}{2} F \cdot 3a - \frac{F}{2} a}{2a} = \frac{7}{2} F,$$

$$\sum m_B = \frac{5}{2} F \cdot a + \frac{F}{2} a + R_A \cdot 2a = 0,$$

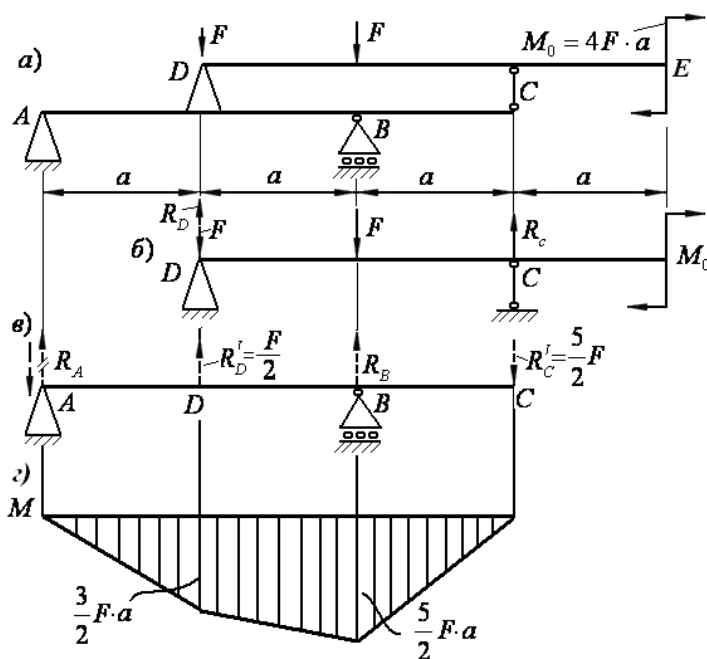
осыдан

$$R_A = \frac{-\frac{5}{2} F \cdot a - \frac{F}{2} \cdot a}{2a} = -\frac{3}{2} F.$$

R_A реакциясы алдында қабылданған бағытқа қарсы болып шықты. 2.16.5, в суретте бастапқы бағыты сызылып, қасында шынайы бағыты көрсетілген. Вертикаль өске барлық күштердің проекцияларының қосындысы нөлге тең болатынын тексеруге қиын емес.

Максималдық қиюші моментті анықтау үшін, M эпюрін тұрғызамыз. Қарастырылатын жағдайда Q эпюрін тұрғызбауға болады, өйткені таралған күштер жоқ, сондықтан аралықтар ішінде июші моменттің экстремалды мәндері орын алмайды – әр аралықта M эпюрі бір сарынды.

A тұғырының үстінде июші момент нөлге тең; D қимасында ол R_A күшінің моментімен анықталады, яғни $M = -R_A \cdot a = -\frac{3}{2} F \cdot a$. C



2.16.5

қимасында июші момент нөлге тең, ал B тұғырының үстінде табамыз

$$M = -R_C \cdot a = -\frac{5}{2} F \cdot a.$$

Сонымен, июші моменттің максималдық модулі $M|_{\max} = \frac{5}{2} F \cdot a.$

2.16.5 мысал. 2.16.6,а суретте көрсетілген арқалық үшін Q және M эпюрлерін тұрғызу керек.

Шешуі: Үшбұрыш заңымен таралған күштердің тең әсерлі күші сол үшбұрыштың ауданына тең болатынын және оның әсер ету сызығы үшбұрыштың ауырлық центрінен өтетінін ескеріп, тепе-теңдік теңдеулерінен тұғырлар реакцияларын анықтаймыз

$$\sum m_A = R_B \cdot l - \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = 0, \text{ осыдан } R_B = \frac{\frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l}{l} = \frac{q_0 \cdot l}{3};$$

$$\sum m_B = R_A \cdot l - \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0, \text{ осыдан } R_A = \frac{\frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3}}{l} = \frac{q_0 \cdot l}{6}.$$

Барлық күштердің вертикаль өске проекцияларының қосындысын тексеріп, реакциялар дұрыс табылғанын көреміз

$$\sum F_y = R_A + R_B - \frac{q_0 \cdot l}{2} = \frac{q_0 \cdot l}{6} + \frac{q_0 \cdot l}{3} - \frac{q_0 \cdot l}{2} = 0.$$

Арқалықтың бір ғана аралығы бар. Сол жақ тірегiнен кез келген z қашықтығында қима жүргізіп, арқалықты екі бөлікке кесеміз және сол жақ бөлігін қарастырамыз

$$Q = \sum_{\text{сол}} F_y = R_A - \frac{1}{2} q_z \cdot z,$$

мұндағы $q_z = q_0 \cdot z/l$ болғандықтан,

$$Q = \sum_{\text{сол}} F_y = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0}{2l} \cdot z^2 - \text{ бұл параболаның теңдеуі. } Q$$

туындысы $z=0$ болғанда нөлге тең, сондықтан эпюрдің төбесі $z=0$ қимасында орын алады, содан кейін ол бір сарынды кемиді, өйткені

$q < 0$. Эпюрдің қисықтығы теріс, өйткені $\frac{d^2 Q}{dz^2} = \frac{dq_z}{dz} = \frac{q_0}{l} < 0$. Эпюрді

тұрғызамыз (2.16.6,б сурет): $z=0$ болғанда $Q = R_A = \frac{q_0 \cdot l}{6}$, $z=l$

болғанда $Q = -R_B = -\frac{q_0 \cdot l}{3}$. $Q=0$ болатын z^* координатасын

анықтаймыз. $Q = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0}{2l} \cdot (z^*)^2 = 0$ өрнегінен аламыз $z^* = \pm l / \sqrt{3}$.

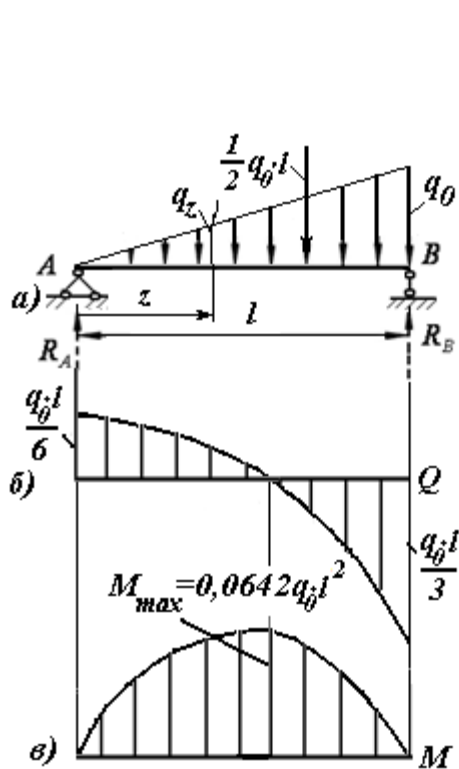
Мұнда тек қана оң мәнінің мағынасы бар, яғни $z^* = l / \sqrt{3} = 0,577l$.

Июші моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.16.6, в сурет). A және B тұғырларында $M=0$ болатыны анық. z қимасындағы июші моменттің өрнегін келесідей жазамыз

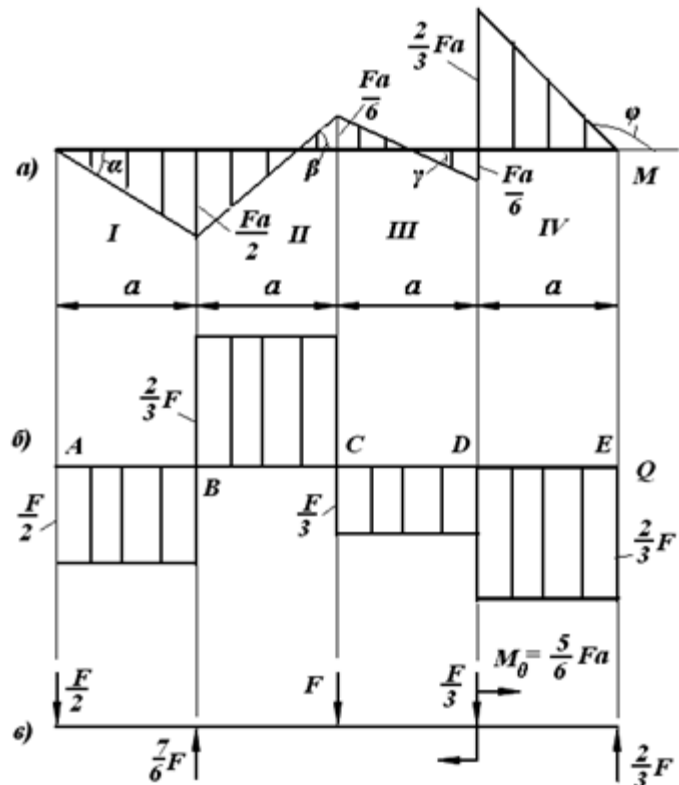
$$M = R_A \cdot z - \frac{1}{2} q_z \cdot z \cdot \frac{z}{3} = R_A \cdot z - q_0 \cdot \frac{z^3}{6l}.$$

Содан кейін $Q=0$ болатын қимада максималдық қ июші моментті анықтаймыз

$$M_{\max} = R_A \cdot z^* - q_0 \cdot \frac{(z^*)^3}{6l} = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot 0,577l - \frac{q_0}{6l} \cdot (0,577l)^3 = 0,0642 q_0 \cdot l^2.$$



2.16.6 сурет



2.16.7 сурет

2.16.6 мысал. Берілген июші моменттер эпюрі бойынша (2.16.7, а сурет) көлденең күштердің эпюрін тұрғызу керек және сол эпюрді туындататын жүктемені анықтау керек.

Шешуі: Эпюрді 4 аралыққа бөлеміз. Эпюрге жүргізілген жанаманың көлбеу бұрышының тангенсі сәйкес қимадағы көлденең күшті береді. Әр аралықта жанаманың көлбеу бұрыштары тұрақты болып тұр.

$$I \text{ аралықта: } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{F \cdot a}{2} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{F}{2}, \quad Q_1 = -\frac{F}{2}.$$

$$II \text{ аралықта: } \operatorname{tg} \beta = \left(\frac{F \cdot a}{6} + \frac{F \cdot a}{2}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{2}{3}F, \quad Q_2 = \frac{2}{3}F.$$

$$III \text{ аралықта: } \operatorname{tg} \gamma = -\left(\frac{F \cdot a}{6} + \frac{F \cdot a}{6}\right) \cdot \frac{1}{a} = -\frac{F}{3}, \quad Q_3 = -\frac{F}{3}.$$

$$IV \text{ аралықта: } \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2}{3}F \cdot a \cdot \frac{1}{a} = -\frac{2}{3}F, \quad Q_4 = -\frac{2}{3}F.$$

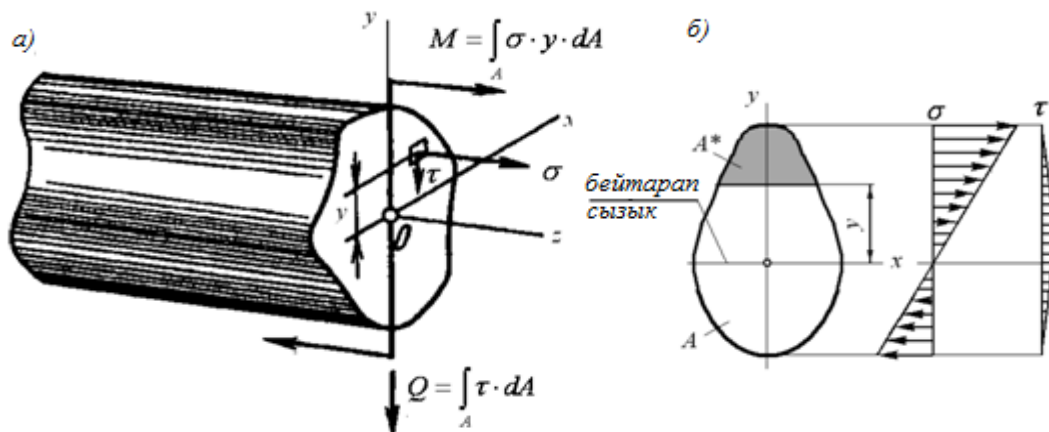
Табылған мәндер бойынша көлденең күштердің эпюрін тұрғызамыз (2.16.7, б сурет). Аралықтарда көлденең күштер әртүрлі болғандықтан, арқалық A, B, C, D, E қималарында қадалған күштермен жүктеледі. Сол күштерге Q эпюрінде үзіктер және M эпюрінде сынықтар сәйкес келеді. Осыдан басқа D қимасында арқалық $M_0 = 5F \cdot a / 6$ қадалған моментпен (күштер жұбымен) жүктеледі.

Арқалықтың жүктелу сұлбасы 2.16.7, в суретте көрсетілген.

2.17 Жазық иілу жағдайындағы арқалықтарды қауіпсіз кернеулер бойынша беріктікке есептеу

Көлденең иілу кезінде арқалықтың көлденең қималарында тік және жанама кернеулер орын алады (2.17.1 сурет).

Көлденең қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеулер келесі формуламен анықталады



2.17.1 сурет

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y \quad (2.17.1)$$

мұндағы M – қарастырылатын қимадағы июші момент;

J_x – иілу yz жазықтығында болған жағдайда x бас центрлік инерция өсімен беттесетін бейтарап сызыққа қатысты инерция моменті;

y – кернеулер есептелетін нүктеден бейтарап сызыққа дейін қашықтық.

Арқалықтың көлденең қимасында тік кернеулер сызықты заңмен үлестіріледі, олардың ең үлкен мәндері бейтарап сызықтан ең алыс қашықтықта орналасқан нүктелерде орын алады (2.17.1,б сурет). Арқалықтың қимасы тұрақты болғанда, тік кернеулер ең үлкен мәніне июші момент максималдық қ болатын қимада жетеді, ол келесі формуламен анықталады

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{J_x} \cdot |y|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \quad (2.17.2)$$

Келесі шама

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \quad (2.17.3)$$

қиманың иілу кезіндегі x өсіне қатысты қарсыласу моменті немесе өстік қарсыласу моменті деп аталады; оның өлшем бірлігі - үшінші дәрежедегі ұзындық; ол көлденең қиманың геометриялық сипаттамасы болып келеді, яғни ол тек қана қиманың өлшемдері мен пішініне тәуелді.

2.14.4 суретте көрсетілген қималар үшін өстік қарсыласу моменттері келесі формулалармен есептеледі:

тік төртбұрыш үшін

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}, \quad (2.17.4)$$

шеңбер үшін

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1d^3, \quad (2.17.5)$$

сақина үшін

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32} (1 - c^4) \approx 0,1d^3 (1 - c^4), \quad c = \frac{d_0}{d}. \quad (2.17.6)$$

Қимасы тұрақты және созылу мен сығылуға бірдей қарсыласатын материалдан жасалған арқалықты қауіпсіз кернеу әдісімен беріктікке есептеуі келесі беріктік шарты бойынша орындалады

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.17.7)$$

мұндағы $|M|_{\max}$ - июші моменттің абсолют шамасымен алынған максималдық мәні,

$[\sigma]$ – қауіпсіз кернеу.

Көлденең қималардың ең үнемді пішіндері – материал шығыны ең аз кезде ең үлкен өстік қарсыласу моменті болатын пішіндер. Сондай тиімді қималарға жататын – стандартталған қоставр мен швеллер профильдері, жұқа қабырғалы қорап және сақина тәрізді қималар. Стандартты профильдердің өстік қарсыласу моменттері әр типтік өлшемдер үшін алдын ала есептеліп, кестелерде келтіріледі.

Егер арқалықтың материалы созылу мен сығылуға әртүрлі қарсыласатын болса, келесі жағдай орын алуы мүмкін (қимасы тұрақты арқалық үшін): арқалық қимасы бейтарап сызыққа қатысты симметриялық болып келеді және июші моменттердің эпюрі арқалық ұзындығы бойымен таңбасын сақтайды; осы жағдайда беріктікке есептеу (2.17.7) шарты бойынша орындалады, сонымен $[\sigma]$ ретінде созылуға қауіпсіз кернеу $[\sigma_{\cos}]$ мен сығылуға қауіпсіз кернеу $[\sigma_{\text{сыг}}]$ ішінен ең кішісі алынады. Қалған жағдайларда есептеуді максималдық созылу кернеуі де, максималдық сығылу кернеуі де бойынша орындау керек, сонымен июші моменттердің эпюрі таңбасын сақтамаса және қима бейтарап сызыққа қатысты симметриялық болмаса, онда есептеуді тек қана максималдық модулімен алынған июші момент емес, таңбасы қарсы максималдық июші момент үшін да орындау керек.

Арқалық көлденең қимасының кез келген нүктесіндегі жанама кернеу (2.17.1 сурет) Журавскийдің формуласымен анықталады

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot b_y}, \quad (2.17.8)$$

мұндағы Q_y – қарастырылатын қимадағы көлденең күш;

S_x^* - бейтарап сызықтан у қашықтығында нүкте үстінен бейтарап сызыққа параллель жүргізілген түзуден жоғары орналасқан қима бөлігінің бейтарап сызыққа қатысты статикалық моменті (2.17.1 сурет);

J_x – көлденең қиманың бейтарап сызыққа қатысты инерция моменті;

b – көлденең қиманың қарастырылатын нүкте деңгейіндегі ені.

Көпшілік жағдайда жанама кернеулер онша үлкен емес және оларды беріктікке есептеу кезінде ескермейді. Ерекшелік ретінде үлкен қадалған күштермен жүктелген жұқа қабырғалы арқалықтарды және өте қысқа арқалықтарды атап өту керек. Осы жағдайда тік кернеулер бойынша есептеумен қатар ең үлкен жанама кернеулер бойынша келесі шартты қолданумен орындайды

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (2.17.9)$$

Егер көлденең қима нүктелерінде біржолы реті бірдей тік және жанама кернеулер орын алатын болса, онда есептеуді эквивалент кернеу бойынша беріктік теорияларының біреуін қолданып, орындайды.

2.17.1 мысал. 2.16.1, *a* суретте көрсетілген арқалықтың беріктігін тексеру керек, егер оның көлденең қимасы қабырғалары 100×180 мм тік төртбұрыш болса және қауіпсіз кернеулер $[\sigma]=200$ МПа, $[\tau]=110$ МПа болса.

Шешуі: Алдымен Q және M эюрлерін тұрғызу керек. 2.16.1 мысалда біз оларды тұрғызғанбыз (2.16.1, *u, k* суреттер). Арқалықтың екі, орналасу жағдайын қарастырамыз.

I жағдай. Тік төртбұрыштың ұзын қабырғасы yz иілу жазықтығына параллель болсын. Қималар иілу кезінде x өсінен айналады (2.17.2, *a* сурет), сонда $b=100$ мм, $h=180$ мм аламыз; өстік қарсыласу моменті (2.17.4) формуласымен анықталады

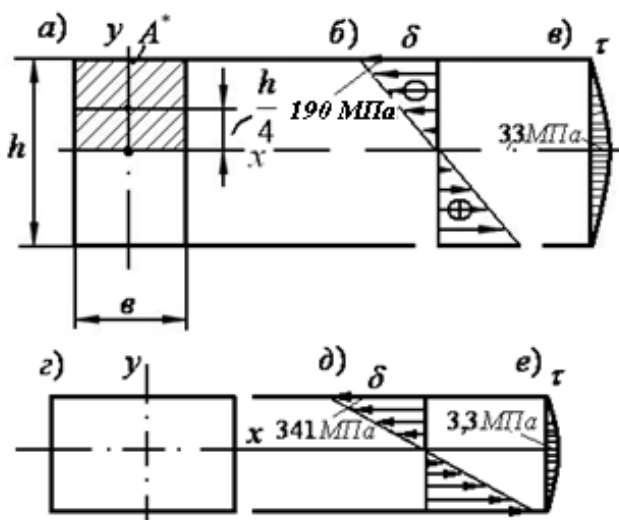
$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,1 \cdot 0,18^2}{6} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Есептік июші момент ретінде эюрдегі модулі максималдық қ июші моментті (2.16.1, *k* сурет) аламыз: $M_{\max}=102,4$ кН·м.

Тік кернеулер бойынша (2.17.7) беріктік шартын тексереміз

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{102,4 \cdot 10^{-3}}{5,4 \cdot 10^{-4}} = 190 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа} \quad - \quad \text{беріктік}$$

шарты орындалады. Көлденең қима бойымен σ таралуы 2.17.2, *b* суретте көрсетілген.



2.17.2 сурет

Жанама кернеулер бойынша беріктік шартын тексеру үшін (2.17.8) формуласын қолданып, τ_{max} мәнін анықтаймыз. Тік төртбұрышты қима үшін $b=const$, сондықтан ең үлкен жанама кернеулер максималдық S_x^* статикалық моментіне сәйкес келетін нүктелерде орын алады. Ол бейтарап сызықта жататын нүктелер

болатыны анық, олар үшін $S_{x_{max}}^* = A^* \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{8}$,

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{сонда} \quad \tau_{max} = \frac{Q \cdot S_{x_{max}}^*}{J_x \cdot b_y} = \frac{Q \cdot b \cdot h^2 \cdot 12}{8 \cdot b \cdot h^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}.$$

Бейтарап сызықтан ең алыс орналасқан қима нүктелерінде $S_x=0$, сондықтан $\tau=0$.

Максималдық қ жанама кернеулерді көлденең күш ең үлкен мәнін алатын қима үшін анықтаймыз (2.16.1, *u* суретте A қиманың сәл ғана оң жағындағы қима үшін, яғни $Q=39,5 \text{ кН}$)

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{max}}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{39,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 0,18} = 3,29 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,29 \text{ МПа} \ll [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Жанама кернеулердің қима бойымен таралуы 2.17.2, *в* суретте көрсетілген.

Сонымен, қарастырылатын жағдайда беріктік шарты тік кернеулер бойынша да, жанама кернеулер бойынша да орындалады, сонымен жанама кернеулердің шамалары өте аз.

II жағдай. Тік төртбұрыштың қысқа қабырғасы uz иілу жазықтығына параллель (2.17.2, *г* сурет). Сонда $b = 180 \text{ мм}$, $h = 100 \text{ мм}$,

$$W_x = \frac{0,18 \cdot 0,1^2}{6} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$\sigma_{max} = \frac{102,4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4}} = 341 \text{ МПа} > [\sigma] = 200 \text{ МПа} - \text{тік кернеулер}$$

бойынша беріктік шарты орындалмайды. τ_{max} мәні өзгермейді, кернеулердің эпюрлері 2.17.2, *д, е* суреттерде көрсетілген.

2.17.2 мысал. ABC арқалығының (2.17.3, *а* сурет) көлденең қимасы, орналасуы 42, *б* суретте көрсетілгендей тавр. $[\sigma_{cos}] = 20 \text{ МПа}$, $[\sigma_{свг}] = 60 \text{ МПа}$ алып, арқалықтың беріктігін тексеру керек.

Шешуі: Тепе-теңдік теңдеулерінен тұғырлардың реакцияларын анықтаймыз

$$\sum m_A = q \cdot 4,5 \cdot 2,25 - R_B \cdot 3 = 0,$$

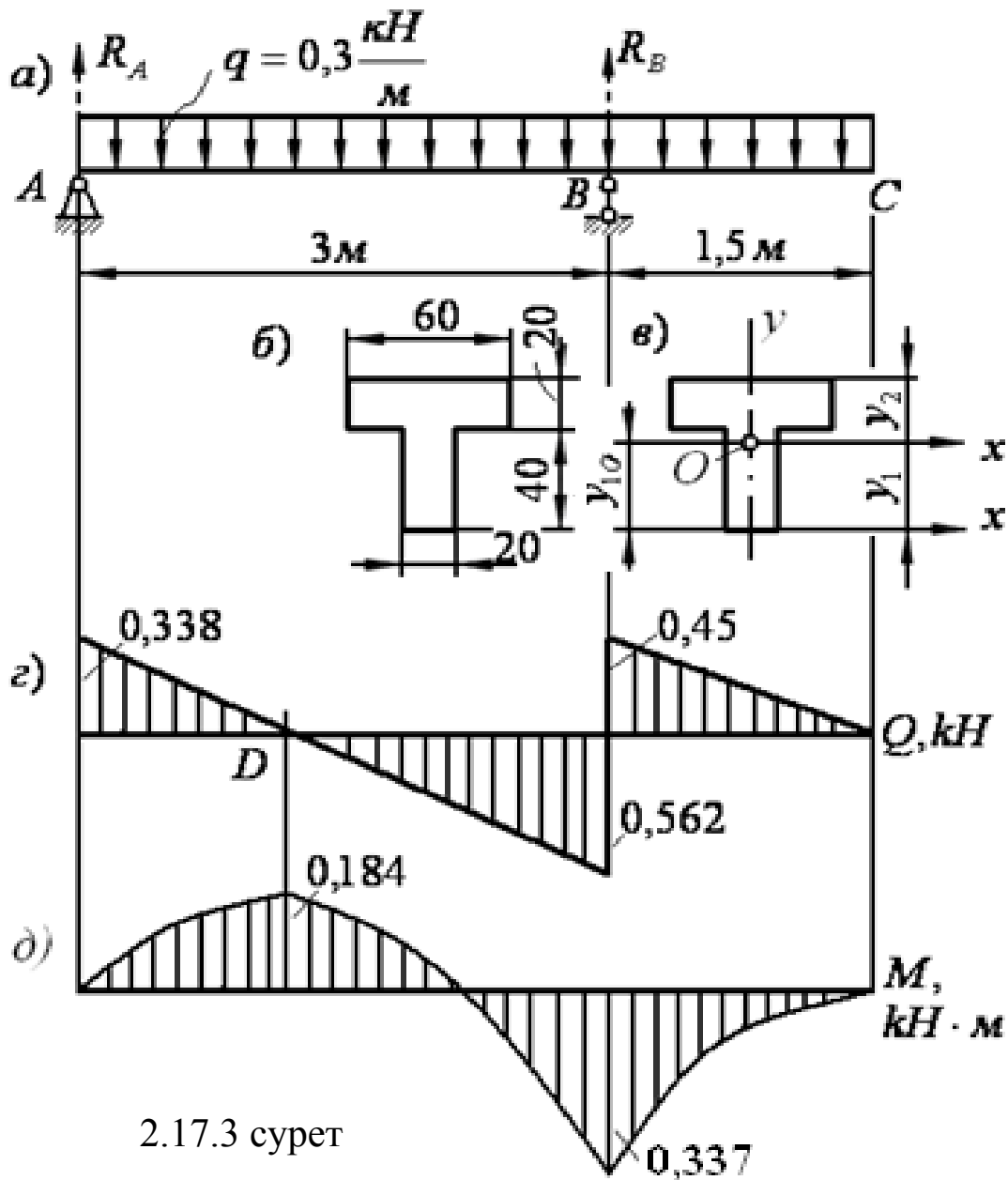
Осыдан

$$R_B = \frac{0,3 \cdot 4,5 \cdot 2,25}{3} = 1,012 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = q \cdot 4,5 \cdot 0,75 - R_A \cdot 3 = 0,$$

осыдан

$$R_A = \frac{0,3 \cdot 4,5 \cdot 0,75}{3} = 0,338 \text{ кН.}$$



2.17.3 сурет

$$\sum F_y = R_A + R_B - q \cdot 4,5 = 1,012 + 0,338 - 0,3 \cdot 4,5 = 0 \quad - \text{ тексеру}$$

ШЫҚТЫ.

Q және M эпюрлерін тұрғызамыз (2.17.3, з, д суреттер).

Қима ауырлық центрінің O орнын, x бейтарап сызығына қатысты инерция моментін және одан ең қашық орналасқан нүктелердің y_1 мен y_2 координаттарын анықтаймыз (2.17.3, в сурет)

$$y_{10} = \frac{S_x}{A} = \frac{60 \cdot 20 \cdot 50 + 40 \cdot 20 \cdot 20}{60 \cdot 20 + 40 \cdot 20} = 38 \text{ мм} = 3,8 \text{ см},$$

$$J_x = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 60 \cdot 20 \cdot 12^2 + \frac{20 \cdot 40^3}{12} + 20 \cdot 40 \cdot 18^2 = 578700 \text{ мм}^4 = 57,87 \text{ см}^4,$$

$$y_1 = 3,8 \text{ см}, \quad y_2 = 2,2 \text{ см}.$$

Кернеулерді (2.17.2) формуласымен есептейміз.

Максималдық қ оң июші момент орын алатын D қимасында аламыз

$$\sigma_{\text{сығ}} = \frac{0,184 \cdot 10^{-3}}{57,87 \cdot 10^{-8}} 2,2 \cdot 10^{-2} = 6,99 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{соз}} = \frac{0,184 \cdot 10^{-3}}{57,87 \cdot 10^{-8}} 3,8 \cdot 10^{-2} = 12,1 \text{ МПа}.$$

Максималдық қ теріс июші момент орын алатын B қимасында

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{сығ}} = \frac{0,337 \cdot 10^{-3}}{57,87 \cdot 10^{-8}} 3,8 \cdot 10^{-2} = 22,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{соз}} = \frac{0,337 \cdot 10^{-3}}{57,87 \cdot 10^{-8}} 2,2 \cdot 10^{-2} = 12,8 \text{ МПа}.$$

Беріктік шарты орындалады, өйткені $\sigma_{\text{max}}^{\text{сығ}} = 22,1 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{сығ}}] = 60 \text{ МПа}$ және $\sigma_{\text{max}}^{\text{соз}} = 12,8 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{соз}}] = 20 \text{ МПа}$. Егер арқалық қимасының тақшасы төмен қарап тұрса, беріктік шарты орындалмайды, өйткені бұл жағдайда $\sigma_{\text{max}}^{\text{соз}} = 22,1 \text{ МПа} > [\sigma_{\text{соз}}] = 20 \text{ МПа}$.

2.17.3 мысал. 2.17.4, а суретте көрсетілген арқалық үшін $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ қабылдап, қоставр түріндегі қиманы таңдау керек.

Шешуі: Тұғырлар реакцияларын анықтап, M эпюрін 2.16.2 мысалдағыдай тұрғызамыз (Q эпюрі бұл жағдайда көмекші рөлін атқарады – ол таралған күштермен жүктелген аралықтарда июші моменттер экстремалды мәндеріне ие болатын қималар бар-жоғын көрсетеді).

2.16.3,2 суретте көрсетілген эпюрден модулі максималдық к июші моментті анықтаймыз $M_{max}=26 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Жобалау есебі болғандықтан, (2.17.7) беріктік шартынан қиманың геометриялық сипаттамасын, яғни өстік қарсыласу моментін өрнектейміз

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{26 \cdot 10^{-3}}{160} = 1,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 162,5 \text{ см}^3. \quad [1-3] \quad \text{оқулықтар}$$

қосымшаларында келтірілген тұржиын кестесін қолданумен ГОСТ 8239-72 бойынша №18а қоставрды таңдаймыз, ол үшін $W_x = 159 \text{ см}^3$.

Сонымен арқалықта асыра тиелгендігі орын алады, өйткені

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{26 \cdot 10^{-3}}{159 \cdot 10^{-6}} = 163,5 \text{ МПа}, \quad \text{бірақ оның шамасы}$$

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = \frac{163,5 - 160}{160} 100 \approx 2\%, \quad \text{бұл онша көп емес, сондықтан}$$

осыны қабылдауға болады.

2.17.3 мысал. 2.17.4,а суретте көрсетілген арқалыққа түсірілген таралған күштің q қарқындылығының қауіпсіз мәнін анықтау керек. Арқалық қимасы 2.17.4,б суретте көрсетілген, қауіпсіз кернеу $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

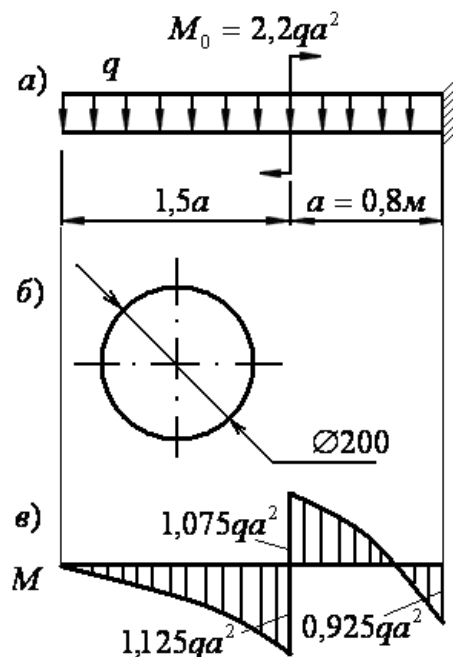
Шешуі. Июші моменттердің эпюрін, оның мінездемелік ординаттарын q мен a арқылы өрнектеп, тұрғызамыз. Максималдық июші момент $M_{max} = 1,125q \cdot a^2$. Оны қауіпсіз июші моментке теңестіреміз, соңғысы (2.17.7) беріктік шартынан өрнектеледі $[M] = 1,125[q] \cdot a^2 = [\sigma] \cdot W_x$.

Осыдан $[q] = \frac{[\sigma] \cdot W_x}{1,125a^2}$. Дөңгелек қима

үшін $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$, сонымен

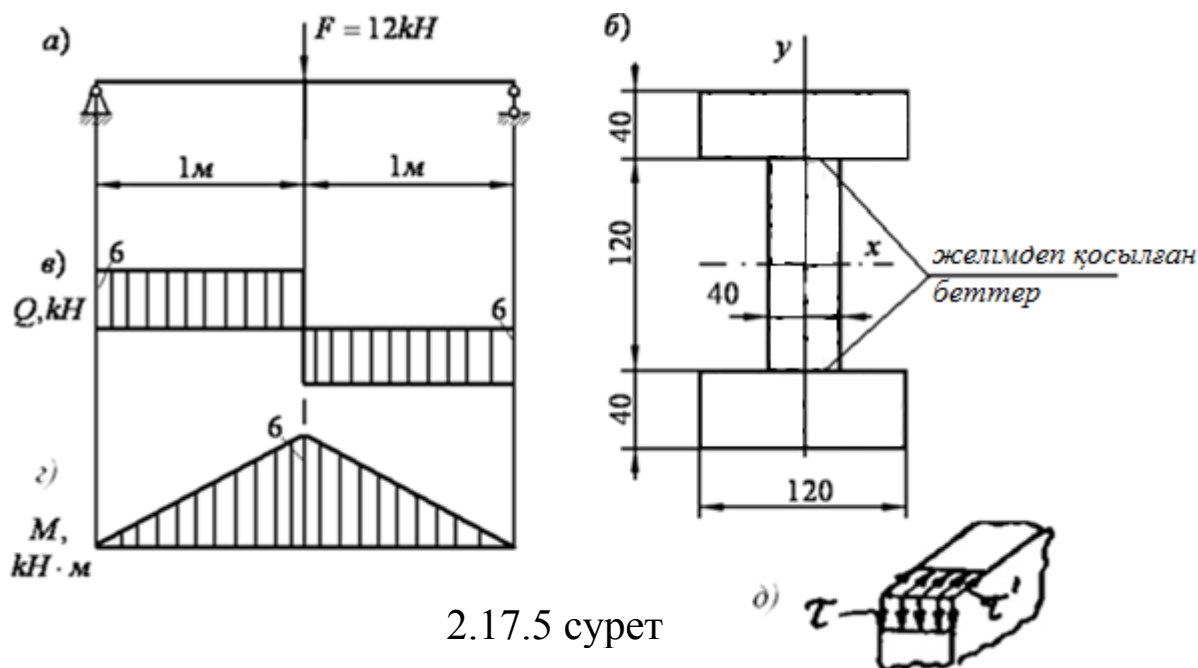
$$[q] = \frac{[\sigma] \cdot \pi \cdot 0,2^3}{32 \cdot 1,125a^2} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,2^3}{32 \cdot 1,125 \cdot 0,8^2} = 10,9 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 10,9 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

2.17.4 мысал. Желімдеп ағаштан құрастырылған арқалықтың беріктігін тексеру керек (2.17.5,а,б суреттер), егер $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$, $[\tau] = 1,2 \text{ МПа}$, $[\tau]_{жел} = 1,0 \text{ МПа}$ болса.



2.17.4 сурет

Шешуі: Көлденең күштер мен июші моменттердің эпюрлері 2.17.5, в, г суреттерде көрсетілген.



2.17.5 сурет

Көлденең қиманың инерция моменті мен өстік қарсыласу моментін есептейміз

$$J_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} - 2 \frac{4 \cdot 12^3}{12} = 6848 \text{ см}^4, \quad W_x = \frac{6848}{10} \approx 685 \text{ см}^3.$$

Арқалық көлденең қимасындағы ең үлкен тік кернеу:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{685 \cdot 10^{-6}} = 8,76 \text{ МПа} < [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Максималдық қ жанама кернеулер статикалық момент S_x^* максималдық қ болатын x өсіндегі нүктелерде орын алады. Есептейміз $S_{x\max}^* = 12 \cdot 4 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 456 \text{ см}^3$. Сонда

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x\max}^*}{J_x \cdot b} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 456 \cdot 10^{-6}}{6848 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 1,0 \text{ МПа} < [\tau] = 1,2 \text{ МПа}.$$

Желімделген орнының беріктігін тексереміз. Бойлық желімделген жазықтықтардағы жанама кернеулер жұптылық заңына бағынады (2.17.5, д сурет) және келесіге тең

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{тақша}}}{J_x \cdot b},$$

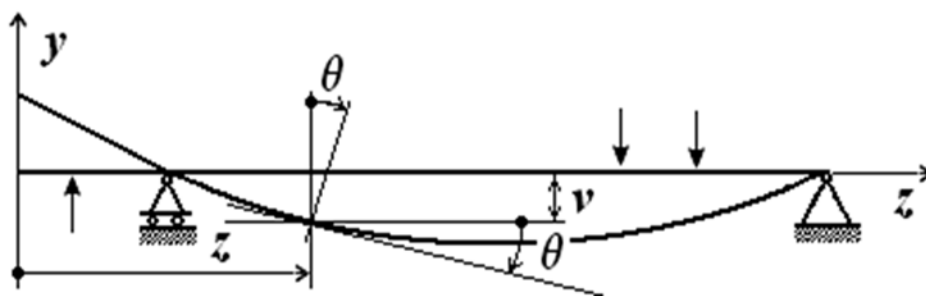
мұндағы $S_x^{max} = 12 \cdot 4 \cdot 8 = 384 \text{ см}^3$ - тақшаның бейтарап сызыққа қатысты статикалық моменті.

$$\text{Сонда } \tau_{\max} = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 384 \cdot 10^{-6}}{6848 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 0,841 \text{ МПа} < [\tau]_{\text{жсел}} = 1,0 \text{ МПа}.$$

Сонымен, арқалық беріктігі қамсыздандырылады.

2.18 Иілу кезіндегі орын ауыстырулар және қатандыққа есептеу

Арқалықтар көлденең қималарының орын ауыстырулары ойысулар мен айналу бұрыштары арқылы сипатталады (2.18.1 сурет). v ойысулары деп көлденең қималардың ауырлық центрлерінің арқалықтың геометриялық өсіне перпендикуляр бағыттағы сызықты орын ауыстыруларын атайды. θ бұрылу бұрыштары деп көлденең қималардың бейтарап сызық айналасындағы бұрыштық орын ауыстыруларын атайды. Арқалық өсі бойымен қималардың орын ауыстырулары ескерілмеуге болатындай өте аз.



2.18.1 сурет

Қималардың ойысулары мен бұрылу бұрыштарын әртүрлі әдістермен анықтауға болады. Мысалы, оларды арқалықтың майысқан өсінің (ол арқалықтың серпімді сызығы деп те аталады) теңдеуі белгілі болғанда анықтауға болады. Иілу yz жазықтығында болғанда (2.18.1 сурет) майысқан өстің $y = y(z)$ теңдеуін білу, z координатасымен орны анықталатын кез келген қиманың v ойысуын және θ бұрылу бұрышын анықтауға жеткілікті болады (мұндағы z өсі арқалықтың деформацияланбаған өсі бойымен бағытталады), өйткені ойысулар аз болғандықтан келесі теңдіктер орын алатыны анық

$$v = v(z) = y(z), \quad \theta = \theta(z) = y'(z). \quad (2.18.1)$$

Арқалықтың майысқан өсінің теңдеуі әртүрлі тәсілдермен алынуы мүмкін, соның ішінде майысқан өстің дифференциалдық теңдеуін тікелей интегралдау арқылы; майысқан өстің дифференциалдық теңдеуі келесідей жазылады

$$y'' = M/E \cdot J_x, \quad (2.18.2)$$

мұндағы M - июші момент;

E – серпімділік модулі;

J_x – көлденең қиманың бейтарап сызыққа қатысты инерция моменті.

$E \cdot J_x$ көбейтіндісі сырықтың (арқалықтың) иілу кезіндегі қатаңдығы деп аталады. Егер арқалықта бірнеше аралық болса, онда әр аралық үшін $M(z)$ және $E \cdot J_x(z)$ өздік теңдеулерімен сипатталады; (2.18.2) теңдеуін интегралдау кезінде әр аралық үшін екі тұрақты пайда болады. Соңғылары келесі шекаралық шарттарынан табылады: арқалықтың бекітілу шарттарына сәйкес келетін шекаралық шарттарынан (қатты бекітпеде қиманың ойысуы мен бұрылу бұрышы нөлге тең, топсалы тұғырларда ойысулар нөлге тең) және іргелес аралықтар шекараларында майысқан өсінің үздіксіз және біртіндеп жалғасу шарттарынан (іргелес аралықтардың шекаралық қималарының ойысулары мен бұрылу бұрыштары тең болу керек).

Орын ауыстыруларды анықтаудың қарастырылған әдісінде көлденең күштің әсері ескерілмейтінін айтып өтейік, өйткені ол тек қана өте қысқа арқалықтар үшін айтарлықтай болып келеді.

Орын ауыстыруларды анықтау иілу кезіндегі қатаңдыққа есептеуді жүргізу үшін керек, қатаңдық шарты келесі түрде жазылады

$$f_{\max} \leq [f], \quad (2.18.3)$$

мұндағы f_{\max} – максималдық ойысу;

$[f]$ – қауіпсіз ойысу, оның мәні құрылымның пайдалануына тәуелді және әдетте l аралық ұзындығының бір бөлігі болып алынады, мысалы, $l/200$ немесе $l/1000$.

Сырғанау мойынтіректерінің және роликті домалау мойынтіректерінің дұрыс жұмысын қамсыздандыру үшін кейбірде қосымша қатаңдық шарты қойылады, ол тірек қималарының бұрылу бұрыштарын шектейді ($0,001 \text{ рад}$)

$$\theta \leq [\theta]. \quad (2.18.4)$$

Төмендегі мысалдарда арқалықтардың қатаңдықтары тұрақты болып есептеледі.

2.18.1 мысал. Бір қалыпты таралған күштермен жүктелген консольды арқалықтың бекітілмеген шетінің ойысуы мен бұрылу бұрышын анықтау керек (2.18.2 сурет).

Шешуі: Координаттар басын қатты бекітпеде орнатып, одан z қашықтықта орналасқан кез келген қимадағы июші моменттің өрнегін жазамыз

$$M = -q \frac{(a-z)^2}{2}.$$

Майысқан өстің дифференциалдық теңдеуі (2.18.2) формуласы бойынша келесі түрде жазылады

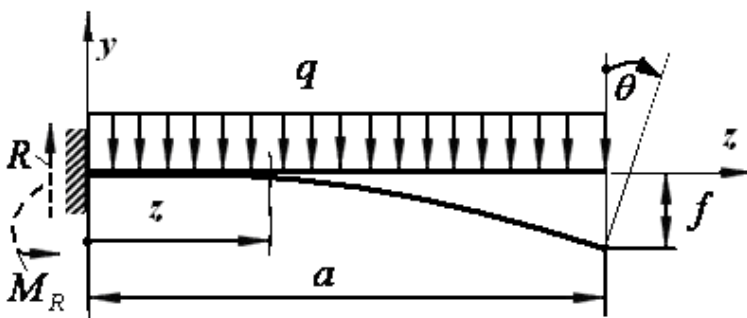
$$y'' = -\frac{q}{2E \cdot J_x} (a-z)^2 = -\frac{q}{2E \cdot J_x} (a^2 - 2a \cdot z + z^2).$$

Осы теңдеуді екі рет интегралдап, ойысулар мен бұрылу бұрыштарының теңдеулерін аламыз

$$y' = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(a^2 \cdot z - 2a \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + C_1 \right),$$

$$y = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(a^2 \frac{z^2}{2} - a \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} + C_1 \cdot z + C_2 \right).$$

Интегралдау кезінде пайда болатын C_1 мен C_2 тұрақтыларын қатты



2.18.2 сурет

бекітпедегі шекаралық шарттарынан анықтаймыз. $z=0$ болғанда $y=0$; осыдан ойысулар теңдеуін қолданып, аламыз $C_2=0$. $z=0$ болғанда $y'=0$; осыдан бұрылу бұрыштарының теңдеуін қолданып, табамыз $C_1=0$.

Сонымен келесі теңдеулерді аламыз

- ойысулар үшін $y = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(a^2 \frac{z^2}{2} - a \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{12} \right);$

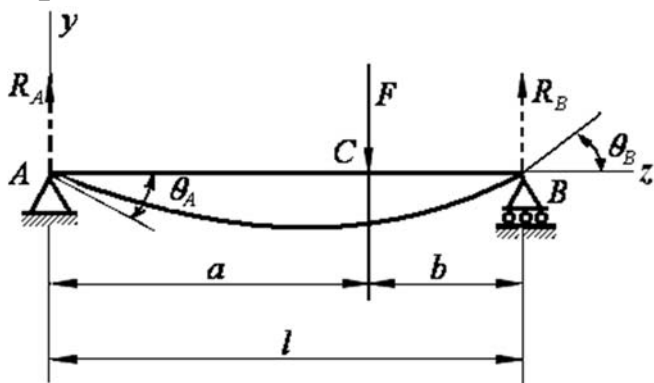
- бұрылу бұрыштары үшін $y' = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(a^2 \cdot z - 2a \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right).$

Осыларға $z=a$ мәнін қойып, арқалықтың бос шетінің f ойысуын және θ бұрылу бұрышын табамыз

$$f = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{12} \right) = -\frac{q \cdot a^4}{8E \cdot J_x},$$

$$\theta = -\frac{q}{2E \cdot J_x} \left(a^3 - a^3 + \frac{a^3}{3} \right) = -\frac{q \cdot a^3}{6E \cdot J_x}.$$

2.18.2 мысал. Шеттерінен a және b қашықтығында F күшімен жүктелген, топсалы бекітілген арқалықтың серпімді сызығының теңдеуін анықтау және оны талдау керек (2.18.3 сурет).



2.18.3 сурет

Шешуі: Тепе-теңдік теңдеулерінен тұғырлар реакцияларын анықтаймыз, олар келесіге тең

$$R_A = F \frac{b}{l}, \quad R_B = F \frac{a}{l}.$$

Екі аралықтағы июші моменттердің өрнектерін жазамыз

$$M_{AC} = F \frac{b}{l} z, \quad 0 \leq z \leq a,$$

$$M_{CB} = F \frac{b}{l} z - F(z - a), \quad a \leq z \leq l.$$

Майысқан өстің дифференциалдық теңдеуін жазып, оларды екі рет интегралдаймыз. Аламыз

$$y''_{AC} = \frac{F}{E \cdot J_x} \cdot \frac{b}{l} \cdot z,$$

$$y''_{CB} = \frac{F}{E \cdot J_x} \left[\frac{b \cdot z}{l} - (z - a) \right],$$

$$y'_{AC} = \frac{F}{E \cdot J_x} \cdot \left(\frac{b \cdot z^2}{2l} + C_1 \right),$$

$$y'_{CB} = \frac{F}{E \cdot J_x} \left[\frac{b \cdot z^2}{2l} - \frac{(z - a)^2}{2} + C_3 \right],$$

$$y_{AC} = \frac{F}{E \cdot J_x} \left(\frac{b \cdot z^3}{6l} + C_1 \cdot z + C_2 \right),$$

$$y_{CB} = \frac{F}{E \cdot J_x} \left[\frac{b \cdot z^3}{6l} - \frac{(z - a)^3}{6} + C_3 \cdot z + C_4 \right].$$

Интегралдау кезінде пайда болған C_1, C_2, C_3, C_4 тұрақтыларын келесі шарттардан анықтаймыз:

1) $z=a$ қимасында арқалық майысқан өсінің екі бөлігінің бұрылу бұрыштары өзара тең болу керек;

2) $z=a$ қимасында арқалықтың екі бөлігінің ойысулары өзара тең;

3) $z=0$ қимасында ойысу нөлге тең;

4) $z=l$ қимасында ойысу нөлге тең.

Бірінші шарттан $C_1=C_3$, екінші шарттан $C_2=C_4$ аламыз. Үшінші шарттан $C_2=0$ (сондықтан $C_4=0$), төртінші шарт келесіні береді:

$$\frac{b \cdot l^2}{6} - \frac{b^3}{6} + C_3 \cdot l = 0.$$

Сонымен $C_1 = C_3 = b \cdot (b^2 - l^2) / 6l$, $C_2 = C_4 = 0$.

Осы мәндерді ескеріп, арқалықтың майысқан өсінің тендеуін табамыз

$$y_{AC} = \frac{F \cdot b \cdot z}{6E \cdot J_x \cdot l} (z^2 + b^2 - l^2), \quad 0 \leq z \leq a,$$

$$y_{CB} = \frac{F \cdot b \cdot z}{6E \cdot J_x \cdot l} (z^2 + b^2 - l^2) - \frac{F \cdot (z - a)^3}{6E \cdot J_x}, \quad a \leq z \leq l.$$

Қималардың бұрылу бұрыштары келесі формулалармен анықталады

$$y'_{AC} = \frac{F \cdot b}{6E \cdot J_x \cdot l} (3z^2 + b^2 - l^2), \quad 0 \leq z \leq a;$$

$$y'_{CB} = \frac{F \cdot b}{6E \cdot J_x \cdot l} (3z^2 + b^2 - l^2) - \frac{F \cdot (z - a)^2}{2E \cdot J_x}, \quad a \leq z \leq l.$$

Соңғы өрнектерден кез келген қиманың бұрылу бұрышын табуға болады, сонда арқалықтың A және B шеттерінде

$$\theta_A = y'_{AC}(0) = \frac{F \cdot b \cdot (b^2 - l^2)}{6E \cdot J_x \cdot l} = -\frac{F \cdot a \cdot b \cdot (l + b)}{6E \cdot J_x \cdot l},$$

$$\theta_B = y'_{CB}(l) = \frac{F \cdot a \cdot b \cdot (l + a)}{6E \cdot J_x \cdot l}.$$

Арқалықтың максималдық ойысуы f_{max} оның серпімді сызығына жүргізілген жанама горизонталь болатын қимасында орын алады, яғни бұрылу бұрышы нөлге тең болатын қимасында. Егер $a \geq b$ болса, онда f_{max} максималдық ойысу AC аралығында, керісінше жағдайда - CB аралығында орын алады. y'_{AC} нөлге теңестіріп, ойысу максималдық мәніне ие болатын қиманың координатасын анықтауға

болады $\tilde{z} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$ ($a \geq b$ болған жағдайда). Сонымен күш түсірілген

C қимасының орнын арқалық ортасынан ($b=l/2$) оң жақ тірегіне дейін (тұғырғаөте жақын орынға дейін, яғни $b \approx 0$) көшіргенде, ең үлкен ойысу болатын қиманың координатасы $0,5l$ шамасынан $l / \sqrt{3} \approx 0,577l$ шамасына дейін өзгереді.

$z = \tilde{z}$ координатасына сәйкес келетін максималдық қ ойысудың

мәні келесіге тең $f_{max} = -\frac{F \cdot b (l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J_x \cdot l}$ ($a > b$ болғанда), ал арқалық

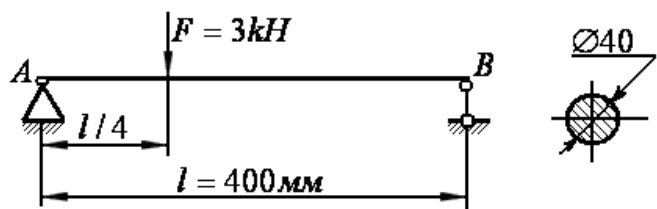
ортасындағы қиманың ойысуы келесідей болады

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{F \cdot b(3l^2 - 4b^2)}{48E \cdot J_x} \quad (a \geq b \text{ болғанда}).$$

Межелік, яғни $b \rightarrow 0$ жағдайда, f_{max} шамасы $f(l/2)$ шамасынан тек қана 3% айырылады, басқа жағдайларда айырмашылық одан да аз болады. Ол жуық шамамен $f_{max} \approx f(l/2)$ алуға болатынын білдіреді.

Күш арқалықтың тап ортасында түсірілген жағдайда ($a=b=l/2$), аламыз $f_{max} = -\frac{F \cdot l^3}{48E \cdot J_x}, \theta_A = \theta_B = \frac{F \cdot l^2}{16E \cdot J_x}$.

2.18.3 мысал. 2.18.4 суретте көрсетілген арқалық үшін қатаңдық шарттарының орындалуын тексеру керек, егер максималдық ойысу $[f]=0,8$ мм аспау, ал тұғырлар үстіндегі қималардың бұрылу бұрыштары $[\theta]=10^{-3}$ рад аспау керек болса. Юнг модулі $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа.



2.18.4 сурет

Шешуі: Алдымен өстік инерция моментін анықтаймыз. Көлденең қима дөңгелек болғандықтан

$$J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 1,256 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

f_{max} максималдық ойысуды табу үшін алдыңғы мысалда табылған формуланы, $a < b$ ескерумен пайдаланамыз. Аламыз

$$\begin{aligned} |f_{max}| &= \frac{F \cdot a(l^2 - a^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot J_x \cdot l} = \frac{F \cdot l(l^2 - l^2/16)^{3/2}}{4 \cdot 9\sqrt{3} \cdot E \cdot J_x \cdot l} = \\ &= \left(\frac{15}{16}\right)^{3/2} \frac{F \cdot l^3}{36\sqrt{3} \cdot E \cdot J_x} = \left(\frac{15}{16}\right)^{3/2} \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4^3}{36\sqrt{3} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,256 \cdot 10^{-7}} = \\ &= 0,106 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,106 \text{ мм} < [f] = 0,8 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Алдыңғы мысалда тұғырлар үстіндегі қималардың бұрылу бұрыштары үшін табылған формулаларын пайдаланып, оларды табамыз

$$|\theta_A| = \frac{F \cdot a \cdot b \cdot (l+b)}{6E \cdot J_x \cdot l} = \frac{F \cdot l \cdot l \cdot (l + 3l/4)}{4 \cdot 4 \cdot 6E \cdot J_x \cdot l} = \frac{7F \cdot l^2}{128E \cdot J_x},$$

$$|\theta_B| = \frac{F \cdot l \cdot 3l \cdot (l + \frac{l}{4})}{4 \cdot 4 \cdot 6E \cdot J_x \cdot l} = \frac{5F \cdot l^2}{128E \cdot J_x}.$$

А тұғырының үстіндегі қиманың бұрылу бұрышы артық екені анық, сондықтан қатаңдық шартының орындалуын сол бойынша тексереміз. Аламыз

$$\theta_{\max} = |\theta_A| = \frac{7F \cdot l^2}{128E \cdot J_x} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4^2}{128 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,256 \cdot 10^{-7}} = 0,995 \cdot 10^{-3} \text{ рад} < [\theta] = 10^{-3} \text{ рад}.$$

Сонымен, екі қатаңдық шарты да орындалады.

2.19 «Іілу» тақырыбы бойынша есептер

2.19.1 есеп. Екі шетінде топсалы бекітілген арқалық ортасында F күшімен жүктелген. Арқалық көлденең қимасы үшін қоставрдың нөмірін таңдап алу керек. Есептеу барысында $F=15 \text{ кН}$, $l=2 \text{ м}$, $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ деп алыңыз.

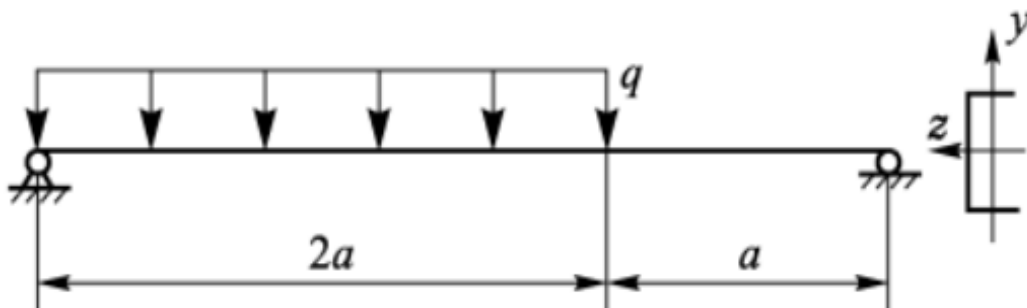
Жауабы: №12.

2.19.2 есеп. Ұзындығы $1,5 \text{ м}$ №16 қоставр арқалығы бір шетінде қатаң бекітілген және екінші шетінде $F=10 \text{ кН}$ күшімен жүктелген. Қауіпті қимадағы максималдық қ тік және жанама кернеулерді анықтаңыз.

Жауабы: $\sigma_{\max} = 138 \text{ МПа}$, $\tau_{\max} = 14 \text{ МПа}$.

2.19.3 есеп. 2.19.1 суретте кескінделген екі тұғырлы арқалық үшін швеллердің нөмірін таңдап алу керек. Есептеу барысында $q=5 \text{ кН/м}$, $a=1 \text{ м}$, $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ деп алыңыз.

Жауабы: №10.

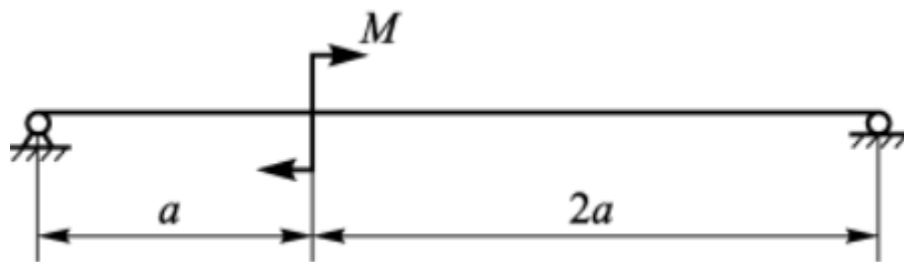


2.19.1 сурет

2.19.4 есеп. 2.19.2 суретте кескінделген арқалық үшін тік төртбұрыш түріндегі көлденең қиманың өлшемдерін таңдап алу

керек. Төртбұрыш жақтарының қатынасы $b/h=2/3$. Есептеу барысында $M=2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a=1\text{м}$, $[\sigma]=10 \text{ МПа}$ деп алыңыз.

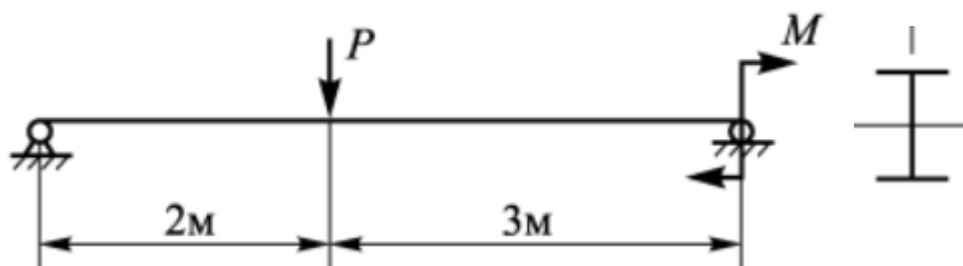
Жауабы: $b=71 \text{ мм}$, $h=106,5 \text{ мм}$.



2.19.2 сурет

2.19.4 есеп. 2.19.3 суретте көрсетілген арқалыққа $P=60 \text{ кН}$ күші мен $M=20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ моменті түсіп тұр. Арқалық көлденең қимасы үшін қоставрдың нөмірін таңдап алу керек. Есептеу барысында $[\sigma]=140 \text{ МПа}$ деп алыңыз.

Жауабы: №30.

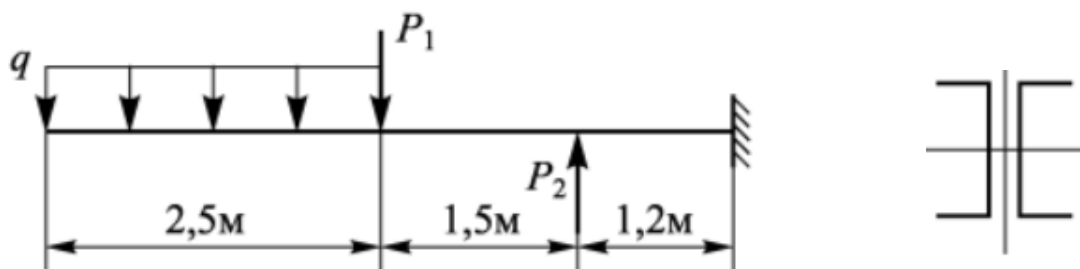


2.19.3 сурет

2.19.5 есеп. 2.19.4 суретте кескінделген арқалыққа $P_1=25 \text{ кН}$, $P_2=12 \text{ кН}$ күштері және қарқындылығы $q=6 \text{ кН/м}$ таралған күш түсіп тұр. Екі қоставрдан тұратын арқалық көлденең қимасын таңдап алу керек. Есептеу барысында $[\sigma]=140 \text{ МПа}$ деп алыңыз.

Жауабы: №33.

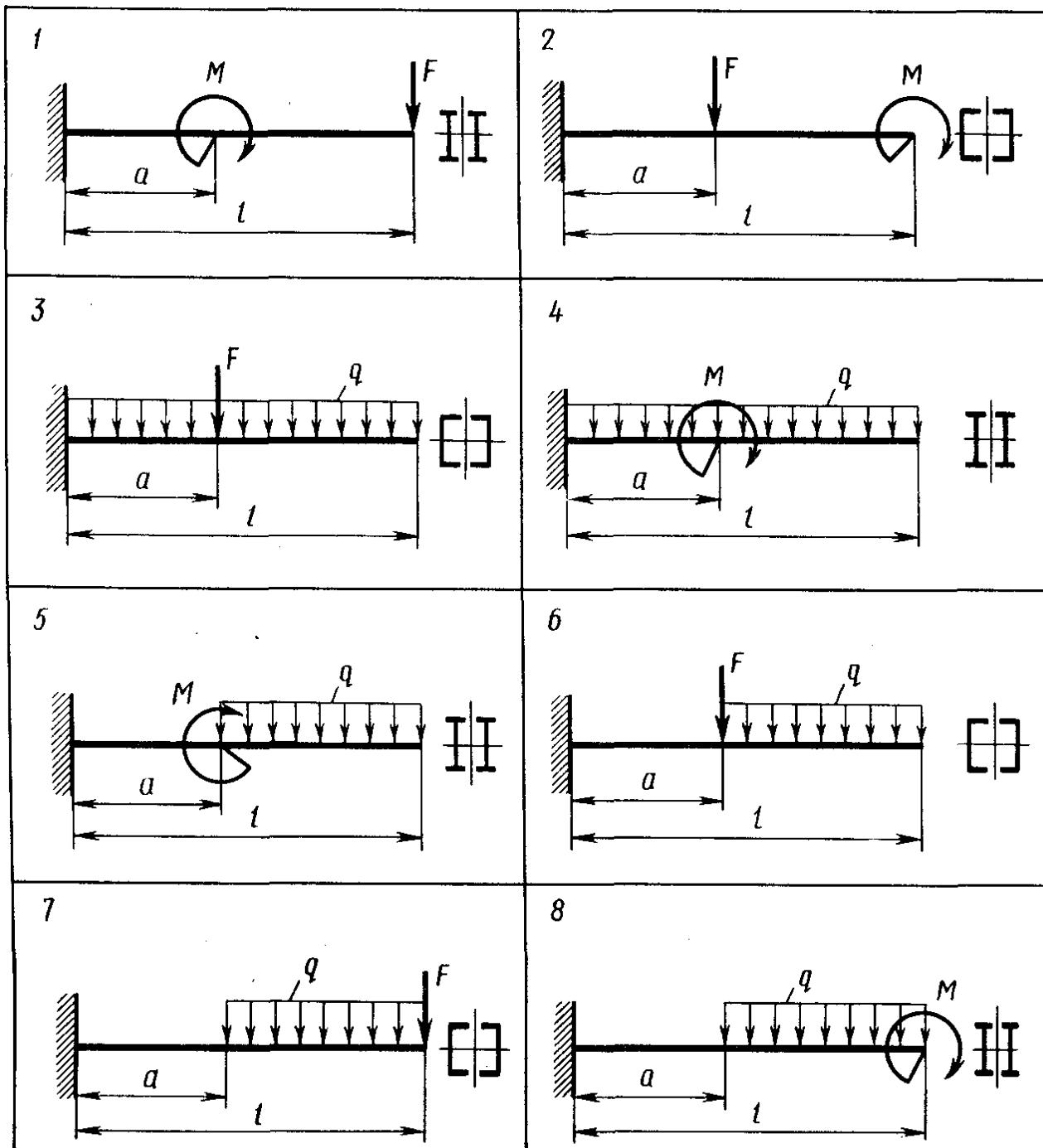
2.19.6 есеп. 2.19.5 суретте көрсетілген сырықтар үшін Q мен M эпюрлерін салыңыз және беріктік шартынан ыссылай илемделген



2.19.4 сурет

болаттың түржиын кестесінен пішіндерінің нөмірлерін таңдап алыңыз, егер $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Цифрлы мәліметтерді 2.19.1 кестеден алыңыз.

Нұсқау: қарастырудағы жағдайда есептеудің нәтижесінде табылған иілуге қарсылық моментін екіге бөліп алынған мәнге сәйкес болат пішіндері кестелерден таңдап алу керек.



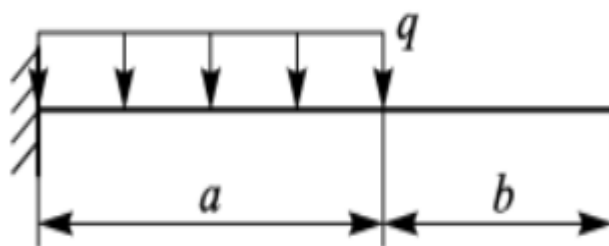
2.19.5 сурет

2.19.1 кесте

Сұлба	Вариант	$q, \text{кН/м}$	$F, \text{кН}$	$M, \text{кН}\cdot\text{м}$	$a, \text{м}$	$l, \text{м}$
1	I	-	40	20	2	
	II	-	50	30	2	
	III	-	40	30	3	
	IV	-	40	40	2	
2	I	-	80	40	2	4
	II	-	60	30	3	4
	III	-	50	20	3	6
	IV	-	70	30	2	5
3	I	30	50	-	2	6
	II	20	80	-	3	5
	III	20	60	-	4	6
	IV	40	40	-	2	5
4	I	20	-	60	3	5
	II	30	-	50	2	6
	III	40	-	40	4	6
	IV	30	-	20	3	6
5	I	20	-	40	2	6
	II	30	-	50	3	5
	III	30	-	50	2	5
	IV	30	-	40	4	7
6	I	20	60	-	4	7
	II	30	50	-	2	6
	III	40	50	-	3	7
	IV	20	60	-	2	5
7	I	20	20	-	2	6
	II	20	30	-	2	5
	III	30	20	-	2	6
	IV	30	30	-	3	5
8	I	20	-	40	2	4
	II	30	-	40	3	5
	III	40	-	30	2	5
	IV	30	-	20	2	6

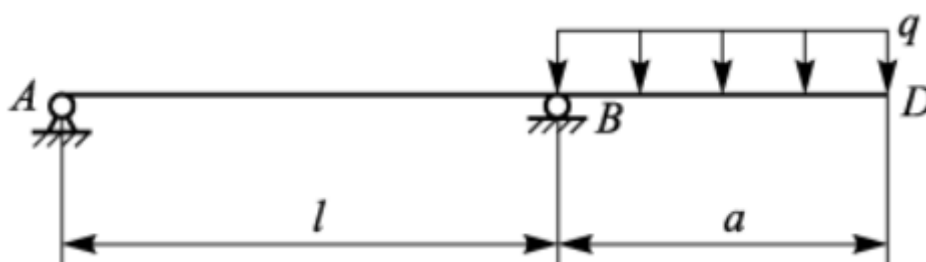
2.19.7 есеп. 2.19.6 суретте кескінделген қатандығы тұрақты арқалық үшін бос шетіндегі қимасының бұрылу бұрышы мен ойысуын анықтаңыз.

$$\text{Жауабы: } \theta = -\frac{q \cdot a^3}{6E \cdot J_x}, f = -\frac{q \cdot a^3 (3a + 4b)}{24E \cdot J_x}.$$



2.19.6 сурет

2.19.8 есеп. 2.19.7 суретте көрсетілген қатандығы тұрақты екі тұғырлы арқалық үшін тірелудегі қималарының бұрылу бұрыштарын және бос шетіндегі қимасының ойысуын анықтаңыз.



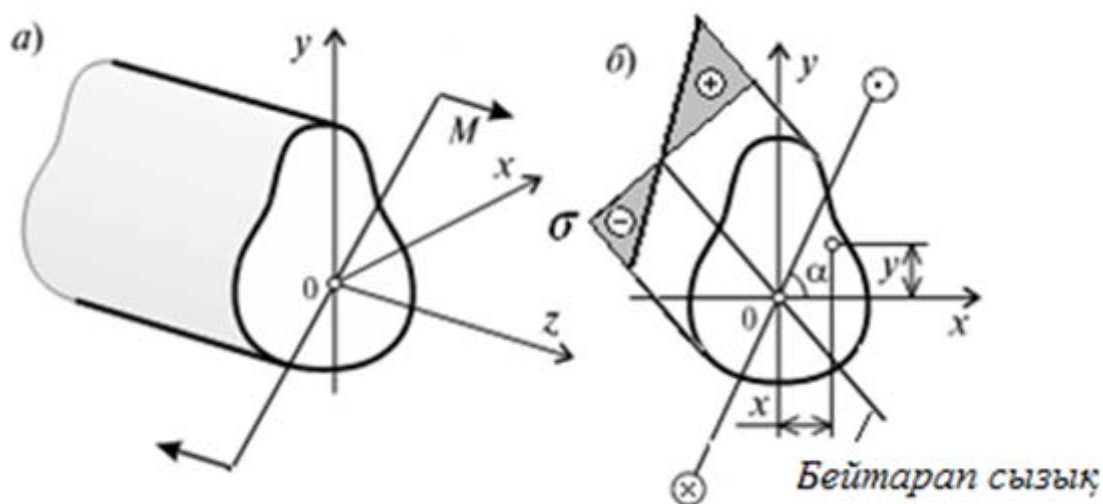
2.19.7 сурет

Жауабы: $\theta_A = \frac{q \cdot a^2 \cdot l}{12E \cdot J_x}$, $\theta_B = -\frac{q \cdot a^2 \cdot l}{12E \cdot J_x}$, $f_D = -\frac{q \cdot a^3 (4l + 3a)}{24E \cdot J_x}$.

2.20 Күрделі қарсыласу. Қиғаш иілу

Күрделу қарсыласу ретінде сырықтың қарапайым деформацияларының әртүрлі жиынтығын түсінеді – созылудың (немесе сығылудың), ығысудың, бұралудың және иілудің. Күштер әсерінің тәуелсіздік принципі негізінде күрделу қарсыласу кезінде сырықтағы кернеулер мен деформациялар әр ішкі күш факторынан бөлек пайда болатын кернеулер мен деформацияларды қосу арқылы анықтайды. Бұл принципті, тек қана серпімді деформациялар орын алғанда және материал Гук заңына бағынғанда ғана, қолдануға болатынын еске салайық. Көлденең күштерден пайда болатын жанама кернеулерді ескермейді. Алдында біз көлденең иілу кезінде жанама кернеулер тік кернеулермен салыстырғанда әдетте өте аз болатынын көрдік. Сондықтан мұнда беріктік тік кернеулермен және бұралу болса, одан пайда болатын жанама кернеулермен де анықталатыны есептеледі. Сонымен ішкі күш факторларын деформацияларды ескермей анықтауға болады.

Қиғаш иілу деп июші моменттің әсер ету жазықтығы сырық қимасының бас өстерінің бірі арқылы өтпейтін иілудің түрін айтады (2.20.1 суреттегі қара). Қиғаш иілу жазық және кеңістіктік иілуге бөлінеді. Қимасы тұрақты арқалық жағдайында, барлық түсірілген күштер көлденең қимасының бас инерция өсінен өтпейтін жазықтықта (күштер жазықтығы) орналасатын болса, онда жазық қиғаш иілу орын алады. Сонда арқалықтың бастапқы түзу сызықты болған өсі майысады және күштер жазықтығымен беттеспейтін жазықтықта орналасатын жазық қисық сызық болып келеді. Егер арқалыққа түсірілген күштер бір жазықтықта орналаспайтын болса, онда кеңістіктік қиғаш иілу орын алады, сонымен арқалықтың майысқан өсі кеңістіктік қисық сызық болып келеді.



2.20.1 сурет

Қиғаш иілу кезінде беріктікке және қатандыққа есептеу үшін сыртқы күштерді бас инерция өстері бойынша құраушы күштерге жіктейді, содан кейін екі жазықтықтағы M_x және M_y июші моменттерінің эпюрлерін тұрғызады. Жазық қиғаш иілу кезінде толық июші моменттің эпюрін тұрғызып, құраушы моменттерді келесідей анықтауға болады (2.20.1,а сурет)

$$M_x = M \cdot \sin \alpha, \quad M_y = M \cdot \cos \alpha, \quad (2.20.1)$$

мұндағы α – x өсі мен июші моменттің арасындағы бұрыш (2.20.1,б сурет).

x және y координаттары бар нүктедегі (2.20.1,б сурет) тік кернеу келесі формуламен анықталады

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x = M \left(\frac{y \cdot \sin \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \cos \alpha}{J_y} \right), \quad (2.20.2)$$

мұндағы J_x, J_y – арқалық көлденең қимасының сәйкес x және y бас өстеріне қатысты инерция моменттері.

Тік кернеу нүкте мен теңдеуі төменде жазылған бейтарап сызығының арақашықтығына тура пропорционал

$$y = -x \frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (2.20.3)$$

Қиғаш иілу кезінде бейтарап сызық июші моменттің әсер ету жазықтығына перпендикуляр емес, өйткені $J_x \neq J_y$, яғни сырық июші моменттің жазықтығында емес, басқа бір, иілуге қатаңдығы кіші болатын жазықтықта иіледі. Егер $J_x = J_y$ болса (мысалы, дөңгелек немесе квадрат қима үшін), онда кез келген центрлік өс бас инерция өсі болып келеді, сондықтан тік иілу орын алады.

Сырық көлденең қимасының кез келген нүктесінде тік кернеу бейтарап сызығына дейін қашықтыққа тура пропорционал (48,б сурет) және максималдық мәндеріне бейтарап сызығынан ең үлкен қашықтықта орналасқан нүктелерде жетеді. Ұзын және көлденең қимасы тұтас сырықтардың қиғаш иілу кезіндегі жанама кернеулері ескерілмеуге болатындай өте аз.

Егер максималдық кернеу бас инерция өстерінің екеуінен де ең алыс орналасқан нүктеде орын алатын болса, онда беріктік шарты келесі түрде жазылады

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad (2.20.4)$$

мұндағы W_x, W_y – көлденең қиманың сәйкес x және y өстеріне қатысты иілуге қарыласу моменттері;

$[\sigma]$ – қауіпсіз кернеу.

Прокат профильдерді (қоставрды немесе швеллерді) таңдау есебі таңдау және қателер әдісімен келесі өрнек бойынша орындалады

$$W_x \geq \frac{M_x + c \cdot M_y}{[\sigma]}, \quad (2.20.5)$$

мұндағы $c = \frac{W_x}{W_y}$; қоставрлар үшін c мәні 6 мен 15 арасында болады.

Қиғаш ілу кезінде кез келген қиманың ойысуын және бұрылу бұрышын екі бас инерция жазықтықтарындағы ойысулар мен бұрылу бұрыштарының геометриялық қосындысы түрінде анықтайды

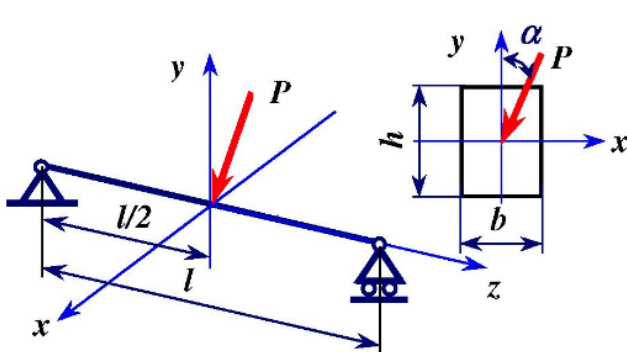
$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \quad \theta = \sqrt{\theta_{xz}^2 + \theta_{yz}^2}, \quad (2.20.6)$$

мұндағы f_x және f_y – x және y өстері бойынша ойысулар;

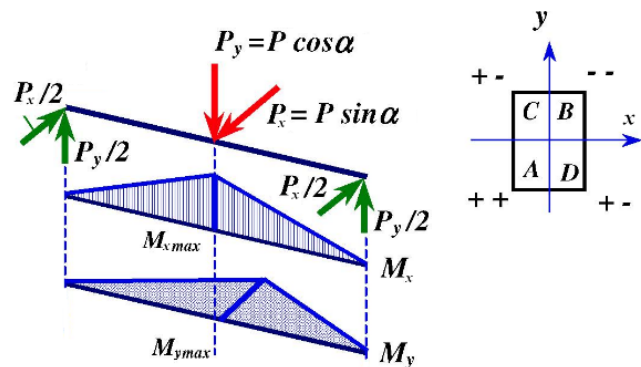
θ_{xz} және θ_{yz} – қималардың xz және yz жазықтығындағы бұрылу бұрыштары.

2.20.1 мысал. Арқалықтың тік төртбұрышты қимасын (2.20.2 сурет) $h = 2b$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $P = 60 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$, $l = 2,8 \text{ м}$ шартында таңдау керек

Шешуі: Арқалық көлденең қимасының бас өстері бойынша P күшін екі құраушы күштерге жіктеп алып, тұғырлар реакцияларын анықтаймыз және M_x , M_y июші моменттерінің эпюрлерін тұрғызамыз (2.20.3 сурет).



2.20.2 сурет



2.20.3 сурет

Ең үлкен моменттер арқалық ортасындағы қимада орын алады, онда $M_{xmax} = P \cdot l/4 \cdot \sin \alpha$, $M_{ymax} = P \cdot l/4 \cdot \cos \alpha$, сондықтан осы қима қауіпті болады.

Қауіпті нүктенің орнын анықтау үшін арқалық көлденең қимасының бұрышты нүктелерінде $\sigma(M_x)$ және $\sigma(M_y)$ таңбаларын қойып шығамыз (2.20.3 сурет). M_x әсерінен A және D нүктелерінде оң (созылу) кернеулері, ал C және B нүктелерінде – теріс (сығылу) кернеулері пайда болады. M_y әсерінен A және C нүктелерінде оң, ал B

және D нүктелерінде - теріс кернеулері пайда болады. Көлденең қиманың A және B нүктелерінде таңбалары бірдей тік кернеулер орын алады, сондықтан олар қауіпті болып табылады және солар үшін беріктік шарты жазылу керек.

Есептің шартынан арқалық пластикалық материалдан жасалғаны анық ($[\sigma]=160 \text{ МПа}$), яғни ол созылуға да, сығылуға да бірдей қарсыласады. Сонымен A мен B нүктелері тең қауіпті болады және олар үшін бір беріктік шарты қолданылады. Көлденең қиманың қарсыласу моменттерін биіктік пен енінің берілген қатынасы үшін

өрнектейміз $W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$, $W_y = \frac{b^3}{3}$. Осы өрнектерді (2.20.4)

беріктік шартына қойып, одан қиманың енін анықтаймыз

$$b \geq \sqrt{\frac{3P \cdot l \cdot (0,5 \cos \alpha + \sin \alpha)}{4[\sigma]}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 60 \cdot 10^3 \cdot 2,8 \cdot (0,5 \cdot 0,866 + 0,5)}{4 \cdot 160 \cdot 10^6}} =$$

$$= 0,0902 \text{ м.}$$

Түпкілікті $b=90 \text{ мм}$, $h=2b=180 \text{ мм}$ деп аламыз.

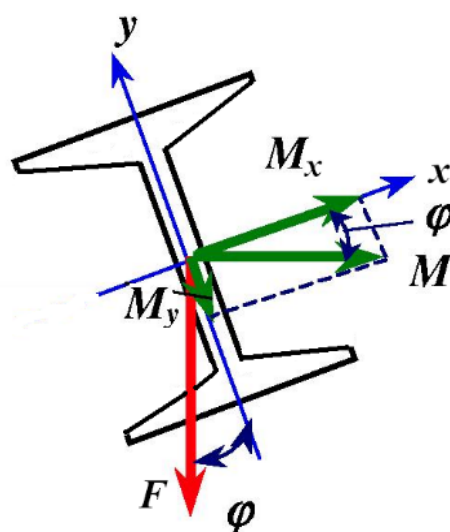
2.20.2 мысал. Вертикаль жазықтықта жұмыс атқаруға арналған №60 қоставрлы арқалықты ($W_x=2560 \text{ см}^3$, $W_y=182 \text{ см}^3$) тұғырларғатерге орнату кезінде қате жіберіліп, қоставр қабырғасының вертикальдан $\varphi = 1^\circ$ бұрышына ауытқуы орын алды. Ең үлкен тік кернеулердің осы себептен пайда болған артқан шамасын анықтау керек.

Шешуі: Қоставр y өсінің вертикальдан ауытқуы қиғаш иілуді және M_x пен M_y июші моменттерін туындатты (2.20.4 сурет)

$$M_y = M \cdot \sin \varphi = M \cdot \sin 1^\circ = 0,0175M, M_x = M \cdot \cos \varphi = M \cdot \cos 1^\circ = 0,9998M.$$

Қиғаш иілу кезіндегі максималдық кернеулер келесіге тең

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{W_x}{W_y} \right) = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + \frac{0,0175}{0,9998} \cdot \frac{2560}{182} \right)$$



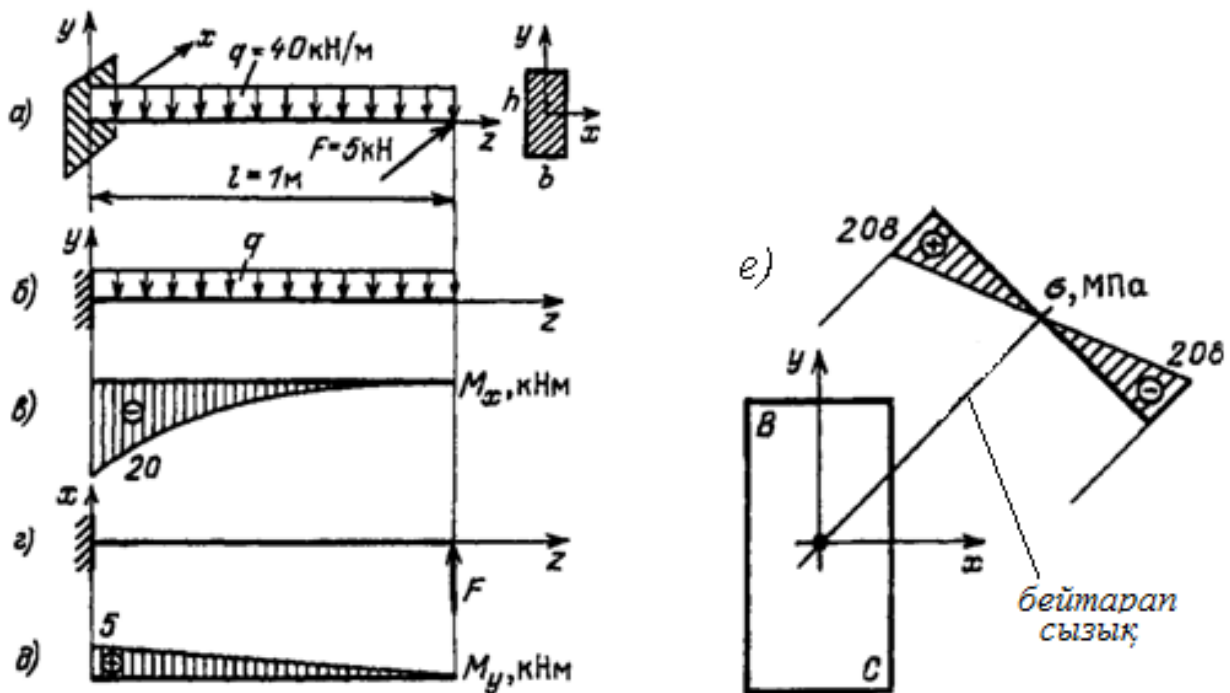
2.20.4 сурет

және $M_x \approx M$ болғандықтан, $\sigma_{max} \approx 1,246 \frac{M}{W_x}$.

Арқалық дұрыс орнатылған кезде F күші арқалықтың вертикаль y өсімен беттесетін еді және тік иілу орын алатын еді. Июші момент M мәніне тең болатын еді, ал кернеулер $\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}$.

Сонымен, вертикальдан шамалы ғана $\varphi = 1^\circ$ ауытқу бұрышы максималдық кернеулердің 24,6% өсуіне келтірді.

2.20.3 мысал. Қиғаш иілудегі арқалықтың қауіпті қимасындағы максималдық тік кернеулерді анықтау керек (2.20.5, *a* сурет). Қима пішіні – тік төртбұрыш, $b = 6$ см, $h = 12$ см. Арқалық бос шетінің орын ауыстыруын қалай есептеуге болатынын көрсетіңіз.



2.20.5-сурет

Шешуі: 2.20.5, *б, г* суреттерде арқалықтың вертикаль және горизонталь жазықтықтарында жүктелу сұлбасы көрсетілген, 2.20.5, *в, д* суреттерде – сәйкес M_x , M_y июші моменттердің эпюрлері. Эпюрлерден қауіпті қима қатты бекітпеде болатыны анық, онда $M_x = -20$ кН·м, $M_y = 5$ кН·м. Тік төртбұрышты қима үшін $J_x = b \cdot h^3 / 12$, $J_y = h \cdot b^3 / 12$, және бейтарап сызықтың (2.20.3) теңдеуі қауіпті қима үшін келесі түрге келтіріледі: $x - y = 0$.

Бейтарап сызықтың орналасуы (2.20.5, *е* сурет) қиманың ең қауіпті нүктелері ретінде одан ең үлкен қашықтықта орналасқан B

және C нүктелері болады. Олардың координаттарын (2.20.2) формуласына қойып, осы нүктелердегі кернеулерді есептейміз

$$\sigma_B = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_B + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_B = 208 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_C + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_C = -208 \text{ МПа}.$$

2.20.5, *e* суретте бейтарап сызыққа перпендикуляр бағытта тік кернеулердің өзгеруін сипаттайтын эпюр көрсетіледі.

Арқалық бос шетінің орын ауыстыруын келесі әдіспен анықтауға болады. Алдымен бөлек вертикаль және горизонталь жазықтықтарындағы орын ауыстыруларды анықтайды, содан кейін оларды геометриялық тәсілмен қосады.

Вертикаль жазықтықтағы орын ауыстыруды 2.18.1 мысалда табылған $f_{\text{вер}} = \frac{q \cdot l^4}{8E \cdot J_x}$ формуласымен анықтауға болады. Гори-

зонталь жазықтықтағы орын ауыстыруды, бос шетінде қадалған күшпен жүктелген консольды арқалық үшін формуланы қолданып анықтауға болады. Бұл формуланы 2.18.1 мысалдағыдай, арқалықтың майысқан өсінің дифференциалдық теңдеуін тікелей интегралдау арқылы табуға болады. Қарастырылатын мысал үшін осы формула

келесі түрде жазылады $f_{\text{гор}} = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_y}$.

Соңында толық орын ауыстыруды $f = \sqrt{f_{\text{гор}}^2 + f_{\text{вер}}^2}$, формуласымен табамыз, толық орын ауыстыру векторы x өсімен φ бұрышын жасайды, ол келесі формула арқылы анықталады

$$\text{tg} \varphi = \frac{f_{\text{гор}}}{f_{\text{вер}}}.$$

2.21 Күрделі қарсыласу. Центрден тыс созылу (сығылу)

Центрден тыс созылу (сығылу) деп екі созушы (сығушы), әсер ету сызықтары сырық өсінен бір қашықтықта орналасатын күштермен жүктелу жағдайын атайды (2.21.1, *a* сурет). Күш түсірілген нүктесін полюс деп атаймыз және күшті P әрпі арқылы белгілейміз.

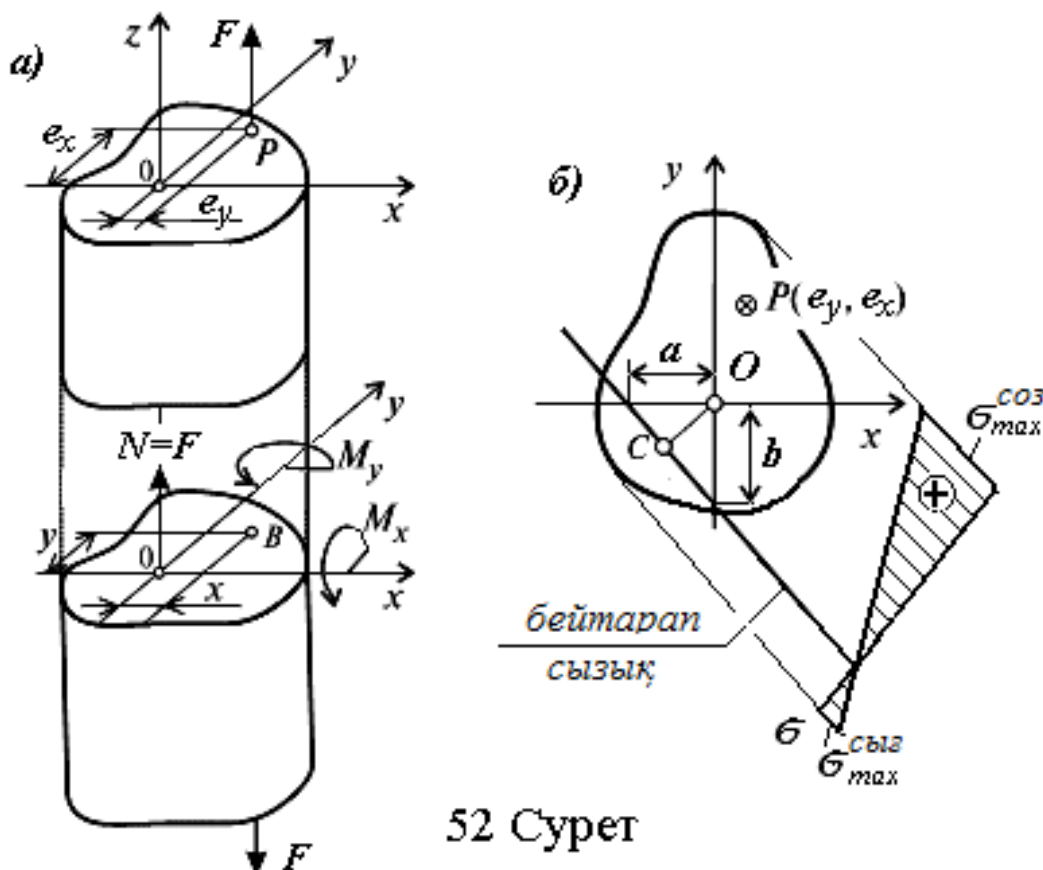
Сырық көлденең қималарындағы ІКФ бойлық күш пен екі июші моментке келтіріледі

$$N = F, \quad M_x = F \cdot e_x, \quad M_y = F \cdot e_y \quad (2.21.1)$$

мұндағы N – бойлық күш;

M_x, M_y – бас центрлік x және y өстеріне қатысты июші моменттер;

e_x, e_y – полюстен x және y өстеріне дейін қашықтығы (экцентриситеттер).



52 Сурет

Көлденең қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеу күштер әсерінің тәуелсіздік принципі бойынша, олар жеке түсірілген жағдайдағы нәтижелерінің қосындысы болып табылады

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_y^2} x + \frac{e_x}{i_x^2} y \right) \quad (2.21.2)$$

(2.21.2) өрнегінің оң жақ қосындысындағы таңбалар июші моменттер бірінші квадрантта туындататын кернеулердің таңбаларына тәуелді болғандықтан, x және y өстерін, полюс бірінші квадрантта болатындай таңдаймыз. Осы жағдайда қосындыда «+»

таңбалары тұрады, сонда (2.21.1) және (2.21.2) өрнектерінде күшті өз таңбасымен алса, онда кернеулер де сәйкес таңбаларымен шығады.

(2.21.2) теңдіктен бейтарап сызықтың теңдеуі көлденең қиманың жазықтығындағы түзудің теңдеуі түрінде жазылады

$$\frac{l}{A} + \frac{e_x}{J_x} y + \frac{e_y}{J_y} x = 0 \quad (2.21.3)$$

немесе түзудің кесінділер арқылы теңдеуі түрінде жазылады

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = l \quad (2.21.4)$$

мұндағы a және b – x және y өстерінде бейтарап сызықпен қиылатын кесінділер

$$a = -\frac{i_y^2}{e_y}, \quad b = -\frac{i_x^2}{e_x} \quad (2.21.5)$$

мұндағы $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ - қиманың x және y өстеріне қатысты инерция радиустері.

(2.21.5) теңдіктері бейтарап сызық әрқашан полюс орналасатын квадрантқа қарама-қарсы квадрант арқылы өтетінін көрсетеді (2.21.1,б сурет). Сонымен бейтарап сызық көлденең қиманы қиып өтуі да, қимай өтуі де мүмкін. Екінші жағдайда қиманың барлық нүктелерінде кернеулердің таңбасы күштің таңбасымен бірдей болады.

Соңғысы, мысалы, кірпіш және тас колонналарды есептеу кезінде өте маңызды болып келеді, өйткені морт материалдардың созылуға қарсыласу қабілеті өте төмен. Кернеулер қиманың барлық нүктелерінде сығылу кернеулері болу үшін, сыртқы сығушы күш қиманың ауырлық центріне жақын нүктеде түсірілу керек.

Сырық көлденең қимасының ауырлық центрінің айналасында қима өзегі деп аталатын аймақты анықтауға болады. Егер полюс (яғни күштің ізі) қима өзегінің ішінде болса, онда қиманың барлық нүктелеріндегі кернеулер күштің таңбасын алады. Қима өзегін анықтау үшін бейтарап сызық қима жиегін домалап шығады деп елестеу керек, сонда полюс қима өзегінің шекарасын сызып береді; сонымен координат басынан (2.21.4) теңдеуімен сипатталатын бейтарап сызыққа дейін арақашықты анықтайтын келесі формуланы пайдалану керек

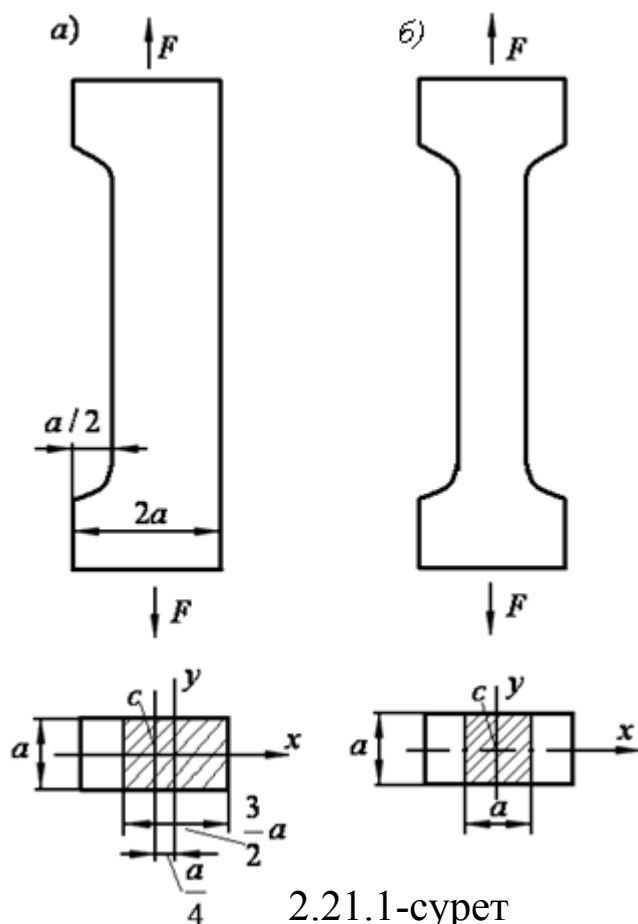
$$OC = \frac{l}{\sqrt{\frac{l}{a^2} + \frac{l}{b^2}}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{e_y^2}{i_y^4} + \frac{e_x^2}{i_x^4}}}. \quad (2.21.6)$$

Көлденең қиманың кез келген нүктесіндегі тік кернеу нүктеден бейтарап сызыққа дейін арақашықтығына тура пропорционал (52,6 сурет) және ең үлкен мәндеріне бейтарап сызықтан ең алыс орналасқан нүктелерде ие болады.

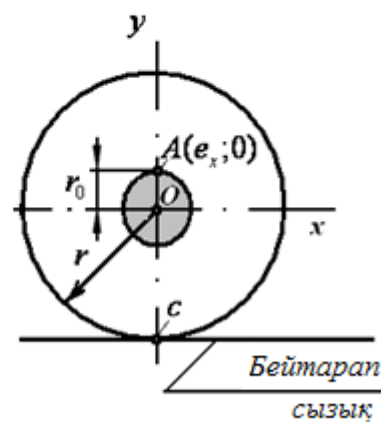
Бас центрлік өстерінің екеуінен де біржолы ең алыс орналасқан нүктелері бар симметриялық қималар үшін максималдық кернеулер сол нүктелерде орын алады. Олар үшін беріктік шарты келесі түрде жазылады

$$\sigma_{max} = F \left(\frac{l}{A} + \frac{e_x}{W_x} + \frac{e_y}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (2.21.7)$$

2.21.1 мысал. 2.21.1,а,б суреттерде көрсетілген екі сырықтардың қайсысы, пластикалық деформацияларды туындатпай жоғары жүктемені қабылдай алатынын анықтау керек.



2.21.1-сурет



2.21.2-сурет

Шешуі: Екі жағдайдағы максималдық кернеулерді салыстырамыз.

$$(a) \text{ жағдайында } \sigma_{max} = \frac{N}{A_1} + \frac{M_y}{W_{y1}} = \frac{F}{a \cdot \frac{3}{2}a} + \frac{F \cdot a/4}{a \cdot (1,5a)^2 / 6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F}{a^2}.$$

$$(б) \text{ жағдайында } \sigma_{max} = \frac{N}{A_2} = \frac{F}{a^2}.$$

Сонымен, (а) жағдайында сырық көлденең қимасының ауданы артық болған мен, оның беріктігі (б) жағдайымен салыстырғанда төмен болып шықты.

2.21.2 мысал. Көлденең қимасы радиусы r дөңгелек сырық үшін қима өзегін анықтау керек (2.21.2 сурет).

Шешуі: Симметриялық шартынан қима өзегі дөңгелек болатыны анық, оның радиусын r_0 арқылы белгілейміз. Полюс y өсінде орналасатын болсын, ал бейтарап сызық қима жиегімен беттесетін болсын. Сонда $OC = r$, $e_x = r_0$, $e_y = 0$. Инерция радиусы

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot r^4 / 4}{\pi \cdot r^2}} = \frac{r}{2}, \quad \text{сонда (2.21.6) бойынша } r = \frac{l}{\sqrt{r_0^2 / (r/2)^4}}$$

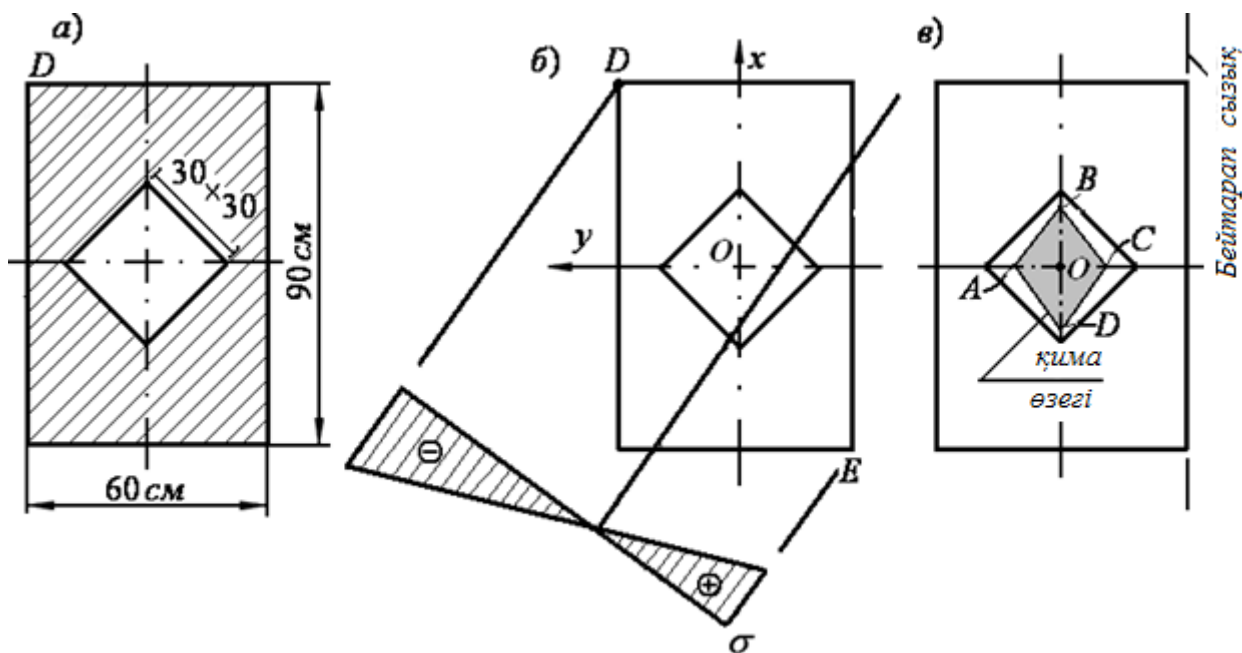
аламыз, осыдан $r_0 = \frac{(r/2)^2}{r} = \frac{r}{4}$ анықтаймыз.

2.21.3 мысал. Көлденең қимасы 2.21.3,а суретте көрсетілген қатаң сырық бойлық сығушы, ізі D нүктесімен түйесетін $F=100$ кН күшімен жүктеледі. Бейтарап сызықтың орнын, ең үлкен созылу және сығылу кернеулерін анықтау керек, кернеулер эпюрі мен қима өзегін тұрғызу керек.

Шешуі: x және y өстерін, полюс бірінші квадрантта болатындай бағыттаймыз (2.21.3,б сурет). Осы жағдайда

$$e_x = 30 \text{ см}, \quad e_y = 45 \text{ см}, \quad i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{90 \cdot 60^3 / 12 - 30^4 / 12}{60 \cdot 90 - 30 \cdot 30} = 345 \text{ см}^2,$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{60 \cdot 90^3 / 12 - 30^3 / 12}{60 \cdot 90 - 30 \cdot 30} = 795 \text{ см}^2.$$



2.21.3-сурет

Бейтарап сызықтың теңдеуі келесі түрде жазылады
 $1 + \frac{45}{795}x + \frac{30}{345}y = 0$ немесе кесінділер арқылы келесі болады
 $\frac{x}{-17,7} + \frac{y}{-11,5} = 1.$

Ең үлкен сығылу кернеулері D нүктесінде орын алады, оның координаттары $x_D = 45 \text{ см}$, $y_D = 30 \text{ см}$, ал ең үлкен созылу кернеулері E нүктесінде ($x_E = -45 \text{ см}$, $y_E = -30 \text{ см}$); оларды анықтаймыз

$$\sigma_D = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_y^2} x_D + \frac{e_x}{i_x^2} y_D \right) = \frac{-100 \cdot 10^{-3}}{4500 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{45}{795} 45 + \frac{30}{345} 30 \right) = -1,37 \text{ МПа},$$

$$\sigma_E = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{e_y}{i_y^2} x_E + \frac{e_x}{i_x^2} y_E \right) = \frac{-100 \cdot 10^{-3}}{4500 \cdot 10^{-4}} \left[1 + \frac{45}{795} (-45) + \frac{30}{345} (-30) \right] = 0,92 \text{ МПа}.$$

Кернеулер эпюрі 2.21.3,б суретте көрсетілген.

Қима өзегін тұрғызамыз. Алдымен өзек шекарасының өспен қиылысу нүктесін анықтаймыз (2.21.3,в сурет). Бейтарап сызық тік төртбұрыштың оң жақ қабырғасымен беттескенде ($OC = 30 \text{ см}$), полюс A нүктесінде болады.

(2.21.6) формуласымен $30 = \frac{i_x^2}{e_x}$ анықтаймыз, осыдан

$$e_x = \frac{i_x^2}{30} = \frac{345}{30} = 11,5 \text{ см.}$$

Тап осылай D нүктесі үшін табамыз $e_y = \frac{i_y^2}{45} = 17,7 \text{ см.}$

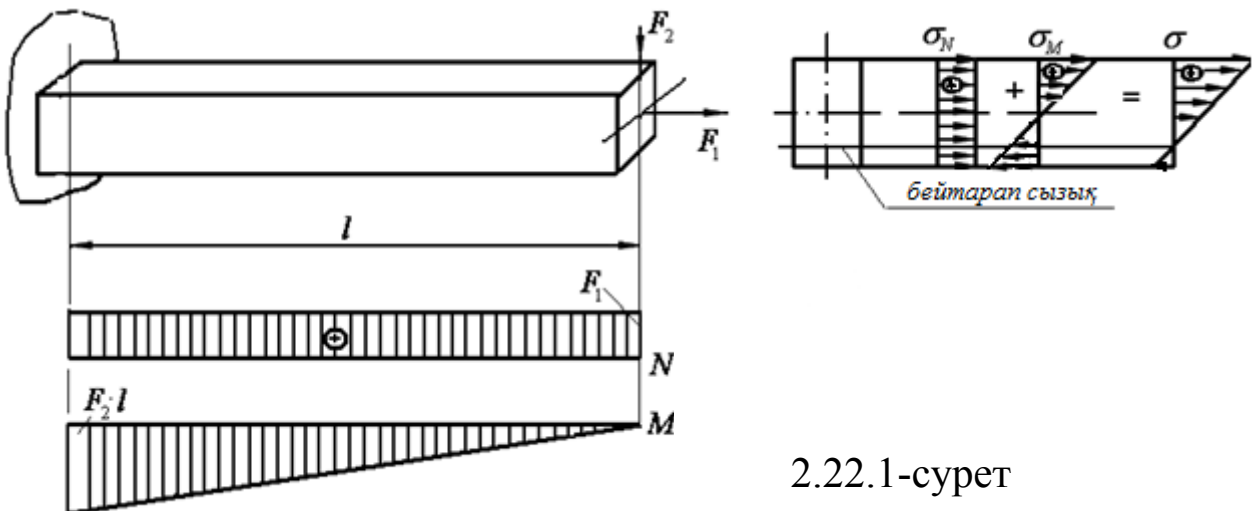
Тік төртбұрышқа іштей сызылған кез келген қима үшін (тік төртбұрыштың төбелері қима төбелерімен түйісу керек, мысалы, қоставр, швеллер және т.б.) қима өзегі төртбұрыш болатынын көрсетуге болады.

Қарастырылатын мысал үшін қима өзегі 2.21.3,в суретте көрсетілген.

2.22 Күрделі қарсыласу.

Иілу мен созылудың (сығылудың) біріккен әсері

Сырықтың тік иілуі мен созылуын (сығылуын) біржолы туындататын күштер әсерінен оның көлденең қималарында үш ІКФ пайда болады: бойлық күш N , июші момент M , көлденең күш Q . Осындай жүктелу жағдайы 2.22.1 суретте көрсетілген. Мұнда көлденең күштің эпюрі көрсетілмеген, өйткені оны беріктікке және қатаңдыққа есептеу кезінде ескермейді.



2.22.1-сурет

Көлденең қиманың кез келген нүктесінде тік кернеу келесі формуламен анықталады

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y. \quad (2.22.1)$$

Қиғаш иілу мен созылудың (сығылудың) біріккен әсерінде сырықтың көлденең қималарында біржолы бес ІКФ пайда болады – N, M_x, M_y, Q_x, Q_y . Олардың ішінен үшеуі есепке алынады - N, M_x, M_y . Сонда кернеулер келесі формуламен анықталады

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x. \quad (2.22.2)$$

(2.22.1) және (2.22.2) формулаларында қосылым таңбаларын сырық деформациясы бойынша тікелей анықтаған тиімді болады.

Беріктікке есептеуді орындау үшін қауіпті қиманың орнын анықтап, сол қимадағы қауіпті нүктені табу керек. Егер ІКФ ең үлкен мәндері әртүрлі көлденең қималарда орын алатын болса, онда есептеуді екі немесе одан да артық қималар үшін орындау керек.

Сырық материалы созылу мен сығылуға бірдей қарсыласатын жағдайда, егер оның көлденең қималарында бас центрлік өстерінің екеуінен де біржолы ең алыс жатқан нүктелер болса, онда қауіпті нүкте ретінде бұрышты нүктелер арасындағы, барлық ІКФ бойынша кернеулердің таңбалары бірдей нүкте болады. Осы жағдайда беріктік шарты келесі түрде жазылады

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (2.22.3)$$

Сырық материалы созылу мен сығылуға бірдей қарсыласпайтын жағдайда есептеуді максималдық созылу және максималдық сығылу кернеулері бойынша орындау керек.

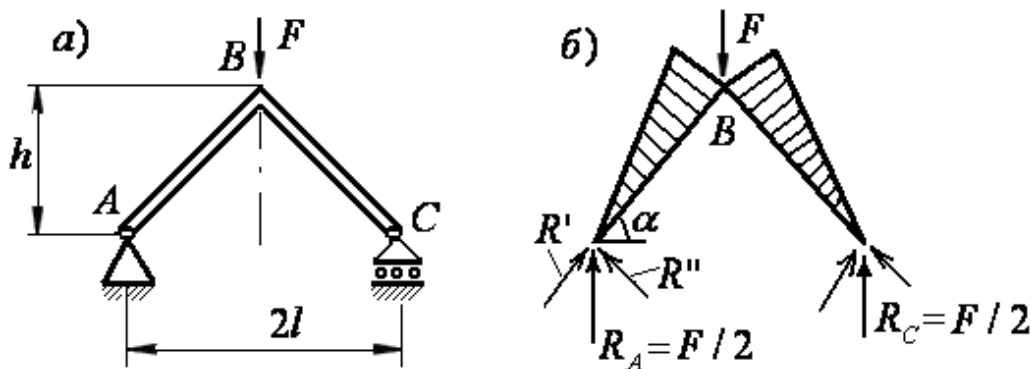
2.22.1 мысал. Болат құбыр бөліктерін B қимасында пісіріп өнделген рамадағы максималдық созылу және максималдық сығылу кернеулерін анықтау керек (58,а сурет). Құбырдың сыртқы диаметрі 60 мм, ішкі диаметрі – 50 мм тең, $F = 5$ кН, $l = 0,4$ м, $h = 0,3$ м.

Шешуі: Тұғырлар реакциялары $R_A = R_C$ және $F/2$ тең болатыны анық.

Құбырлардың горизонтальмен жасайтын бұрышын α арқылы белгілеп, реакцияларды құраушы $R' = R_A \cdot \sin \alpha$, $R'' = R_A \cdot \cos \alpha$. күштерге жіктейміз. Мұндағы

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} = 0,3 / \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,6,$$

$$\cos \alpha = l / \sqrt{h^2 + l^2} = 0,4 / \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,8.$$



2.22.2-сурет

Көлденең қималарда R' әсерінен сығатын бойлық күш $N = -R'$, ал R'' әсерінен – июші момент пайда болады (эпюрлер 2.22.2,б суретте көрсетілген), оның максималдық мәні B қимасында орын алады және $M_{max} = R'' \cdot \sqrt{h^2 + l^2}$ тең. Осы көлденең қиманың шеткі нүктелерінде кернеулер келесіге тең

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{-F \cdot 0,6 / 2}{\frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)} \pm \frac{F \cdot 0,8 \cdot \sqrt{h^2 + l^2} / 2}{\frac{\pi \cdot d^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^4 \right]}$$

$$= \frac{-5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 \cdot 4}{2\pi \cdot (6^2 - 5^2) \cdot 10^{-4}} \pm \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} \cdot 32}{2\pi \cdot 6^3 \cdot 10^{-6} \left[1 - \left(\frac{5}{6} \right)^4 \right]} = -1,7 \pm 91,1 \text{ МПа.}$$

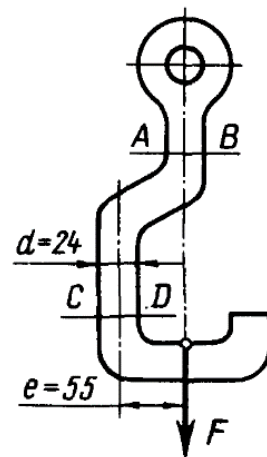
Сонымен, $\sigma_{max}^{cos} = 89,4 \text{ МПа}$, $\sigma_{max}^{сbf} = -92,8 \text{ МПа}$.

2.22.2 мысал. Тұрақты дөңгелек қимасы бар ілмектің AB және CD қималарында кернеулерді анықтау керек (2.22.3 сурет), егер күш $F = 3 \text{ кН}$ болса, ілмектің өлшемдері суретте миллиметрмен берілген.

Шешуі: Қималар әдісін қолданып, AB қимасында тек қана бойлық күш $N = F$ пайда болатынын көреміз. Осы қимада ілмек тек қана созылуға жұмыс атқарады, соныменгі тік кернеулер келесідей анықталады

$$\sigma_{AB} = N/A = 4F/\pi \cdot d^2 = 4 \cdot 3 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}) = 6,64 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,64 \text{ МПа.}$$

CD қимасында созылу мен иілудің біріккен әсері орын алады. Соныменгі максималдық кернеу келесіге тең: $\sigma_{CD} = N/A + F \cdot e/W_x$. $W_x = \pi \cdot d^3/32$ болғандықтан, аламыз



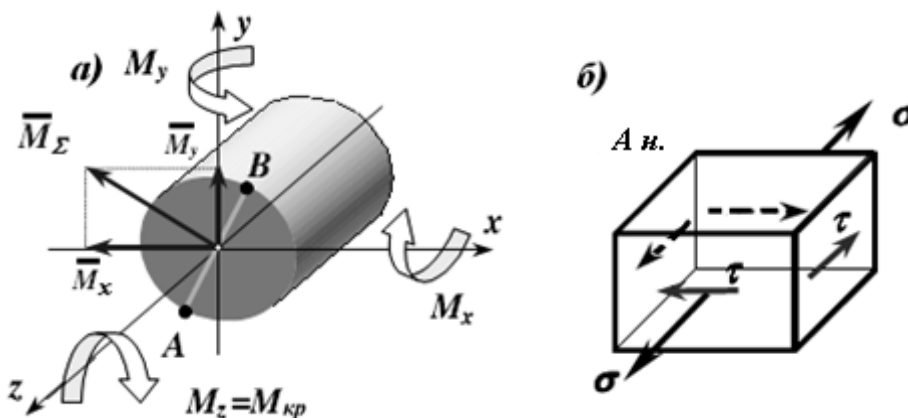
2.22.3-сурет

$$\sigma_{CD} = N/A + 32F \cdot e / \pi \cdot d^3 = 6,64 \cdot 10^6 + 32 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3} / (3,14 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}) = 1,26 \cdot 10^8 \text{ Па} = 126 \text{ МПа}.$$

2.23 Күрделі қарсыласу. Иілу мен бұралудың біріккен әсері

Иілу мен бұралудың біріккен әсерін сыртқы жанама және радиалдық күштерді қабылдайтын машина біліктерін есептеу кезінде ескеру керек. Иілу мен бұралудың біріккен әсері тағы да кеңістік рамаларда, буынды біліктерде және құрылғылардың басқа элементтерінде орын алады.

Жоғарыда сырық көлденең қималарында тек қана тік кернеулер ескерілетін және сол себептен бір өсті кернеулі күй орын алатын күрделі қарсыласудың жағдайлары қарастырылды (қиғаш иілу, центрден тыс созылу немесе сығылу, иілу мен созылудың немесе сығылудың біріккен әсері). Есептеу формулаларын шығарғанда, осы жағдай қиманың кез келген формасын қолдануға мүмкіншілік берді.



2.23.1-сурет

Иілу мен бұралудың біріккен жағдайында бұраушы момент әсерінен сырықтың көлденең қималарында жанама кернеулер пайда болады, оларды беріктікке есептеу кезінде ескеру керек. Ең қарапайым есептеу қимасы дөңгелек сырық үшін орындалады, төменде сол жағдай ғана қарастырылады.

Дөңгелек сырықтың көлденең қимасында (2.23.1, а сурет) екі июші момент M_x және M_y орын алады, оларды M_Σ қосынды моментке келтіруге болады, өйткені дөңгелектің барлық центрлік өстері бас инерция өстері болып келеді

$$\overline{M}_\Sigma = \overline{M}_x + \overline{M}_y, \quad M_\Sigma = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (2.23.1)$$

M_{Σ} әсерінен пайда болатын тік кернеулер максималдық мәніне A нүктесінде (оң σ) немесе B нүктесінде (теріс σ) жетеді. Кернеу таңбаларын деформация түріне байланысты анықтайды.

Осыдан басқа сырықтың көлденең қимасында бұраушы момент орын алады ($M_{бұр}=M_z$). $M_{бұр}$ әсерінен пайда болатын жанама кернеулер максималдық мәніне қима жиегінің нүктелерінде жетеді. Сондықтан, A (немесе B) нүктесі қауіпті болады және беріктік шартын сол нүкте үшін құрады.

A нүктесінде келесі кернеулер орын алады

$$\sigma_A = \frac{M_{\Sigma}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_x}, \quad \tau_A = \frac{M_{бұр}}{W_p}. \quad (2.23.1)$$

Сонымен дөңгелек қималардың қарсыласу моменттері келесідей анықталады

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1d^3, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (2.23.2)$$

Талдау көрсеткендей (2.23.1,б сурет), осы жағдайда қарапайымдалған жазық кернеулі күй орын алады, сонда беріктікке есептеуді беріктік болжамдарының (теорияларының) біреуі бойынша орындау керек. Пластикалық материалдар үшін ең үлкен жанама кернеулер болжамын (III) немесе энергетикалық болжамын (IV) қолданады.

Қарапайымдалған жазық кернеулі күй жағдайында III және IV беріктік болжамы бойынша беріктік шарты келесі түрде жазылады

$$\sigma_{экв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Қарастырылатын жағдайда беріктік шартын келесі түрде жазуға болады

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{есеп}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.23.3)$$

мұндағы $M_{есеп}$ – есептік момент, ол үшінші беріктік теориясы бойынша келесідей

$$M_{есеп}^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{бұр}^2}, \quad (2.23.4)$$

ал төртінші беріктік теориясы бойынша осылай анықталады

$$M_{есеп}^{IV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{бұр}^2}. \quad (2.23.5)$$

Морт материалдар үшін Мордың беріктік болжамы қолдануы мүмкін (оны шартты түрде V теория деп белгілейік), ол бойынша

$$M_{есен}^V = \frac{1-k}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+k}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{бұр}^2}, \quad (2.23.6)$$

мұндағы k – материалдың созылу кезіндегі беріктік шегінің сығылу кезіндегі беріктік шегіне қатынасы, яғни $k = \sigma_{бер}^{cos} / \sigma_{бер}^{сығ}$ (егер беріктік шектері берілмей, қауіпсіз кернеулері берілсе, онда осы қатынасты қауіпсіз кернеулер арқылы өрнектеуге болады).

Тап осылай қуыс (қимасы сақина тәрізді) біліктің есептеуін орындауға болады.

2.23.1 мысал. Тісті беріліс білігінің беріктігін тексеру керек (2.23.2,а сурет), білік *Ст4* болаттан жасалған, оның аққыштық шегі $\sigma_{ақ} = 260 \text{ МПа}$.

Білік $P = 40 \text{ кВт}$ қуат береді және $n = 100 \text{ айн/мин}$ жиілігімен айналады, нормативтік беріктік кепілдігі $[n] = 2,8$, білік диаметрі $d = 35 \text{ мм}$. Есептеуді үшінші беріктік теориясымен орындау керек, өлшемдер 60 суретте миллиметрмен берілген. Тісті берілістегі жанама F_t және радиалды F_r күштер арасындағы тәуелдік $F_r = 0,36F_t$ түрінде берілген.

Шешуі: Біліктің бұрыштық жылдамдығын анықтап $\omega = \pi \cdot n / 30 = 3,14 \cdot 1000 / 30 = 104,7 \text{ рад/с}$, білік беретін айналдырушы моментті табамыз $T = P / \omega = 40 \cdot 10^3 / 104,7 = 382,2 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Айналдырушы момент жанама күшпен келесі тәуелдік бойынша байланысады $T = F_t \cdot D / 2$, осыдан $F_t = 2T / D = 2 \cdot 382,2 / 0,3 = 2548 \text{ Н}$. Сонда радиалды күш $F_r = 0,36F_t = 0,36 \cdot 2548 = 917,2 \text{ Н}$.

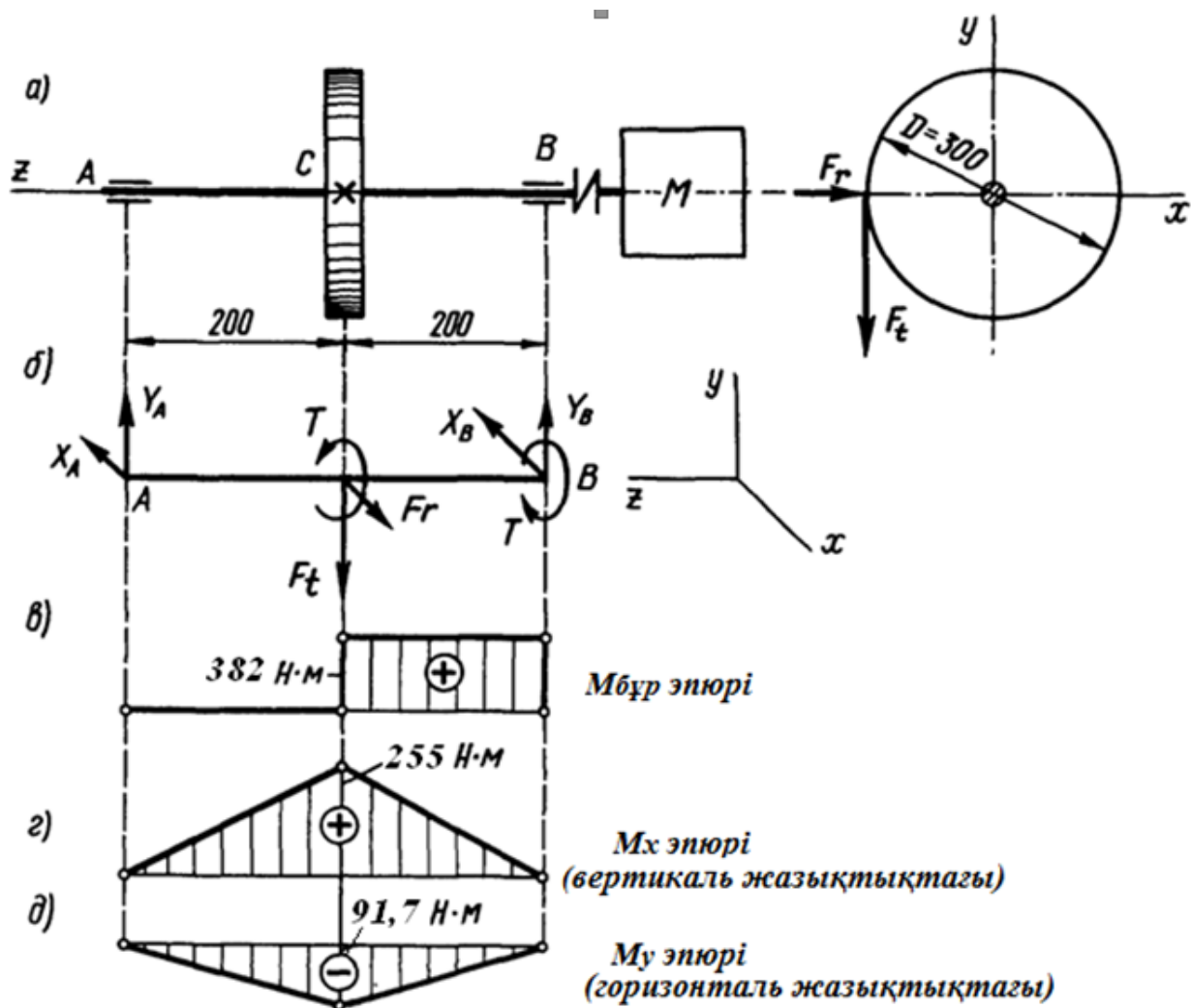
Біліктің есептеу сұлбасын 2.23.2,б суреттегідей кескіндейміз.

Бұраушы моменттің эпюрін (2.23.2,в сурет) және екі жазықтықтағы июші моменттердің эпюрлерін (2.23.2,г,д суреттер) тұрғызамыз. Эпюрлерден қауіпті қима тісті дөңгелектің ортасынан сәл оң жағында орналасатыны көрінеді. Үшінші беріктік теориясын қолданып, беріктік шартының орындалуын тексереміз

$$\sigma_{экр} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{бұр}^2}}{W_x} = \frac{\sqrt{255^2 + 91,7^2 + 382^2}}{3,14 \cdot 35^3 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= 111,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 111,3 \text{ МПа}.$$

Беріктік кепілдігін анықтаймыз



2.23.2-сурет

$$n = \sigma_{ак} / \sigma_{эке} = 260 / 111,3 = 2,34 < [n] = 2,8.$$

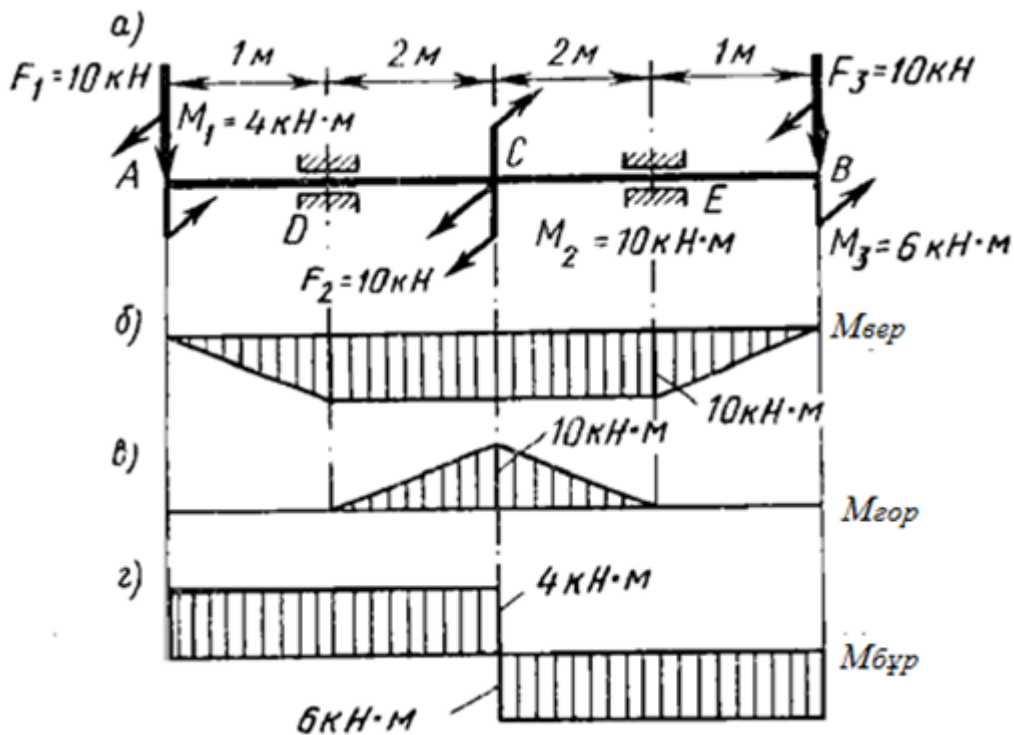
Сонымен, білік беріктігі жеткілікті емес.

2.23.2 мысал. Білікке (2.23.3,а сурет) екі вертикаль мен бір горизонталь күш және үш айналдырушы момент әсер етеді. Білік материалы – болат 45, ол үшін $\sigma_{ак} = 360 \text{ МПа}$. Беріктік кепілдігін 2,2 тең деп алып, білік диаметрін статикалық беріктік шартынан 4-ші беріктік теориясын қолданумен анықтау керек.

Шешуі: Қауіпсіз кернеуді анықтаймыз $[\sigma] = \sigma_{ак} / [n] = 360 / 2,2 = 164 \text{ МПа}$.

Тұғырлар реакцияларын анықтап, $M_{вер}$ июші моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.23.3,б сурет). Тап осылай горизонталь жазықтықтағы $M_{гор}$ июші моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.23.3,в сурет). Содан кейін $M_{бұр}$ бұрайшы моменттердің эпюрін тұрғызамыз

(2.23.3,2 сурет).



2.23.3-сурет

Қауіпті (ең көп жүктелген) қима C қимасының сәл оң жағында болады, сондықтан есептік эквивалент момент (2.23.5) формуласы арқылы келесідей анықталады

$$M_{есеп}^{IV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{бұр}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 0,75 \cdot 6^2} = 15,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

(2.23.3) беріктік шартынан қиманың өстік қарсыласу моментін өрнектейміз

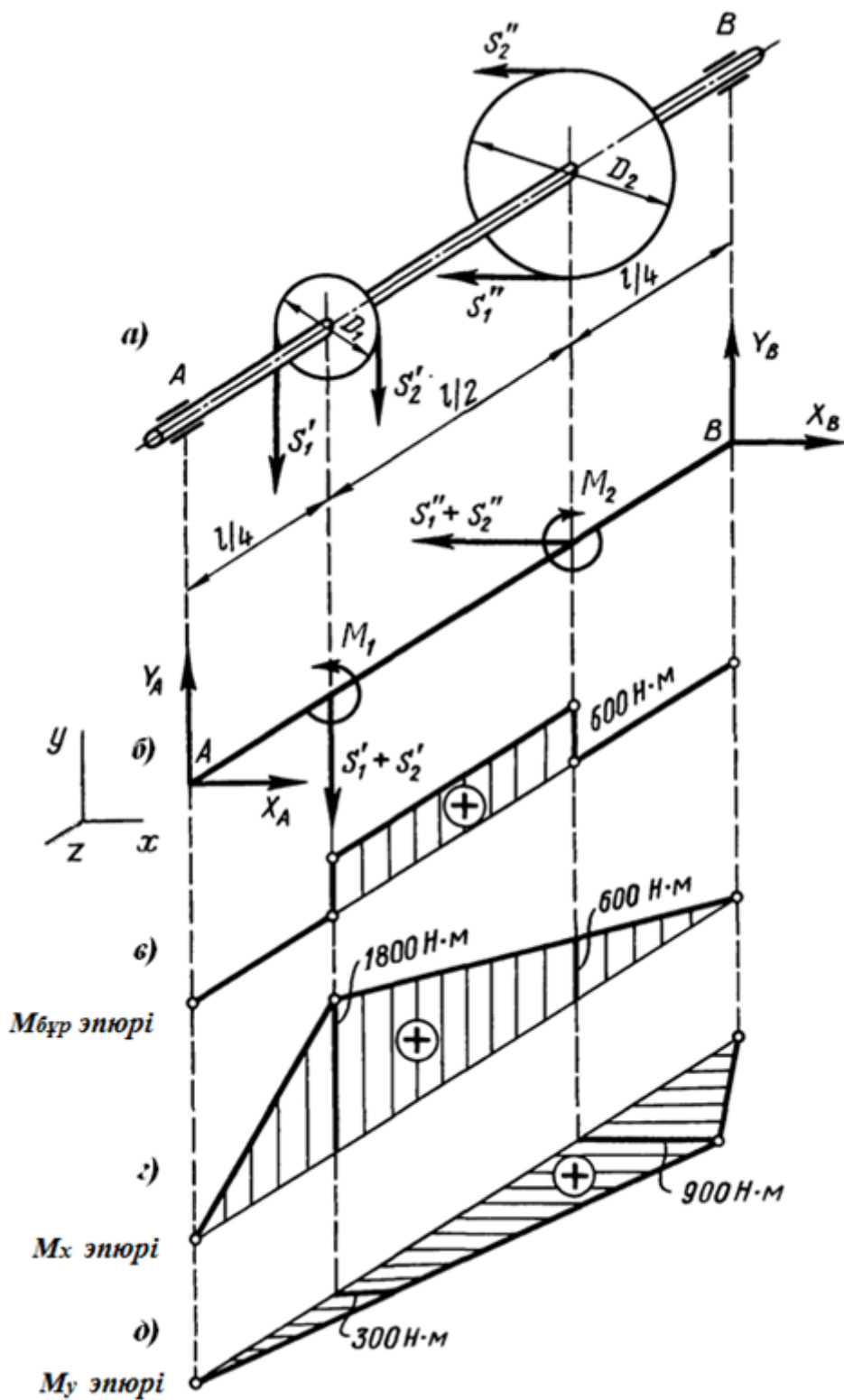
$$W_x \geq \frac{M_{есеп}}{[\sigma]} = \frac{15,1 \cdot 10^6}{164} = 9,21 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Білік диаметрін (2.17.5) формуласымен анықтаймыз

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9,21 \cdot 10^4}{3,14}} = 97,9 \text{ мм}.$$

Түпкілікті білік диаметрін 100 мм тең алуға болады.

2.23.3 мысал. Өлшемі $l=800 \text{ мм}$ білікте (2.23.4,а сурет) диаметрлері $D_1=300 \text{ мм}$ және $D_2=600 \text{ мм}$ тең екі шкив орнатылған. Белдікті беріліске түсірілген күштер $S_1=2S_2$ тәуелдігімен байланысады, сонымен $S_1'=8 \text{ кН}$, $S_1''=4 \text{ кН}$. Қауіпсіз кернеуді $[\sigma]=200 \text{ МПа}$ қабылдап, үшінші беріктік теориясы бойынша есептеуден ең көп жүктелген білік бөлігіндегі білік диаметрін анықтау керек.



Шешуі: Есеп шартында белдікті берілістің берілмеген күштерін анықтаймыз $S_2' = 4 \text{ кН}$, $S_2'' = 2 \text{ кН}$.

Күштерді білік өсіне келтіреміз, сонда айналдыратын моменттер $M_1 = (S_1' - S_2') \cdot D_1 / 2 = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $M_2 = (S_1'' - S_2'') \cdot D_2 / 2 = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$

және білікке түсірілген қысым күштері $S_1' + S_2' = 12 \text{ кН}$, $S_1'' + S_2'' = 6 \text{ кН}$ пайда болады.

Біліктің есептеу сұлбасы 2.23.4,б суретте көрсетілген.

Бұраушы моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.23.4,в сурет).

Содан кейін вертикаль жазықтықтағы июші моменттердің эпюрін тұрғызамыз (2.23.4,г сурет), ол үшін алдында тепе-теңдік тендеулерінен тұғырлар реакцияларын анықтаймыз $Y_A = 9 \text{ кН}$, $Y_B = 3 \text{ кН}$.

2.23.4,д суретте горизонталь жазықтықтағы июші моменттердің эпюрі көрсетілген, оны тұрғызу үшін алдында горизонталь жазықтықтағы тұғырлар реакцияларын табу керек болды, сонда $X_A = 1,5 \text{ кН}$, $X_B = 4,5 \text{ кН}$.

Қауіпті қима диаметрі D_I шкив ортасының сәл оң жағында болатыны анық; максималдық есептік момент (2.23.4) формуласы бойынша анықтаймыз

$$M_{\text{есеп}}^{\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{\text{бур}}^2} = \sqrt{1,8^2 + 0,3^2 + 0,6^2} = 1,92 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

(2.23.5) беріктік шартынан өстік қарсыласу моментін өрнектейміз

$$W_x \geq \frac{M_{\text{есеп}}}{[\sigma]} = \frac{1,92 \cdot 10^6}{200} = 0,96 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Білік диаметрін (2.17.5) формуласымен анықтаймыз

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,96 \cdot 10^4}{3,14}} = 46,1 \text{ мм}.$$

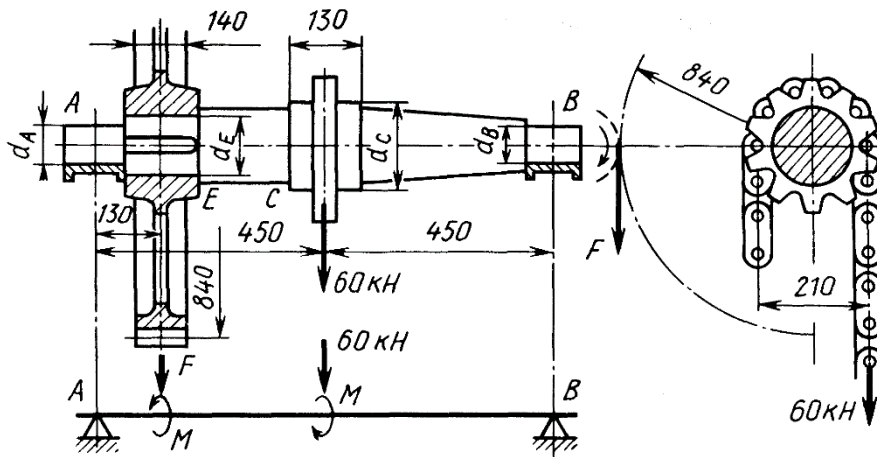
Егер білік диаметрін 45 мм тең алсақ, онда жуық шамамен $\approx 7\%$ тең артық жүктелу орын алады, оны қабылдауға болмайды.

Түпкілікті білік диаметрін 48 мм тең аламыз.

2.24 «Күрделі қарсыласу» тақырыбы бойынша есептер

2.24.1 есеп. Беріктікке есептеуден, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ деп, жүкшығырдың (лебедканың) білігі d_A , d_B , d_C , d_E диаметрлерін табу керек (2.24.1 сурет). Есептеуді форма өзгерту потенциалық энергиясы теориясына сәйкес жүргізу керек.

Нұсқау: Есептеуді F күшін анықтаудан бастау керек, іліністегі радиалдық күшті ескерудің қажеті жоқ.

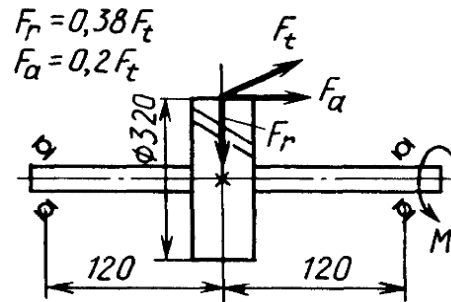


Есептік сұлба

2.24.1-сурет

Жауабы: $d_A=62$ мм, $d_B=62$ мм, $d_C=116$ мм, $d_E=98$ мм.

2.24.2 есеп. Беріктікке есептеуден цилиндрлік, көлбеу тісті доңғалақтың білігі қауіпті қимасының диаметрін, $[\sigma]=45$ МПа қабылдап, анықтау қажет (2.24.2 сурет); білік арқылы $P=32$ кВт қуат беріледі, оның бұрыштық жылдамдығы $\omega=51$ рад/с. Есептеуді форма өзгерту энергиясы теориясына сәйкес жүргізу керек.



2.24.2-сурет

Нұсқау: F_t күші доңғалақ шеңберіне жанама бойымен бағытталған; біліктің F_a күшімен жүктелгенін ескермеңіз.

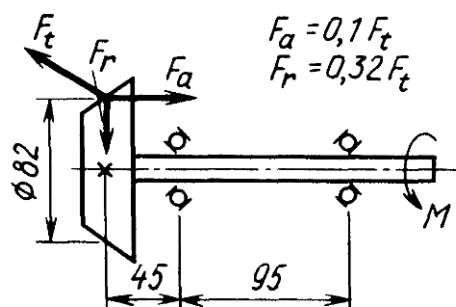
Жауабы: 52 мм.

2.24.3 есеп. Беріктікке есептеуден конустық тісті доңғалақтың білігі қауіпті қимасының диаметрін, $[\sigma]=45$ МПа қабылдап, анықтау қажет (2.24.3 сурет); білік арқылы $P=12,5$ кВт қуат беріледі, оның айналу жылдамдығы $n=970$ айн/мин. Есептеуді форма өзгерту энергиясы теориясына сәйкес жүргізу керек және алдыңғы есепке нұсқауды ескеру керек.

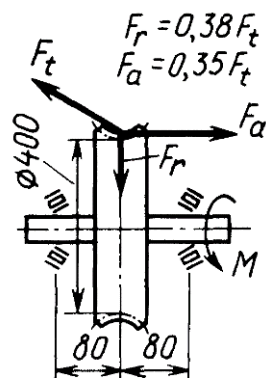
Жауабы: 36 мм.

2.24.4 есеп. Беріктікке есептеуден $[\sigma]=50$ МПа қабылдап червякті доңғалақтың білігі қауіпті қимасының диаметрін анықтау қажет (2.24.4 сурет): білік арқылы $P=9$ кВт қуат беріледі және ол $n=65$ айн/мин жылдамдығымен айналады. Есептеуді форма өзгерту энергиясы теориясына сәйкес жүргізу керек және 2.24.2 есепке нұсқауды ескеру керек.

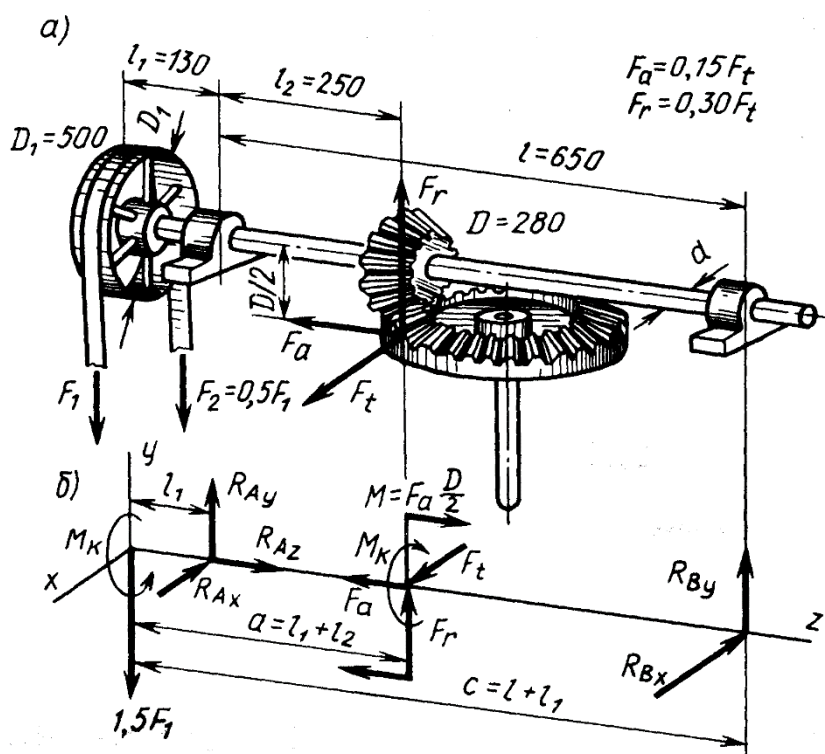
Жауабы: 63 мм.



2.24.3 сурет



2.24.4 сурет



2.24.5-сурет

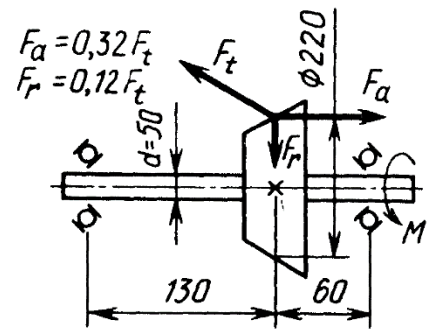
2.24.5 есеп. Горизонталь орналасқан білікке (2.24.5,а сурет) қайысты беріліс арқылы $P=31 \text{ кВт}$ қуаты жеткізіледі, біліктің бұрыштық жылдамдығы $\omega=43 \text{ рад/с}$. Бұл біліктен қуат конустық тісті беріліс арқылы вертикаль орналасқан білікке беріледі. 2.24.5,б суретте келтірілген есептеу сұлбасының негізінде бұрауышы момент эпюрін және вертикаль мен горизонталь жазықтықтардағы июші момент эпюрлерін салыңыз.

Ең үлкен жанама кернеулер гипотезасын қолданып және $[\sigma]=50 \text{ МПа}$ қабылдап, біліктің қауіпті қимасының диаметрін анықтау қажет; біліктің F_a күшімен жүктелгенін ескермеңіз.

Жауабы: 66 мм.

2.24.6 есеп. $\omega=35 \text{ рад/с}$ жылдамдықпен айналуудағы білікке конустық тік тісті доңғалақ отырғызылған (2.24.6 сурет). Біліктің материалы – болат, аққыштық шегі $\sigma_{аққ} = 300 \text{ МПа}$.

Білік арқылы берілетін қуаттың қандай мәнінде $\sigma_{аққ}$ қатысты беріктік еселігі 4,0 тең? Өстік деформацияны туындататын бойлық күшті есепке алмаңыз, ең үлкен жанама кернеулер беріктік теориясын қолданыңыз.

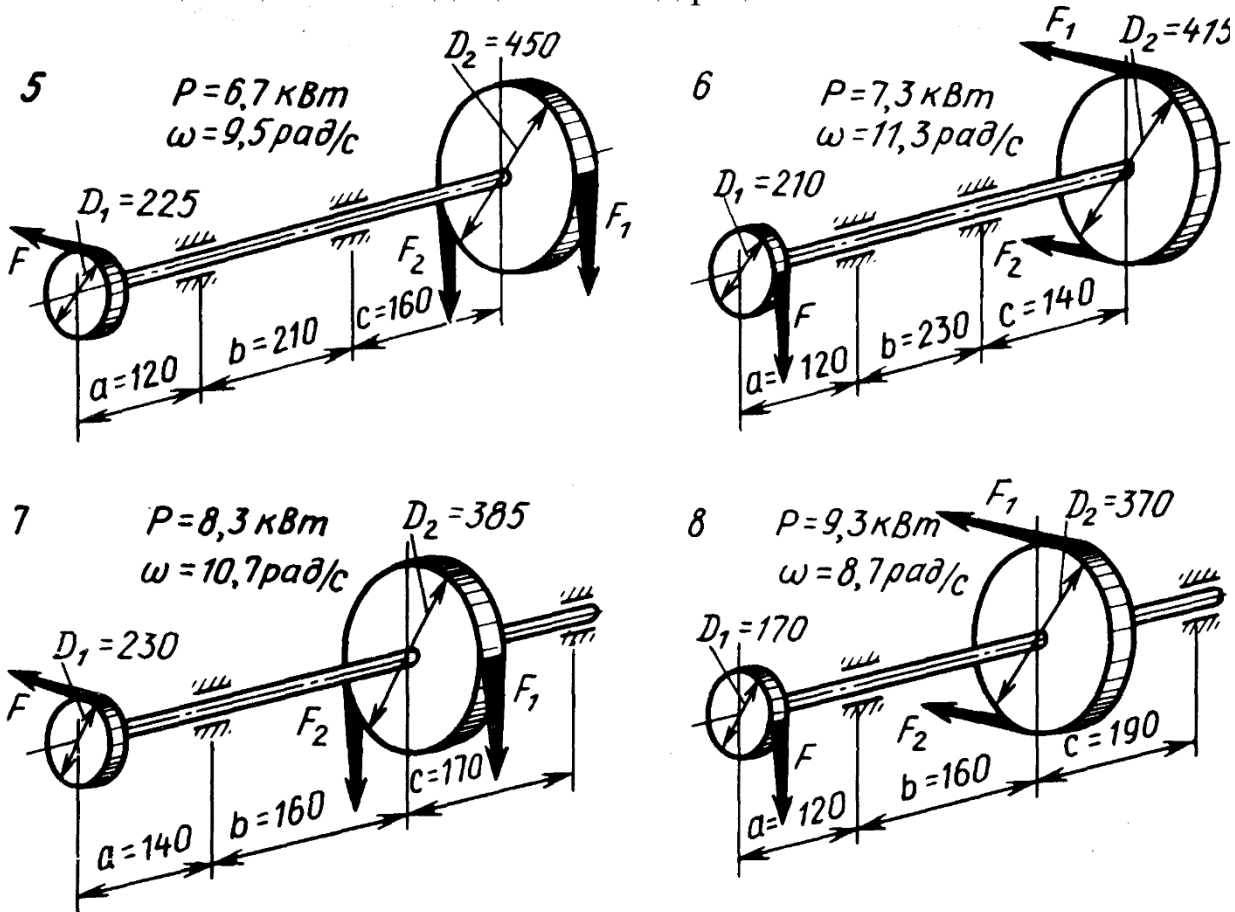


2.24.6-сурет

Жауабы: 27,9 кВт.

2.24.7 есеп. 2.24.7 суретте көрсетілген көлденең қимасы тұрақты болат білік үшін: а) бұрауышы момент эпюрін және вертикаль мен горизонталь жазықтықтардағы июші момент эпюрлерін салыңыз; б) $[\sigma]=60 \text{ МПа}$ қабылдап, біліктің диаметрін анықтаңыз.

Есептеуді ең үлкен жанама кернеулер беріктік теориясын қолданып орындаңыз, диаметрдің алынған мәнін 0, 2, 5 немесе 8 аяқталатын ең жақын санға дөңгелектендіріңіз.



2.24.7-суреттің соңы

2.25 Сығылған сырықтардың орнықтылығы. Эйлердің және Ясинскийдің формулаларымен сығылған сырықтарды есептеу

Сығушы F күшімен жүктелген сырықтың бастапқы түзу сызықты формасы (2.25.1 сурет), күш бір мәніне жеткенше дейін орнықты болады.

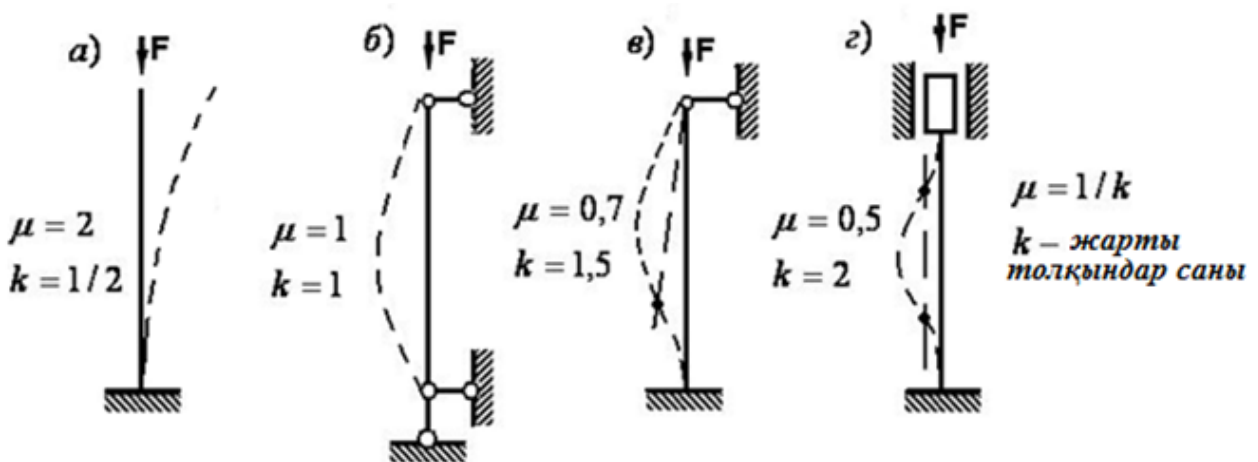
Дағдарыс (аумалы) $F_{дағ}$ күш деп сырықтың түзу сызықты тепе-теңдік формасының орнықтылығынан айыратын күштің ең кіші мәні аталады (сырық орнықтылығын жоятын күш). Күштің мәні дағдарыс күштен артық болғанда сырықтың кейбір қисық сызықты формасы орнықты болады (үзілме сызықпен 2.25.1 суретте көрсетілген), сонда жаңа тепе-теңдік формасына ауысуы сырықтың үлкен ойыстарымен бірге орын алады, сондықтан сырықтың көлденең қималарында июші момент пайда болады (бойлық күш әсерінен иілу) және кернеулер тез үлкейеді.

Практикада сығушы күш дағдарыс мәніне жеткенде, сырық істен шығады. Сондықтан қауіпсіз жүктеме дағдарыс жүктемеден кіші болу керек. Орнықтылық шарты келесі түрде жазылады

$$n_{орн} = F_{дағ} / F \geq [n_{орн}] \quad \text{немесе} \quad n_{орн} = \sigma_{дағ} / \sigma \geq [n_{орн}], \quad (2.25.1)$$

мұндағы $n_{орн}$ және $[n_{орн}]$ – шынайы және қажетті (нормативтік) орнықтылық кепілдігі.

$[n_{орн}]$ мәні сырықтың пайдалануына және оның материалына тәуелді; құрылыста пайдаланатын болат құрылымдар үшін $[n_{орн}] = 1,75 \dots 2,0$; машина жасау саласында пайдаланатын болат құрылымдар үшін - $3,5 \dots 5,0$; шойыннан жасалған құрылымдар үшін – орташа $5,0$; ағаштан жасалған құрылымдар үшін - $3,0$.



2.25.1-сурет

Егер қимасы тұрақты сырықтың орнықтылығы серпімді жағдайда жойылатын болса, онда дағдарыс күштің мәнін Эйлердің формуласымен анықтайды

$$F_{\text{дағ}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2}. \quad (2.25.2)$$

мұндағы E – сырық материалының серпімділік модулі;

J_{min} – көлденең қиманың минималды бас центрлік инерция моменті;

l – сырық ұзындығы;

μ – ұзындықты келтіру коэффициенті, ол сырық шеттерінің бекітілу тәсілдеріне тәуелді (2.25.1 сурет), $\mu = l/k$;

k – орнықтылық жойылғанда сырық иілетін синусоиданың жарты толқындар саны.

Көлденең қимадағы дағдарыс кернеу деп аталатын кернеудің сәйкес мәні келесі формула бойынша есептеледі

$$\sigma_{\text{дағ}} = \frac{F_{\text{дағ}}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (2.25.3)$$

мұндағы A – көлденең қиманың ауданы;

λ – сырықтың икемділігі, ол келесіге тең

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}},$$

(2.25.4)

i_{min} – көлденең қиманың минималдық инерция радиусы

$$i_{\text{min}} = \sqrt{J_{\text{min}} / A}.$$

(2.25.2) мен (2.25.3) формулалары келесі жағдайда ғана орын алады: дағдарыс кернеу материалдың $\sigma_{\text{нц}}$ пропорционалдық шегінен аспаса, яғни сырық икемділігі бір межелік икемділіктен аспаса

$$\lambda_{\text{меж}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{нц}}}}. \quad (2.25.5)$$

$\lambda_{\text{меж}}$ мәндері келесі: Ст.3 болат үшін - 100, Ст.5 болат үшін - 85, сұр шойын үшін - 80, ағаш үшін – 70 және т.б.

Егер орнықтылықтың жойылуы пропорционал шегінен асатын кернеулер кезінде орын алатын болса, онда дағдарыс кернеулерді тәжірибеден алынған Ясинскийдің формуласы бойынша анықтайды

$$\sigma_{\text{дағ}} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2 \quad (2.25.6)$$

мұндағы a , b және c – сырық материалына тәуелді коэффициенттер.

Ст.3 болат үшін: $a=310$ МПа, $b=11,4$ МПа, $c=0$.

Ст.5 болат үшін: $a=464$ МПа, $b=3,62$ МПа, $c=0$.

СЧ4 шойын үшін: $a=776$ МПа, $b=12$ МПа, $c=0,053$ МПа.

Ағаш үшін (талшық бойымен): $a=29,3$ МПа, $b=0,194$ МПа, $c=0$.

Егер сырық икемділігі өте аз болса (қатаң сырықтар), онда орнықтылыққа есептеу жүргізілмейді, сырық тек қана сығылуға есептеледі.

2.25.1 мысал. 2.25.1,*a* суретте көрсетілгендей бекітілген және бойлық өс бойымен сығылған сырық №40 қоставрлы профилден өңделген, оның ұзындығы 12 м. Сырық үшін дағдарыс күшті есептеу керек..

Шешуі: Түржиын кестесінен №40 қоставр үшін минималды инерция радиусын $i_y = 3,03$ см табамыз және (2.25.4) формуласы бойынша, сырық бекітілуінің қарастырылатын сұлбасында $\mu=2$ ескерумен сырық икемділігін анықтаймыз. Сонда

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{2,0 \cdot 12 \cdot 10^2}{3,03} = 192. \text{ Мұндағы } \lambda > \lambda_{меж} = 100 \text{ (Ст.3 болат үшін)}$$

болғандықтан, дағдарыс күштің мәнін Эйлердің формуласымен табамыз, оның алдында кестеден $J_{min} = J_y = 667$ см⁴ анықтап аламыз.

$$\text{Сонда } F_{дар} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^2 \cdot 667 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 12)^2} = 24 \text{ кН.}$$

2.25.2 мысал. Ұзындығы 5 м, болат *Ст.3* құбырдан жасалған колонна 64,*b* суретте көрсетілгендей бекітіліп тұр, құбырдың сыртқы диаметрі $d=120$ мм, ішкі диаметрі $d_1=100$ мм. Орнықтылық кепілдігін $[n_{op}]=3,0$ алып, сығушы күштің қауіпсіз мәнін анықтау керек.

Шешуі: Көлденең қиманың минималды инерция радиусын анықтаймыз

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^4 \right]}{\frac{\pi \cdot d^4}{4} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 \right]}} = \frac{d}{4} \sqrt{1 + \frac{d_1^2}{d^2}} = \frac{120}{4} \sqrt{1 + \frac{100^2}{120^2}} =$$

$$= 39,2 \text{ мм} = 3,92 \text{ см.}$$

Қарастырылатын жағдайда қиманың кез келген центрлік өсі оның бас инерция өсі болып келеді және қиманың барлық центрлік инерция моменттері өзара тең.

Содан кейін колоннаның икемділігін анықтаймыз

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 500}{3,92} = 89,3 < 100.$$

Дағдарыс кернеу үшін Ясинскийдің (2.25.6) формуласын қолданып, дағдарыс күшті табамыз

$$\begin{aligned} F_{\text{дағ}} &= \sigma_{\text{дағ}} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \frac{\pi \cdot d^2}{4} \left(1 - \frac{d_1^2}{d^2} \right) = \\ &= (310 - 11,4 \cdot 89,3) \frac{\pi \cdot 0,12^2}{4} \left(1 - \frac{100^2}{120^2} \right) = 0,719 \text{ МН}. \end{aligned}$$

Сығу күшінің қауіпсіз мәнін келесідей аламыз

$$[F] = \frac{F_{\text{дағ}}}{[n_{\text{орн}}]} = \frac{719}{3,0} = 240 \text{ кН}.$$

2.25.3 мысал. Жіңішке сырықтың екі шеті де қозғалмайтын топсалармен бекітіліп тұр. Сырық температурасының қандай шамаға өсуінде сырық орнықтылығынан айырылатынын анықтау керек (материал серпімді және оның температуралық кеңею коэффициенті мен серпімділік модулі тұрақты жағдайда).

Шешуі: Сырық температурасы өскенде топсалы тұғырларда температуралық деформацияны теңгеру үшін сырықты сығатын реакциялар пайда болады. Сырықтың орнықтылығынан айырылуы сығушы күш $F = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A = E \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot A$ дағдарыс

$$F_{\text{дағ}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{min}}}{l^2} \text{ мәніне жеткенде орын алады.}$$

$$\text{Осыдан } \Delta t = \frac{\pi^2 \cdot J_{\text{min}}}{\alpha \cdot A \cdot l^2}.$$

2.26 Сығылған сырықтардың орнықтылығы. Бойлық иілу коэффициенті бойынша сығылған сырықтарды есептеу

Кейбір құрылымдардың, көтеріп-тасымалдағыш машиналардың және басқа да бір қатар құрылғылардың металл құрылымдарының сығылған сырықтарын орнықтылыққа есептеуі келесі шарт бойынша орындайды

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma_{орн}] = \varphi \cdot [\sigma_{сығ}], \quad (2.26.1)$$

мұндағы $[\sigma_{орн}]$, $[\sigma_{сығ}]$ – сәйкес орнықтылыққа және сығылуға қауіпсіз кернеулер;

φ – бойлық иілу коэффициенті, ол негізгі қауіпсіз кернеуді кеміту коэффициенті деп де аталады.

(2.26.1) шарты бойынша орнықтылыққа есептеу сығылуға есептеумен ұқсас екенін көреміз. φ коэффициенті сырық материалына және оның икемділігіне тәуелді, оның мәндері 2.26.1 кестеде көрсетілген.

Тексеру есебін немесе қауіпсіз жүктемені анықтау есебін шығарғанда, (2.26.1) шарты бойынша есептеу қиыншылық туындырмайды.

Жобалау есебін жүргізгенде тізбектеп жуықтау әдісін қолдану керек. Сонымен материалдың үнемді шығынына тырысу керек. Ма-

териал қасиеттері $\sigma = \frac{F}{A} = [\sigma_{орн}] = \varphi \cdot [\sigma_{сығ}]$ теңдік орындалғанда ең толығымен пайдаланылады. Сонда (2.26.1) өрнегінен келесі шығады

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{сығ}]} . \quad (2.26.2)$$

Бірақ, алдын ала қима ауданы белгісіз болғандықтан, λ сырық икемділігі мен φ коэффициентінің анықталуы мүмкін емес. Сондықтан, φ мәнін қабылдап, қиманың ауданын анықтайды, содан кейін φ коэффициентінің шынайы мәнін есептейді, сонда ол алдын ала қабылданған мәніне жақын болуы керек. Бірден бұл орынала бермейді, сондықтан есептеуді біртіндеп жуықтау әдісімен жүргізеді; әдетте 3-4 жуықтау жеткілікті болады.

Кейбір материалдардың сығылу кезіндегі қауіпсіз кернеулерінің орташа мәндерін келтіреміз: *Ст.3*, *Ст.4* болаттар үшін - $[\sigma_{сығ}] = 160 \text{ МПа}$, *Ст.5* болат үшін - 175 МПа ; шойын үшін - 140 МПа ; ағаш үшін - 10 МПа .

2.26.1 мысал. 2.24.1,2 суретте көрсетілгендей жүктелген қимасы дөңгелек болат тіреудің диаметрін таңдау керек. Берілгені: $F=300 \text{ кН}$, $l=2,4 \text{ м}$, $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ (материал – *Ст.3* болат).

Шешуі. Берілген бекітілу шарттары үшін ұзындықты келтіру коэффициенті $\mu = 0,5$. Қиманың ауданын тізбектеп жуықтау әдісімен орындаймыз.

Бірінші жуықтау кезінде бойлық иілу коэффициентінің мәнін $\varphi_1 = 0,5$ қабылдаймыз. Сонда сырық көлденең қимасының ауданы

$$A = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_{сығ}]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 37,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

Көлденең қиманың диаметрін анықтаймыз

$$d = \sqrt{4A / \pi} = \sqrt{4 \cdot 37,5 / \pi} = 6,91 \text{ см.}$$

Дөңгелек қима үшін $i_{min} = \frac{d}{4}$.

Сырық икемділігі

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{\mu \cdot l}{d / 4} = \frac{0,5 \cdot 240 \cdot 4}{6,91} = 69,5.$$

2.26.1 кесте бойынша Ст.3 болат және $\lambda = 70$ үшін коэффициент $\varphi_1' = 0,81$, яғни оның мәні алдында қабылданған мәніне жақын емес.

2.26.1 кесте- Бойлық иілу коэффициенті

Икемділік, λ	Материал			
	Болат Ст.2, Ст.3, Ст.4.	Болат Ст.5	Шойындар	Ағаш
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,89	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,15
120	0,45	0,37	-	0,22
130	0,40	0,36	-	0,18
140	0,36	0,29	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,24	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,16	-	0,08

Екінші жуықтау кезінде $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,81}{2} \approx 0,75$ деп

аламыз. Сонда

$$d = \sqrt{4A / \pi} = \sqrt{4F / (\pi \cdot \varphi_2 \cdot [\sigma_{сж}])} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 300 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 0,75 \cdot 160 \cdot 10^6)} \cdot 10^2 = 5,64 \text{ см},$$

$$\lambda = \mu \cdot l / i_{\min} = \mu \cdot l \cdot 4 / d = 0,5 \cdot 240 \cdot 4 / 5,64 = 85,1.$$

2.26.1 кестеден $\lambda = 80$ үшін $\varphi = 0,75$; $\lambda = 90$ үшін $\varphi = 0,69$ мәндерін анықтаймыз.

Интерполяция арқылы табамыз

$$\varphi_2' = 0,75 + \frac{0,69 - 0,75}{90 - 80} (90 - 85,1) = 0,747.$$

Бұл алдында алынған φ_2 мәніне жақын. Енді алған нәтижені тексереміз. Көлденең қиманың ауданы

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 56,4^2}{4} = 2498,2 \text{ мм}^2.$$

Шынайы кернеу

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{2498,2} = 120,1 \text{ МПа}.$$

Орнықтылыққа қауіпсіз кернеу

$$[\sigma_{орн}] = \varphi \cdot [\sigma_{сыф}] = 0,764 \cdot 160 = 122,2 \text{ МПа},$$

сонда сырықтың кем жүктелуі келесіге тең

$$\frac{122,2 - 120,1}{122,2} 100 = 1,75\%.$$

Орнықтылықтан айырылу дағдарыс кернеуін анықтаймыз. $\lambda < \lambda_{меж} = 100$ (Ст.3 болат үшін) болғандықтан, Ясинскийдің формуласымен келесіні аламыз

$$\sigma_{даф} = a - b \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,3 = 227,5 \text{ МПа}.$$

Сонда орнықтылық кепілдігінің коэффициенті

$$n_{орн} = \sigma_{даф} / \sigma = 227,5 / 120,1 = 1,89.$$

Түпкілікті $d = 56,4 \text{ мм}$ деп алуға болады.

2.26.2 мысал. Екі швеллерден құрылған колонна үшін (2.26.1 сурет) швеллер нөмерін, колоннаның орнықтылығы бас инерция өстері бағыттарында бірдей болатындай таңдау керек. Профильдер қабырғаларының арақашықтығын және орнықтылық кепілдігінің

коэффициентін анықтау керек, егер $F=200$ кН, $l=5$ м, $[\sigma_{сыз}]=160$ МПа болса.

Шешуі: Сырықтың бекітілу шарттары бойынша $\mu = 1,0$.

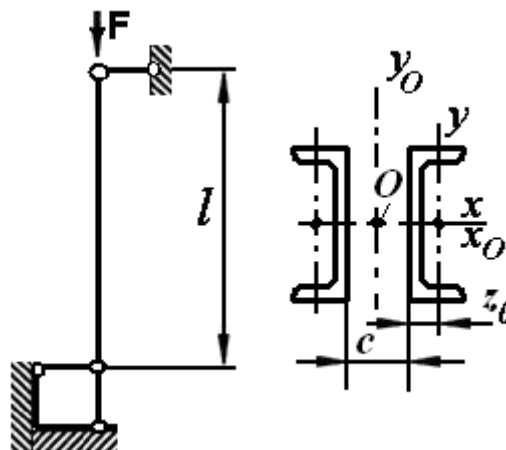
Қабылдаймыз $\varphi_1 = 0,5$. Сонда

$$A = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma_{дағ}]} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} \cdot 10^4 = 25 \text{ см}^2.$$

Швеллер ауданы осының жартысына тең немесе одан артық болу керек $A_{шв} \geq \frac{A}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см}^2$.

ГОСТ 8240–72 кестесі бойынша №12 швеллерді таңдаймыз, оның ауданы $A=13,3 \text{ см}^2$.

Икемділікті анықтау үшін минималды инерция радиусын білу керек. Жеке алынған швеллер үшін $i_y < i_x / 2$ болғандықтан, құрама сырықтың бас инерция өстері бағыттарымен тең орнықтылығын қамтамасыз ету үшін екі швеллерді бір бірінен $i_y = i_x$ болатындай (c қашықтығына) алыстату



2.26.1-сурет

керек екені анық; сонда $i_x = \sqrt{\frac{2J_x^{шв}}{2A_{шв}}} = \sqrt{\frac{J_x^{шв}}{A_{шв}}} = i_x^{шв}$, $i_x^{шв}$ шамасын түржиын кестесінен анықтаймыз.

№12 швеллер үшін $i_x = 4,78$ см, сонда сырық икемділігі $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_x} = \frac{1 \cdot 500}{4,78} = 105$. Осы мәнге $\varphi_1' = 0,56$ сәйкес келеді (2.26.1 кесте), ол қабылданған $\varphi_1 = 0,5$ мәніне жақын емес, сондықтан есептеуді қайта жүргіземіз.

$$\text{Аламыз } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,56}{2} = 0,53. \text{ Сонда } A = 23,6 \text{ см}^2,$$

$A_{шв} = 11,8 \text{ см}^2$ - қайтадан №12 швеллерді қабылдаймыз. Екінші жағдайда біріншімен бірдей нәтиже шыққандықтан, бір жолата сырық үшін екі №12 швеллерді аламыз.

Сырық икемділігі $\lambda > \lambda_{меж}$ болғандықтан, Эйлердің формуласымен дағдарыс күшті анықтаймыз

$$F_{дағ} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot 2J_x^{шв}}{(\mu \cdot l)^2} = 486,4 \text{ кН}.$$

Орнықтылық кепілдігінің коэффициенті

$$n_{орн} = \frac{F_{дағ}}{F} = \frac{486,4}{200} = 2,43.$$

Швеллер қабырғаларының арақашықтығын, құрама қиманың x_0 және y_0 бас центрлік инерция өстеріне қатысты инерция моменттерінің тең болу шартынан анықтаймыз (2.26.1 сурет)

$$2J_x^{шв} = 2 \left[J_y^{шв} + A_{шв} \cdot \left(z_0 + \frac{c}{2} \right)^2 \right], \text{ осыдан } c = 2 \left(\sqrt{\frac{J_x^{шв} - J_y^{шв}}{A_{шв}}} - z_0 \right) \approx 6 \text{ см.}$$

2.27 «Сығылған сырықтардың орнықтылығы» тақырыбы бойынша есептер

2.27.1 есеп. 2.25.1,а суретте көрсетілген көлденең қимасы дөңгелек түріндегі сырықтың дағдарыс күші қалай өзгереді, егер: а) сырық көлденең қимасының ауданын екі есе үлкейтсе; б) сырықтың диаметрін екі есе үлкейтсе? Орнықтылықты жоғалту $\sigma < [\sigma_{дағ}]$ болғанда орын алады.

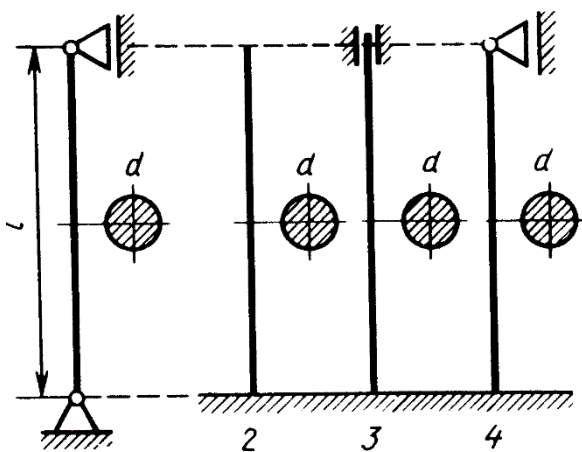
Жауабы: а) 4 есе өседі; б) 16 есе өседі.

2.27.2 есеп. 2.27.1 суретте көрсетілген сырықтар үшін дағдарыс күштің мәндерін салыстырыңыз; сырықтардың көлденең қималары және материалы бірдей. Орнықтылықты жоғалту $\lambda > \lambda_{меж}$ болғанда орын алады.

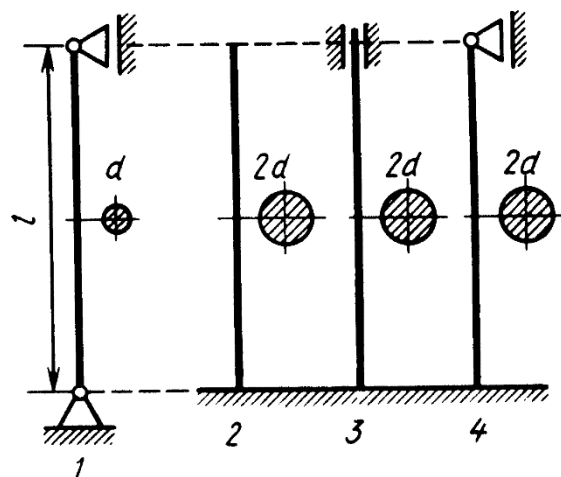
Жауабы: $F_{дағ,2} = 1/4 F_{дағ,1}$, $F_{дағ,3} = 4 F_{дағ,1}$, $F_{дағ,4} = 2,04 F_{дағ,1}$.

2.27.3 есеп. 2.27.2 суретте көрсетілген сырықтар дағдарыс күшінің мәндерін салыстырыңыз; сырықтардың көлденең қималары және материалы бірдей. Орнықтылықты жоғалту $\lambda > \lambda_{меж}$ болғанда орын алады.

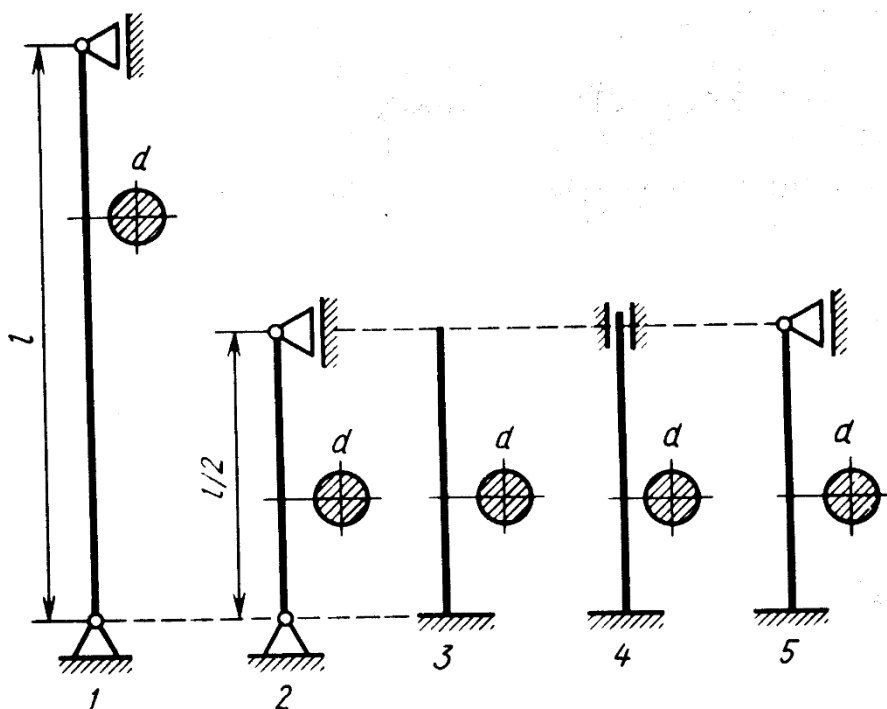
Жауабы: $F_{дағ,2} = 4F_{дағ,1}$, $F_{дағ,3} = 64 F_{дағ,1}$, $F_{дағ,4} = 32,6 F_{дағ,1}$.



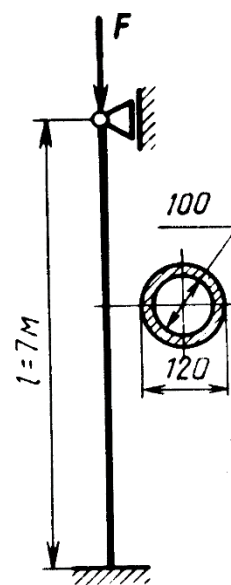
2.27.1-сурет



2.27.2-сурет



2.27.3-сурет



2.27.4-сурет

2.27.4 есеп. 2.27.3 суретте көрсетілген сырықтар дағдарыс күшінің мәндерін салыстырыңыз; сырықтардың көлденең қималары және материалы бірдей. Орнықтылықты жоғалту $\lambda > \lambda_{\text{меж}}$ болғанда орын алады.

Жауабы: $F_{\text{дағ},2} = 4F_{\text{дағ},1}$, $F_{\text{дағ},3} = F_{\text{дағ},1}$, $F_{\text{дағ},4} = 1,6 F_{\text{дағ},1}$; $F_{\text{дағ},5} = 8,16 F_{\text{дағ},1}$.

2.27.5 есеп. Сығылған сырық үшін дағдарыс күшінің мәні қалай өзгереді, егер оның диаметрі d дөңгелек түріндегі көлденең қимасын ауданы бірдей келесі түрдегі қималарға ауыстырса: а) квадрат; б) сақина, $d_1:d=0,8$; в) жақтары $b \times 2b$ тік төртбұрыш? Орнықтылықты жоғалту $\sigma < [\sigma_{\text{дағ}}]$ болғанда орын алады.

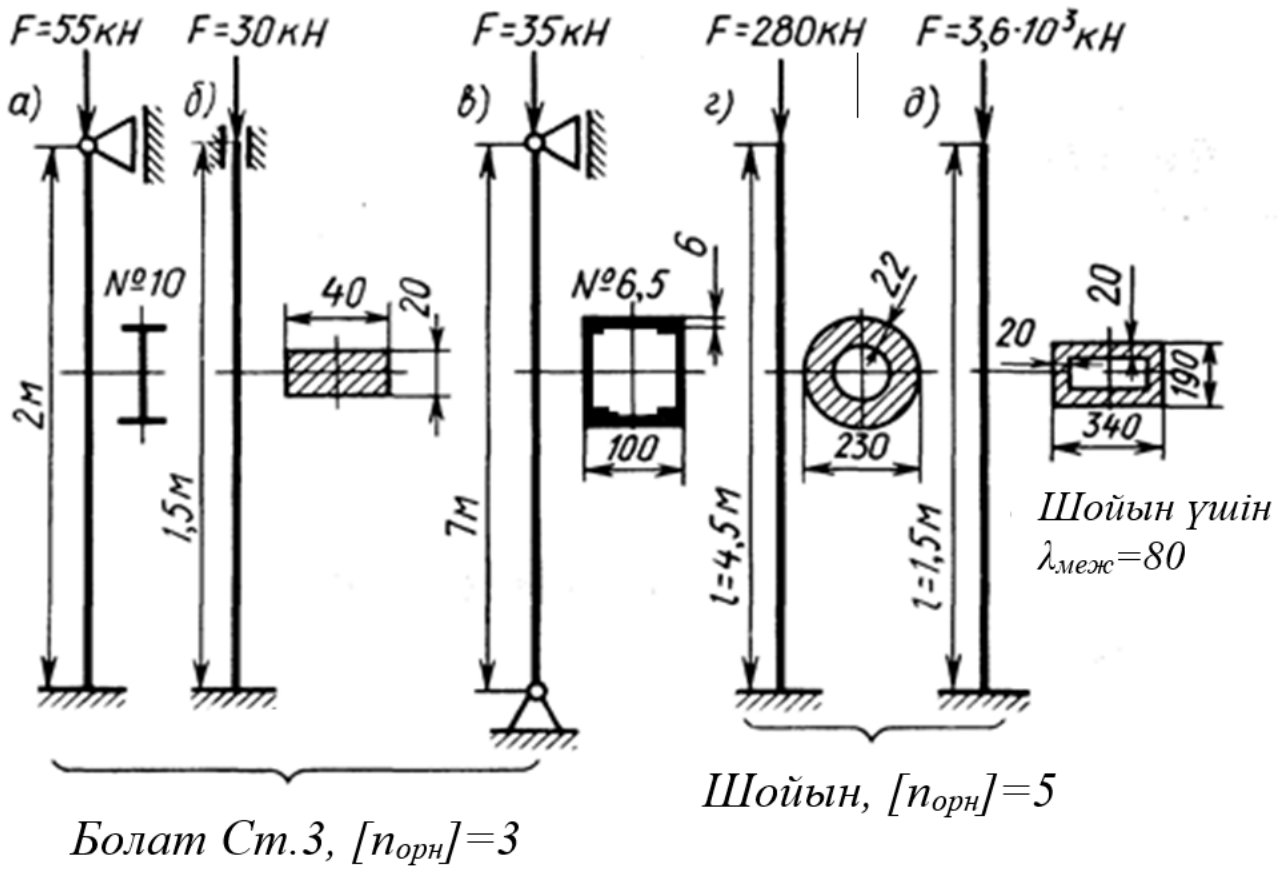
Жауабы: а) 4,7% өседі; б) 4,55 есе өседі в) 1,91 есе азаяды.

2.27.6 есеп. 2.27.4 суретте көрсетілген діңгек үшін F күшінің қауіпсіз мәнін анықтаңыз. Діңгек материалы болат Ст.3, орнықтылық еселігінің керекті мәні $[n_{\text{орн}}]=3$.

Жауабы: 101 кН.

2.27.7 есеп. 2.27.5 суретте көрсетілген сырықтар үшін орнықтылық еселігін анықтаңыз.

Жауабы: а) 3,28; б) 3,12; в) 3,3; г) 5,06; д) 5,03.



2.27.5-сурет

3 МЕХАНИЗМДЕР ЖӘНЕ МАШИНАЛАР ТЕОРИЯСЫ

3.1 Механизмді құрылымдық талдау.

Негізгі түсініктер және анықтамалар. Кинематикалық жұп.

Байланыстар берілуі. Кинематикалық жұптар классификациясы.

Механизм деп біріне бірі қатысты анықталған қозғалыста болатын байланысқан денелер жиынтығын айтады. Механизм берілістері немесе қозғалыстарды өзгерту үшін жұмыс атқарады.

Машина деп (франц. machine, лат. machine) энергияны өзгерту үшін қажетті анықталған қозғалысқа келтіретін (*энергетикалық машина*), пішінін, қасиетін, жағдайын және еңбек сайманның орнын өзгертетін (*жұмыс машинасы*), жинау, өңдеу және ақпаратты пайдалану үшін (*ақпараттық машина*) арналған механизмді немесе санаулы механизмдерді айтады.

Сонымен, қандайда машина бір немесе бірнеше механизмдердің жиынтығы болып табылады, бірақ қандайда механизм машина бола алмайды.

Механизм немесе машинаның жұмысы әрқашан оның мүшелерінің қозғалысына байланысты. Бұл құрылыстардан (көпір, тоннель және т.б.) механизм мен машиналардың өзгешелігінің негізгі факторы.

Механизмнің қарапайым бөлігі буын деп аталады. *Буын* дегеніміз бір немесе бірнеше өзгермейтін санаулы дене.

Кинематикалық жұп деп өзара салыстырмалы қозғалыста болатын байланысқан екі денені айтады. Кинематикалық жұп *төменгі және жоғарғы* болып екі топқа бөлінеді. Буындардың элементтері беттері жанасу арқылы болатын кинематикалық жұпты *төменгі* дейміз. Буындардың элементтері нүкте немесе сызықтың бойымен жанасатын кинематикалық жұпты *жоғарғы* дейміз.

Кинематикалық жұпта буындардың мүмкін болатын байланысуы әр түрлі. Мысалы, салыстырмалы қозғалыста жұп буындарының байланысу тәсілдеріне байланысты, әрбір буынға шектеу қойылады. Осы шектеулерді кинематикалық жұптағы байланыстар берілуі дейміз.

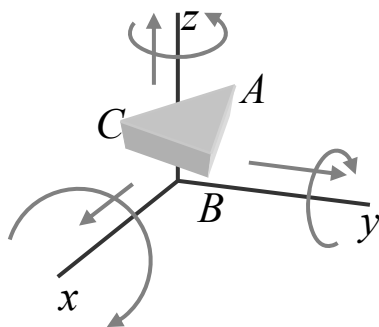
Орны кез келген үш *A, B, C* нүктелерімен анықталатын (1-сурет), жалпы жағдайда кеңістікте еркін қозғалатын абсолют қатты дененің *еркіндік дәрежесі алтыға тең*. Осындай дененің қозғалысын өзара перпендикуляр өстерді айнала және осы өстер бойымен

қозғалады деп қарастыруға болады. Сонымен, жалпы жағдайда, кез келген қатты дене кеңістікте байланыссыз алты түрлі мүмкін болатын қозғалыстарды қабылдайды: x , y , z өстерін айнала және осы өстер бойымен ілгерілемелі қозғалыстарымен. Байланыс берілу саны бүтін сан және алтыдан кем болады, егер алтыға тең болатын болса, онда буындардың салыстырмалы қозғалысын жояды және кинематикалық жұп екі буынның қатаң байланысына ауысады. Дәл осы сияқты байланыс берілу саны бірден кем болуы мүмкін емес, бұл жағдайда байланыс берілу саны нөлге тең болады да буындар жанаспайды және кинематикалық жұп құрылмайды, екі дене біріне бірі байланыссыз кеңістікте қозғалады.

Сонымен, кинематикалық жұп әрбір буындарының салыстырмалы қозғалысына қойылған байланыстың берілу саны S 1-ден 5-ке дейінгі аралықта болады, яғни $1 \leq S \leq 5$. Кинематикалық жұп буындарының салыстырмалы қозғалыстағы H еркіндік саны мынадай формуламен анықталады:

$$H = 6 - S. \quad (3.1.1)$$

Кеңістікте дене орнын анықтау



3.1.1-сурет

1-теңдік бойынша кинематикалық жұп буындарының салыстырмалы қозғалыстағы H еркіндік саны 1-ден 5-ке дейінгі аралықта өзгереді.

Мүмкін болатын салыстырмалы қозғалыс бір біріне *байланыссыз*, немесе өзара қозғалыстары функционалды байланыстыратын қосымша геометриялық берілгені мен байланыста болуы мүмкін. Мысалы, кинематикалық жұп винт және гайка (*винтті жұп*) винттің өсті айнала қозғалысынан оның ілгерілемелі қозғалысы пайда болады, осы екі қозғалыстарды арасында аналитикалық байланыс бар.

Қалған байланыссыз мүмкін қозғалыстарды кинематикалық жұп буындарының салыстырмалы қозғалыстағы еркіндік дәрежесі анықтайды.

Егер буынның айналмалы және үш координаттық өстер x , y , z (3.1.1-сурет) бойымен қарапайым қозғалыстары арасында қандайда функционалды байланыс болмаса, онда буын оның басқа кинематикалық жұп буынына қатысты қозғалысына қойылған байланыс сипаттамасына байланысты қарапайым қозғалыс санын 1-ден 5-ке дейінгі аралықта қабылдайды.

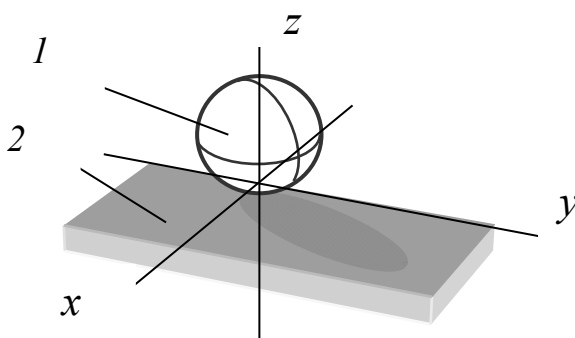
Буындарының жеке қарапайым мүмкін қозғалыстары функционалды байланыссыз әр түрлі кинематикалық жұпты қарастырамыз. Бұл жұп үшін олардың буындарының салыстырмалы қозғалысына қойылған байланыстар берілу саны, осы буындардың алып тасталған қарапайым мүмкін қозғалыстары санына сәйкес келеді.

Буындарының салыстырмалы қозғалысына қойылған байланыстар берілу санына байланысты барлық кинематикалық жұп *кластарға* бөлінеді. Байланыстар берілу саны 1-ден 5-ке дейінгі аралықта өзгертін болғандықтан, сәйкес кинематикалық жұптар I, II, III, IV, V класстарын аламыз. 1-теңдіктен алатынымыз:

$$S = 6 - H. \quad (3.1.2)$$

3.1.2-теңдіктен кинематикалық жұпқа қойылған байланыстар берілу саны S әрқашан алты саны мен әрбір жұп буындарының салыстырмалы қозғалысы еркіндік дәрежесінің айырмасына тең. Байланыстар берілу саны академик Артоболевскийдің классификациясы бойынша кинематикалық жұп класына сәйкес келеді. Бірнеше мысалдар қарастырамыз.

Бес қозғалысты жұп



3.1.2 – сурет

3.1.2-суретте жазықтық 2-нің бетінде сырғанап дөңгелейтін шар 1-ден құрастырылған кинематикалық жұп көрсетілген.

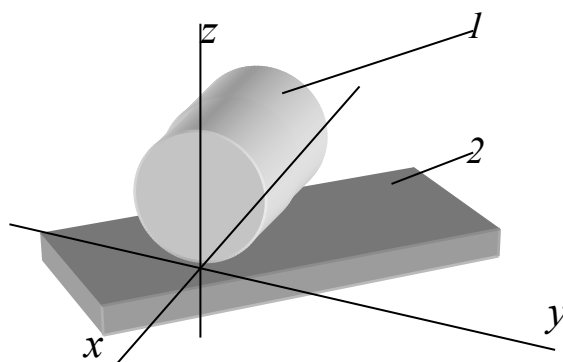
Жазықтық 2-ге қатысты шардың қозғалысы x , y , z өстерін айнала және x , y өстері бойымен ілгерілемелі қозғалысқа жіктеледі.

Шар вертикаль z бойымен төмен қозғалысы мүмкін емес, себебі қозғалысы жазықтық 2-мен шектелген, ал кері бағыттағы қозғалысында буындардың жанасуы жойылады, яғни кинематикалық жұп пайда болмайды. Сонымен, шардың қозғалысы үш өсті айнала және екі өс бойымен қозғалыстары деп қарастыруға болады және қарапайым қозғалыс саны беске тең.

Бұл жағдайда берілген кинематикалық жұп буындарының еркіндік дәреже саны беске тең, ал байланыстар берілу саны $H = 6 - S = 6 - 5 = 1$. Сондықтан, 3.1.2-суретте көрсетілген жұп I - классқа жатады (*бес қозғалысты жұп*).

II класс жұбы мысалы ретінде 3.1.3-суретте көрсетілген жазықтық 2-де жатқан цилиндр 1-ді қарастыруға болады. Цилиндр 1-дің жазықтық 2-ге қатысты қозғалысы немесе керісінше, x және z өстерін айнала және x и y өстері бойымен сырғанау қозғалысына жіктеледі. Сонымен, цилиндрдің қарапайым қозғалыс саны төртке тең, яғни кинематикалық жұп буындарының еркіндік дәреже саны H төртке тең, ал байланыстар берілу саны $S = 6 - H = 6 - 4 = 2$. Берілген кинематикалық жұп II классқа жатады (*төрт қозғалысты жұп*).

Төрт қозғалысты жұп



3.1.3 – сурет

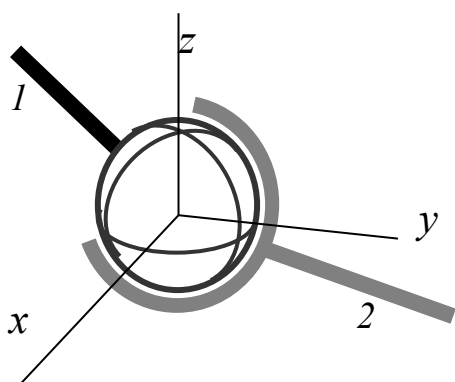
3.1.4-суретте III класс жұп мысалы көрсетілген. 1-буын 2-буынның шар қабықшаға енетін шармен тербеледі. 2-буынға қатысты 1-буын немесе керісінше қозғалысы, x , y және z өстерін айнала

қозғалысқа жіктеледі. Кинематикалық жұп буындарының еркіндік дәрежесі H үшке тең. Байланыстар белгілеу саны $S = 6 - H = 6 - 3 = 3$, яғни жұп III класқа жатады (*үш қозғалысты жұп*). Бұл жұп *сфералық (шарлы)* деп аталады.

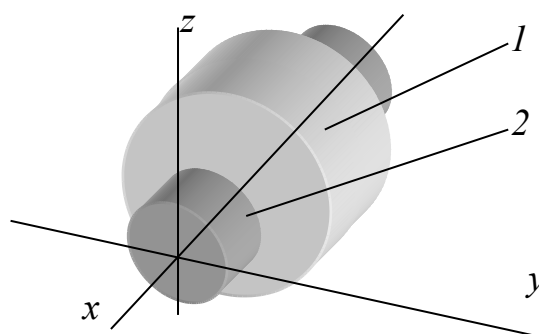
3.1.5-суретте IV класс жұп мысалы көрсетілген. 1-цилиндр қуыс 2-цилиндрдің ішінде орналасқан. 1-цилиндрдің 2-цилиндрге қатысты қозғалысы өсті айнала және x өсі бойымен қозғалысқа жіктеледі. Еркіндік қозғалыс дәрежесі H екіге тең, ал байланыстар берілу саны $S = 6 - H = 6 - 2 = 4$. Сонымен, бұл жұп IV класқа жатады (*екі қозғалысты*).

Бұл жұп *цилиндрлі жұп* деп аталады.

Шарлы үш қозғалысты жұп Цилиндрлі екі қозғалысты жұп



3.1.4 - сурет



3.1.5 - сурет

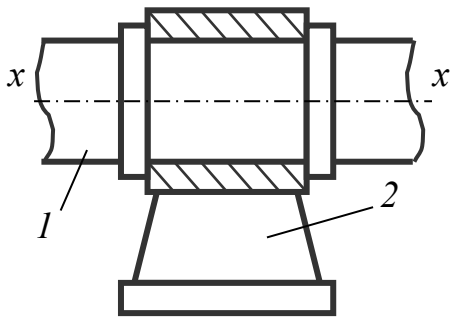
3.1.6-суретте V класс жұп мысалы көрсетілген. Бұл жұпта 1-ші және 2-ші буындардың байланысуы тұрақты жанасатын екі цилиндрлерден құрылады. 1-ші цилиндрге орналастырылған сақина бір цилиндрдің екіншісіне қатысты $x - x$ өсі бағытында қозғалысына кедергі жасайды, ал бір цилиндрдің екіншісіне қатысты айналуына кедергі жасамайды. Сондықтан, бұл жұп буындарының еркіндік дәреже саны H бірге тең, ал байланыстар берілу саны $S = 6 - H = 6 - 1 = 5$.

Сонымен, бұл жұп V класқа жатады (*бір қозғалысты жұп*). Бұл жұпты *айналмалы жұп* деп атайды.

3.1.7-суретте V класс жұп мысалы көрсетілген. Мұнда әрбір буындар x өсі бойымен қарапайым ілгерілемелі қозғалыста болады.

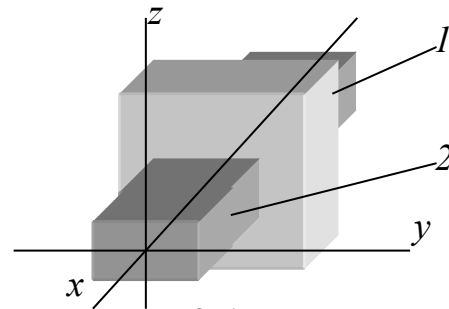
Сондықтан, бұл жұптың еркіндік саны H бірге тең, ал байланыстар берілу саны $S = 6 - H = 6 - 1 = 1$.

Айналмалы жұп



3.1.6 - сурет

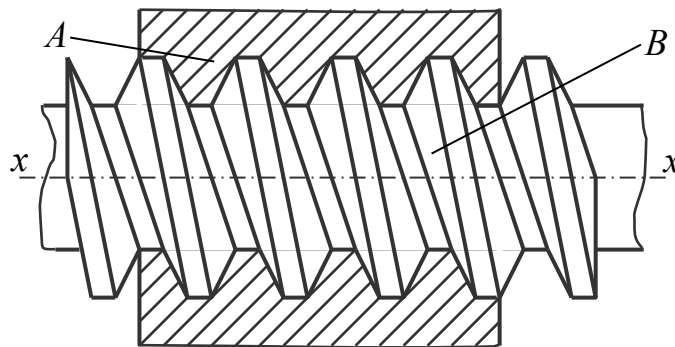
Ілгерілемелі жұп



3.1.7 - сурет

Сонымен, бұл жұп V класқа жатады (*бір қозғалысты жұп*). Бұл жұпты *ілгерілемелі жұп* деп атайды.

Бұрандалы жұп



3.1.8 – сурет

Қорыта келгенде кинематикалық жұп оның буындарының салыстырмалы қозғалысына қойылған байланыстар берілуі санына байланысты бес класқа жіктеледі.

Жоғарыда қарастырылған кинематикалық жұптар, олардың буындарының лездік қозғалысы біріне бірі байланыссыз жұптарға жатады. Техникада буындарының салыстырмалы қозғалысы қандай да қосымша геометриялық бағыныш арқылы байланысқан кинематикалық жұптар кездеседі.

Механизмдерде жиі кездесетін осындай жұпты қарастырайық.

3.1.8-суретте IV класс бір жұбы көрсетілген. Бұл жағдайда жұп буындары ілгерілемелі және айналмалы қозғалыста жасайды, осы қозғалыстарды мынадай формуламен байланыстыруға болады

$$h = f(\varphi). \quad (3.1.3)$$

сонымен, жұп буындарының салыстырмалы қозғалысына қосымша тағы бір (3.1.3)- қатынаспен анықталатын байланыс қойылған. Бұл жағдайда жұп IV класс емес V класқа жатады. Алдыңғы кинематикалық жұп техникада көп кездеседі және *винттік жұп* деп аталады. Кинематикалық жұп элементтері тұрақты жанасатын болуы үшін, олар тұйық болуы қажет. Тұйықталу *геометриялық* немесе *күштік* болуы мүмкін. Геометриялық тұйықталу кинематикалық жұп буындарының элементтерінің пішіндерімен орындалады. Күштік тұйықталу салмақ күшімен, пружина серпімділік күшімен т.с.с.

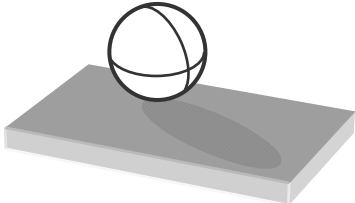
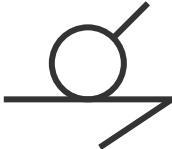


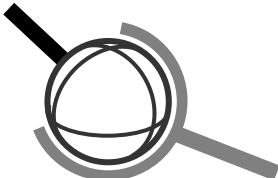

3.2 Кинематикалық жұп белгілеу бейнесі.

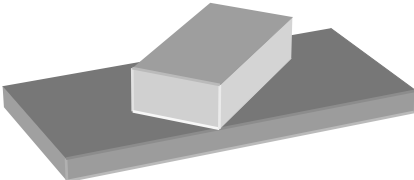

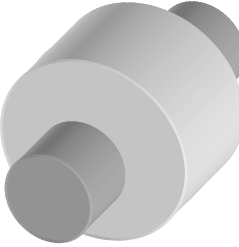

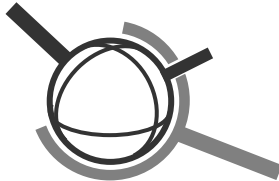



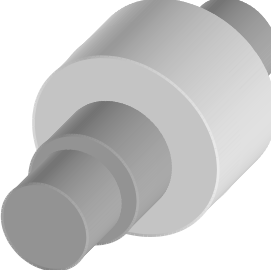
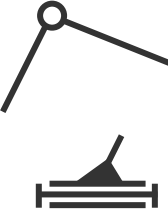
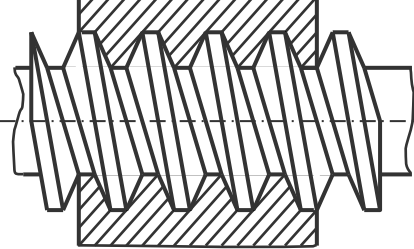
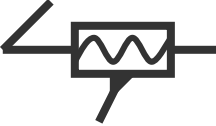
Кинематикалық тізбек жалпы көрінісінің құрылымдық формуласы. Еркіндік дәреже саны

Механизмдердің сұлба бейнесінде кинематикалық жұп және буындарының конструкциялық бейнесінің орнына олардың сызба белгілеу бейнесі дұрыс. Инженерлік практикада қолданылатын кеңірек таралған кинематикалық жұп белгілеу бейнесі 1- кестеде келтірілген.

3.2.1- кесте

Кинематикалық жұп белгілеу бейнелері

Жұп класы	Байланыс берілу саны	Еркіндік дәреже саны	Жұп атауы	Сурет	Белгілеу бейнесі
I	1	5	Шар – жазықтық		
II	2	4	Шар – цилиндр		
III	3	3	Сфералық		

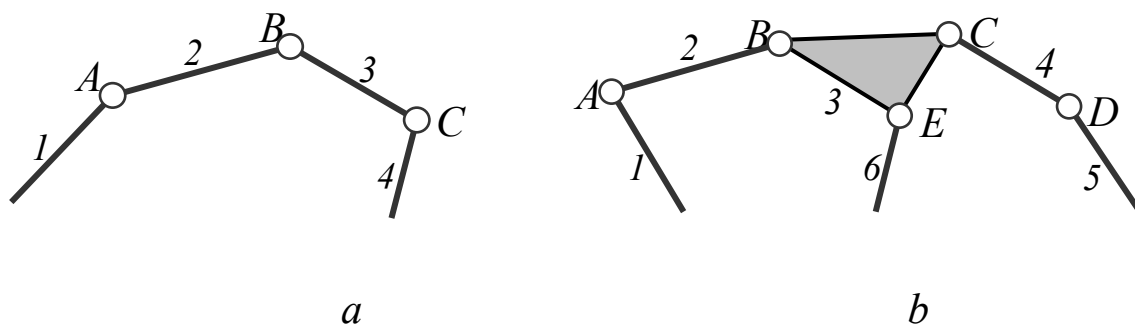
III	3	3 Жазықтықты		
IV	4	2 Цилиндрлі		
IV	4	2 Сфералық саусақты		
V	5	1 Ілгерілемелі		
V	5	1 Айналмалы		
V	5	1 Бұрандалы		

Кинематикалық тізбек

Кинематикалық жұп көмегімен жалғасқан буындардың жүйесін *кинематикалық тізбек* дейміз. Кинематикалық тізбек *жазық* және *кеңістік* болып екі топқа бөлінеді. Жазық кинематикалық тізбек буындарының нүктелері бір жазықтықта немесе параллель

жазықтықтардың бойында қозғалады. Кеңістік кинематикалық тізбек буындарының нүктелері кеңістік қисықтың, жазық қисықтың немесе параллель емес жазықтықтардың бойында қозғалады. Кинематикалық тізбек *қарапайым* және *күрделі* болып екіге бөлінеді.

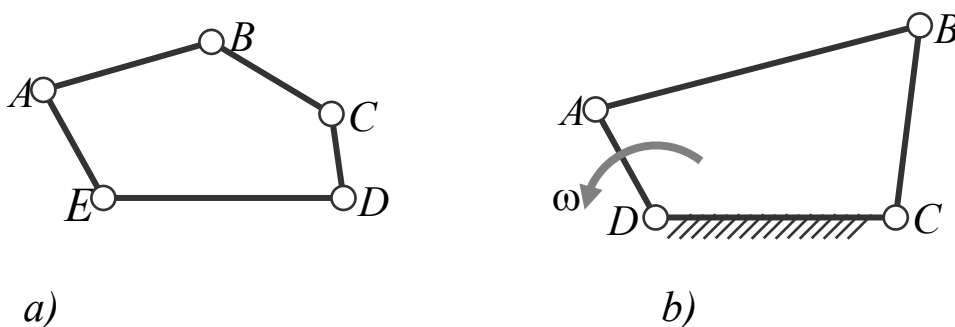
Кинематикалық тізбек



a) қарапайым кинематикалық тізбек *b)* күрделі кинематикалық тізбек
3.2.1– сурет

Әрбір буыны екіден көп емес кинематикалық жұп құрамында болатын тізбекті, *қарапайым кинематикалық тізбек* дейміз (3.2.1,*a*-сурет). Ең болмағанда бір буыны екіден көп кинематикалық жұп құрамында болатын тізбекті, *күрделі кинематикалық тізбек* дейміз (3.2.1,*b*-сурет). Бұл кинематикалық тізбек алты буыннан құрылған, ал үшбұрыш буынына үш кинематикалық жұп кіреді. Келтірілген кинематикалық тізбектер құрамына тек айналмалы жұп кіреді.

Тұйық кинематикалық тізбек және механизм сұлбасы



a) тұйық кинематикалық тізбек *b)* механизм сұлбасы.
3.2.2-сурет

Қарапайым және күрделі кинематикалық тізбектер *тұйықталмаған* және *тұйық* болып екіге бөлінеді. Бір ғана кинематикалық жұп құрамында болатын буындары бар тізбек, *тұйықталмаған*

кинематикалық тізбек деп аталады (3.2.1-сурет). Әрбір буыны ең болмағанда екі кинематикалық жұп құрамында болатын тізбек, түйық кинематикалық тізбек деп аталады (3.2.2-сурет).

Механизм

Бір немесе бірнеше буындардың қозғалысы белгілі болғанда, қалған буындардың қозғалысы бір мәнді анықталатын кинематикалық тізбек *механизм* деп аталады. Қозғалыс заңы берілген буынды *бастапқы* буын деп атайды (кейде бұл буын *жетекші* деп аталады). Буындардың анықталған қозғалысын алу үшін, механизмнің кинематикалық тізбегі түйық және бір буыны қозғалмайтын болуы қажет.

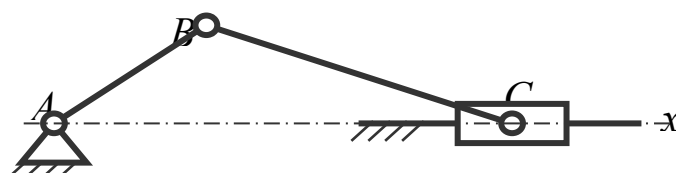
3.2.2,*b*–суретте көрсетілген механизм бейнесі оның *кинематикалық сұлбасы* деп аталады. Механизм қозғалысын оқып үйрену үшін, оның құрылымдық сұлбасын білу жеткіліксіз. Буындардың өзара орындарына, қозғалысына әсерін тигізетін, буындардың өлшем бірліктерін білу қажет. Сондықтан, механизм буындарының қозғалысын оқып үйрену үшін, кинематикалық модель деп аталатын *механизмнің кинематикалық сұлбасын* құрады.

Механизмнің кинематикалық сұлбасы қабылданған масштаб бойынша барлық буындардың пішінін және өлшем бірліктерін есепке ала отырып тұрғызамыз.

Мысалы, іштен жанатын двигатель механизмін қарастырамыз. Бұл механизмнің буындары жалпы бір жазықтыққа параллель қозғалатын болғандықтан, кез келген буынның қозғалысын оқып үйрену үшін, қандай да бір нүктесінің қозғалысын оқып үйрену жеткілікті. 3.2.3-суретте двигатель кинематикалық сұлбасы көрсетілген.

Барлық буындардың қажетті өлшемдері қандай да масштаб μ_l м/мм арқылы өлшенеді, суретте бір миллиметрге μ_l сәйкес келеді яғни $1 \text{ мм} \rightarrow \mu_l \text{ м}$.

Механизмнің поршенді двигатель кинематикалық сұлбасы



3.2.3-сурет

Егер механизм буындары кеңістікте қозғалатын болса, онда кинематикалық сұлбасын құру қиынға соғады. Мұндай жағдайда кинематикалық сұлбасы екі немесе кейбір жағдайларда үш перпендикуляр жазықтықтарға проекциялары арқылы құрылады.

3.3 Жалпы көріністегі кинематикалық тізбектің құрылымдық формуласы. Жазық механизмдердің құрылымдық формуласы.

Артық байланыстар және артық еркіндік дәреже.

Жазық механизмдердің құрылымы

Жалпы көріністегі кинематикалық тізбектің құрылымдық формуласы

Егер кеңістікте буын қозғалысына ешқандай байланыс шарты қойылмаған жағдайда, еркіндік дәрежесі алтыға тең. Егер кинематикалық тізбектің буындарының саны k -ға тең болса, онда оларды кинематикалық жұпқа жалғастырғанға дейін жалпы еркіндік дәрежесі $6k$ -ға тең болады.

Буындарды кинематикалық жұпқа жалғастырғанда, жұп класына байланысты, буындардың салыстырмалы қозғалысына әр түрлі санда байланыс қойылады. Егер қарастыратын кинематикалық тізбек буындары кіретін I класс жұп саны p_1 , II класс - p_2 , III класс - p_3 , IV класс - p_4 , V класс - p_5 -ке тең болса, онда $6k$ еркіндік дәрежесінен кинематикалық жұпқа жалғастырылған буындардың еркіндік дәрежесі алынып тасталады. Онда кинематикалық тізбектің еркіндік дәрежесі H мынадай теңдік арқылы анықталады

$$H = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3.3.1)$$

Конструкцияда бір буыны қозғалмайтын тұйық және тұйық емес кинематикалық тізбектер қолданылады. Қозғалмайтын буын *тірек* деп аталады. Яғни, механизм кинематикалық тізбек буындарының қозғалысын оқып үйрену үшін, қозғалмайды деп қарастырған (тірек) буынға қатысты олардың орын ауыстыруын қарастырамыз. Онда тізбектің еркіндік дәреже саны алтыға азаяды және еркіндік дәрежесі W мынадай теңдік арқылы анықталады

$$W = H - 6. \quad (3.3.2)$$

W саны кинематикалық тізбектің *еркіндік дәреже саны* немесе, қысқаша, *еркіндік дәрежесі* деп аталады. (3.3.2) – формулаға H мәні анықталатын (3.3.1) - қатынасты қойып алатынымыз

$$W = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (3.3.3)$$

Егер (3.3.3) – теңдіктегі $(k - 1)$ шамасын n арқылы өрнектесек, онда

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p, \quad (3.3.4)$$

мұндағы n – қозғалыстағы кинематикалық тізбек буындарының саны. (3.3.4) – теңдік қозғалыс формуласы немесе жалпы түрдегі кинематикалық тізбектің құрылымдық формуласы деп аталады. (3.3.4) – формула 1887 ж. П.И.Сомов басқаша түрде берген және 1923 ж. А.П.Малышев кеңейткен, сондықтан, Сомов – Малышев формуласы деп аталады.

Егер кинематикалық тізбек V класс жұптарынан құрылса, онда (3.3.4) – формула мынадай түрде жазылады

$$W = 6n - 5p_5.$$

Механизм буындары анықталған қозғалыста болатын кинематикалық тізбек болып табылатын болса, онда механизм буындарының анықталу қозғалысы оның еркіндік дәреже санымен қандай байланыста болатынын анықтау қажет. (3.3.4)–формула бойынша қозғалмайды деп алынған буынға (тірек) қатысты механизмнің еркіндік дәреже саны қозғалыс дәрежесін сипаттайды. Егер механизмнің еркіндік дәрежесі бірге тең болса, онда біз тірекке қатысты механизм буындарының біреуіне толық анықталған қозғалыс заңдылығын жаза аламыз (*механизмнің жалпылама координатын*) мысалы, берілген жылдамдықпен айналмалы, ілгерілемелі, бұрандалы қозғалыс. Бұл жағдайда берілген функцияға байланысты механизмнің барлық қалған буындары анықталған қозғалыста болады. Егер механизмнің еркіндік дәрежесі екіге тең болса, онда тірекке қатысты буындардың біреуіне екі байланыссыз қозғалыс (*механизмнің екі жалпылама координатын*) немесе тірекке қатысты екі буынына біріне бірі байланыссыз беру қажет т.с.с.

Тірекке қатысты механизмнің барлық буындарының орнын анықтайтын өзара байланыссыз координаттарды *механизмнің жалпылама координаттары* деп атайды.

Механизмнің бір немесе бірнеше жалпылама координаттары берілетін буын, *бастапқы буын* деп аталады.

Машиналар және приборлар конструкцияларында көп жағдайда еркіндік дәрежесі бірге тең механизм қолданылады. Кейбір машиналар конструкцияларында екі немесе одан да көп еркіндік дәрежелі механизм қолданылады. Мұндай конструкцияларға

автомобильдер дифференциалы, кейбір есептеуші – шешуші машиналар және манипулятор жатады.

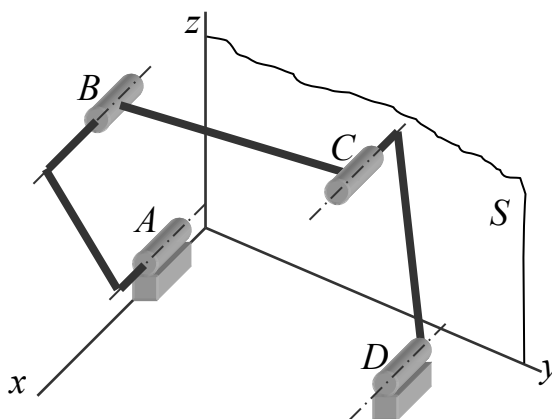
Жазық механизмдердің құрылымдық формуласы

Алдында айтылып кетті, жалпы жағдайда механизмнің еркіндік дәреже саны W (3.3.4) – формуламен анықталады

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p.$$

Егер механизм құрамына кіретін буындардың қозғалысына қосымша шарт қойылмаса, онда осы формуланы қолдануға болады. Мысалы, механизмнің V класс жұптары тек айналмалы болуы, осы жұптардың өстері параллель болуы, бір нүктеде қиылысуы және т.с.с.

Топсалы төрт буынды механизм



3.3.1-сурет

Осындай қосымша шарт механизмнің қозғалысын және оның сәйкес құрылымдық формуласын өзгертеді. Мысал үшін V класс жұптары құрастыратын механизмнің параллель болсын (3.3.1–сурет). Қозғалмайтын xuz координаттар жүйесін, x өсінің бағыты жұптардың өсімен бағыттас, ал y және z өстері жұптардың өстеріне перпендикуляр жазықтықта болатындай қабылдаймыз. Бұл жағдайда $ABCD$ механизмнің барлық нүктелері y және z координаттары құрайтын қозғалмайтын S жазықтығына параллель қозғалатын болады және біздер *жазық механизм* аламыз, яғни буындардың нүктелері параллель жазықтықта траектория сызатын механизм.

Осы барлық кинематикалық жұптардың өстерінің параллельдік шарттарына байланысты барлық буындарының қозғалысына қандай жалпы шектеу қойылғанын қарастырамыз. Механизм буындары y және z өстеріне қатысты айналмалы, x өсі бойымен ілгерілемелі

қозғалыста бола алмайды, яғни алты мүмкін болатын қозғалыстың үшеуі орындалмайды. Сонымен, келесі мүмкін болатын үш қозғалыс қалады: x немесе оған параллель өстерге қатысты айналмалы, y және z өстері бойымен ілгерілемелі қозғалыстары. Шындығында AB және CD буындары x өсіне параллель өстерге қатысты айналмалы, ал BC буыны S жазықтығына перпендикуляр өске қатысты айналмалы және осы жазықтыққа параллель ілгерілемелі қозғалыс қосындысы болатын жазық параллель қозғалады.

Егер механизмнің барлық буындарына үш шектеу қойылатын болса, онда, әрине, бұл жағдай жеке буындардың еркіндік дәреже шамасын санағанда және механизмнің жалпы еркіндік дәреже шамасын санағанда есепке алынуы қажет. Егер жалпы жағдайда механизмнің қозғалыстағы буындарының еркіндік дәреже саны $6n$ – ге тең болса, онда қарастырып отырған механизмнің қозғалыстағы буындарының еркіндік дәреже саны $(6 - 3)n = 3n$ болады. Сонымен, жұптардың өстері параллель болатын шартына үш байланыс қойылатын болғандықтан, бұл механизмнің V класс жұптарына қойылатын $5p_5$ байланыстың орнына, осы механизмнің V класс жұптарына $(5 - 3)p_5 = 2p_5$ байланыс қойылады т.с.с. Механизмнің (4) – құрылымдық формуласы басқаша болады

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_5 - (4 - 3)p_4 - (3 - 3)p_3,$$

яғни, жазық механизмнің еркіндік дәреже саны мынадай теңдік арқылы анықталады

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.3.5)$$

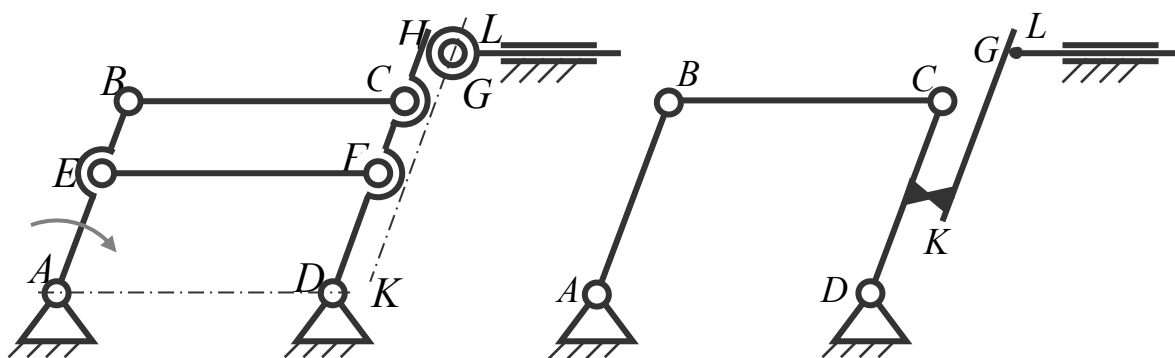
(1.3.5)-формула жалпы түрдегі жазық механизмдердің құрылымдық формуласы.

Мүмкін болатын салыстырмалы қозғалыстары кеңістікті сипат алатын болғандықтан, I, II и III класс жұптары жазық механизмдердің құрамына кіре алмайды.

Буындардың және байланыстардың еркіндік дәрежесінен басқа, механизмдердің қозғалыс сипатына қатты әсер ететін, олардың кейбіреуі еркіндік дәрежеде және байланыстарда кездеседі, жалпы механизмнің қозғалыс сипатына ешқандай әсерін тигізбейді. Механизм құрамынан осы еркіндік дәреже және байланыс шарты жататын буындарды және кинематикалық жұптарын жою, жалпы механизмнің қозғалыс сипатын өзгертпей орындалады. Осындай еркіндік дәреже *артық еркіндік дәреже*, ал байланыс *пассив байланыс* деп аталады.

Мысал ретінде параллелограм $ABCD$ түрдегі жазық механизмді қарастырамыз. F және E нүктелерінің ара қашықтығы тұрақты болып қалады. Онда механизм қозғалысына пассив байланыс болғандықтан EF буынын механизм қозғалыс сипатын өзгертпей алып тастауға болады. Еркін айналатын ролик G артық еркіндік дәрежені береді, сондықтан оны алып тастауға болады.

Пассив байланысы және артық еркіндік дәрежесі бар жазық механизм



3.3.2-сурет

3.3.3– сурет

Құрылымдық формула көмегімен механизмнің құрылымын зерттегенде артық еркіндік дәреженің және пассив байланыс шартының бар екенін есепке алу қажет. Келешекте механизм буындарының қозғалысын оқып үйренгенде барлық артық еркіндік дәреже және пассив байланыс шарттары сәйкес буындарымен бірге алдын ала алынып тасталған деп қарастырамыз және оның анықталған қозғалысы байланысты болатын, тек сол байланыстар мен еркіндік дәрежелерді есепке аламыз.

Жазық механизмдердің құрылымы

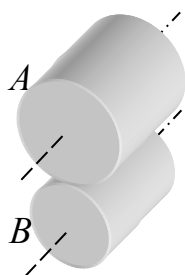
Алдында көрсетілген жазық механизмдердің құрылымдық формуласы жалпы түрде мынадай

$$W = 3n - 2p_5 - p_4.$$

Бұл формуланы орыс академигі П.Л.Чебышёв 1869 жылы бірінші жазған. Чебышёв формуласы бойынша жазық механизмдер тек IV және V класс кинематикалық жұп құрамына енетін буындарынан құрылады. Жазық механизмдердің IV класс жұбы оның буындарының салыстырмалы қозғалысында бір байланыс шартын

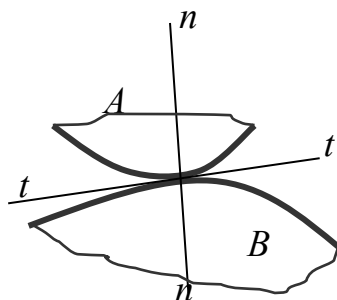
береді. Жазық механизмдерде V класс жұп оның буындарының салыстырмалы қозғалысында екі байланыс шартын береді. Кейбір IV класс жұп мысалдарын қарастырамыз (3.3.4, 3.3.5, 3.3.6-суреттер).

Екі цилиндрлі IV класс жазық кинематикалық жұп



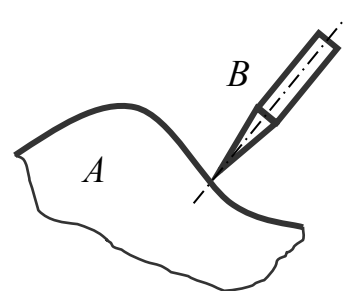
3.3.4-сурет

Екі қисық сызықты буындардан тұратын IV класс жазық кинематикалық жұп



3.3.5-сурет

Қисық сызықты және үшкір буындардан тұратын IV класс жазық кинематикалық жұп



3.3.6-сурет

Барлық IV класс кинематикалық жұп буындары нүкте, немесе түзу бойымен жанасады; бұл жұп жоғары жұп қатарына жатады.

Жазық механизм құрамында IV класс жұп қандайда бір қозғалысты жоюға көмектеседі: мысалы, 3.3.5-суретте көрсетілген жұп, олардың нүктесі арқылы жүргізілген ортақ $t - t$ жанамаға перпендикуляр, A және B буындарының $n - n$ нормаль бағытында салыстырмалы қозғалысын жояды. Осы жұп буындарының мүмкін болатын салыстырмалы қозғалыстары бір қисық доға бойымен сырғанауы және домалап қозғалуы болып табылады. V класс жұп буындары жазық механизм құрамында бет бойымен жанасып айналмалы немесе ілгерілемелі қозғалыста болады, бұрандалы жұп жазық механизм құрамында бола алмайды, себебі, олардың буындарының кеңістікте салыстырмалы қозғалыста болады. Жұп буындарының мүмкін болатын үш қозғалысының жазық механизм құрамында айналмалы және ілгерілемелі жұптары екі қозғалысын жояды. Айналмалы жұп жазықтықта жататын буындардың екі өс бойымен ілгерілемелі қозғалысын жояды. Ілгерілемелі жұп бір ілгерілемелі және бір айналмалы (буындардың қозғалыс жазықтығына перпендикуляр өсті айнала) қозғалысын жояды.

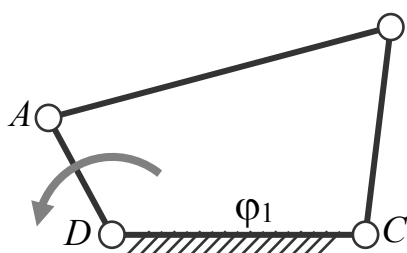
(3.3.5)-формула анықтайтын W санына байланысты, біздер бір, екі, үш және т.с.с еркіндік дәрежелі жазық механизм аламыз. 3.3.7-

суретте бір еркіндік дәрежелі, ал 3.3.8–суретте екі еркіндік дәрежелі механизм көрсетілген.

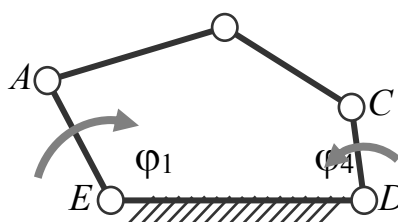
Кинематикалық тізбектің еркіндік дәрежесі нөлге тең болғанда буындарының біреуі де қозғалмайтын буынға қатысты қозғалыста бола алмайды және кинематикалық тізбек фермаға айналады (1.20 – сурет).

Жалпылама координаты φ_1 бірге тең механизм сұлбасы

Жалпылама координаты φ_1 және φ_4 екіге тең механизм сұлбасы



3.3.7-сурет

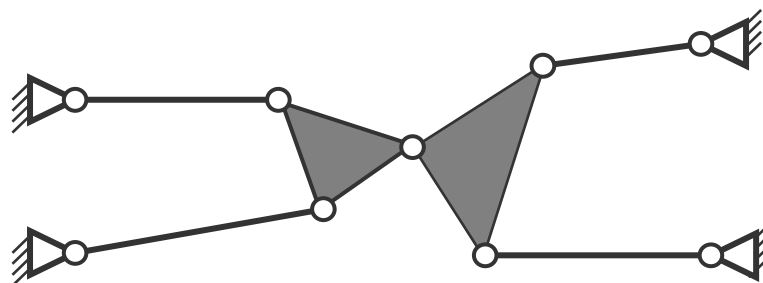


3.3.8-сурет

Еркіндік дәрежесі бірге тең кинематикалық тізбектен құрылған механизм буындарының барлық қозғалыстары анықталған болуы үшін, буындарының біреуіне берілген қозғалыс заңдылығын білу қажет және жеткілікті.

3.3.7–суретте көрсетілген механизм үшін, мысалы, буынның бұрылу бұрышы уақыт t – ға бір мәнді $\varphi = f(t)$ буын заңдылығын білсек жеткілікті, яғни механизм жалпылама координатының біреуін.

Еркіндік дәрежесі нөлге тең кинематикалық тізбек



3.3.9–сурет

Қалған буындардың барлық анықталған қозғалысын алу үшін, W саны қанша буынға қозғалыс заңдылығын беру керек екенін

көрсетеді. Көбінесе жалпылама координат ретінде, тірек буынымен кинематикалық жұп құратын буындардың қозғалыс заңы алынады.

Жазық механизм жоғары жұптарын төменгі жұптармен ауыстыру

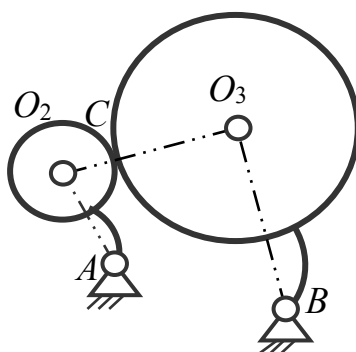
Жазық механизм құрамында төменгі және жоғары жұп құратын буындары мүмкін болатындығы белгілі. Механизм құрылымын және кинематикасын оқып үйренгенде көп жағдайларда кинематикалық тізбектердің немесе буындардың жоғары жұптарын, тек төменгі айналмалы және ілгерілемелі V класс жұтар арқылы ауыстырған қолайлы болады. 3.3.10–суретте көрсетілген үш буынды механизмді қарастырамыз. Механизмді тірек 1 – мен V класса A және B айналмалы жұп құрамында қозғалмалы 2 және 3 буындары және элементтері a және b шеңбер радиусы O_2C и O_3C болатын жоғары IV класс жұп C құрады. (3.3.5)–формулананы пайдаланып еркіндік дәрежесін есептейміз

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Қарастырылатын механизмді оған эквивалентті топсалы төрт буынды AO_2O_3B механизм арқылы ауыстыруға болатынын көрсетуге болады. C нүктесіндегі IV класс кинематикалық жұп, O_2 және O_3 нүктелері құрамында болатын айналмалы V класс және 4 – буынымен ауыстыруға болады. Ауыстырылған механизм AO_2O_3B ауыстырушы механизм деп аталады. Ауыстырушы механизмнің еркіндік дәрежесі W берілген механизмнің еркіндік дәрежесіне тең болады

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

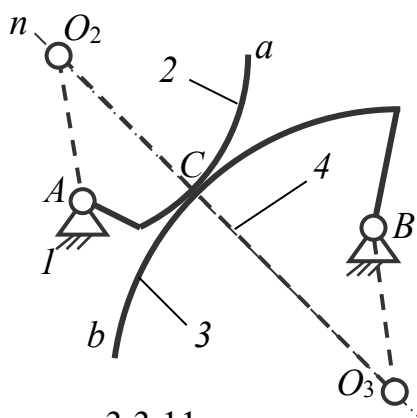
Екі дөңгелек түріндегі жоғары класс механизм және оны ауыстыратын топсалы төрт буынды механизм сұлбасы



3.3.10–сурет

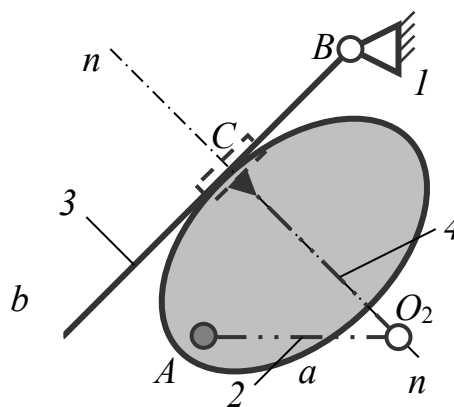
Буындардың элементтері центрлері O_2 және O_3 нүктелері болатын шеңберлер болғандықтан 4 – буынның ұзындығы O_2O_3 тұрақты болады. Дәл осы сияқты 2 және 3–буындардың ұзындықтары AO_2 және BO_3 те тұрақты болады. Ауыстыратын механизм AO_2O_3B 2 және 3 буындардың қозғалыс заңдылықтары бойынша берілгеніне эквивалентті болады.

Буындарының элементтері кез келген жоғары жұпты және оны ауыстыратын төрт буынды топсалы механизм сұлбасы



3.3.11- сурет

Буындарының элементтері кез келген жоғары жұпты және оны ауыстыратын үш айналмалы және бір ілгерілемелі жұпты механизм сұлбасы



3.3.12– сурет

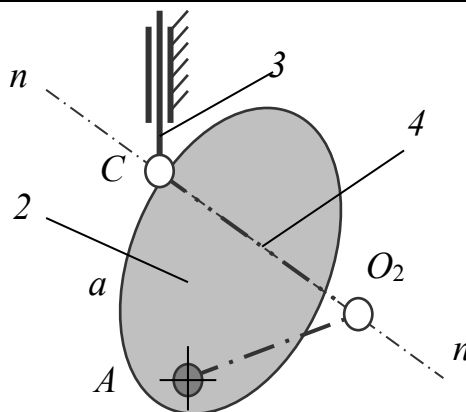
Қарастырылған ауыстырушы механизм алу тәсілін кеңейтуге болады. Буындарының элементтері кез келген берілген a және b қисық болатын жоғары жұпты механизм берілсін дейік (3.3.11–сурет). Ауыстырушы механизм сұлбасын тұрғызу үшін қисықтар жанасатын нүкте C арқылы нормаль nn жүргіземіз және оның бойынан қисықтар O_2 , O_3 центрлерін белгілейміз. Жанасу нүктесінде шеңбер қисықтығы және қисық қисықтығы екінші ретті туындысына дейін эквивалентті болатындығы дифференциальдық геометриядан белгілі, сондықтан, ауыстырушы механизм негізгі берілген механизміне сол дәрежеде эквивалентті, яғни механизмдердің аттас нүктелерінің орындары, жылдамдықтары және үдеулері бірдей болады.

Егер буындардың жанасатын бір элементі қандай да қисық, ал екіншісі түзу b болса, онда екінші профилінің қисықтығы шексіздікте болады (3.3.12–сурет). Бұл жағдайда ауыстырушы 4 – буын O_2 қисықтық центрінде 2 – буын элементімен V – класс айналмалы жұп арқылы жалғасады.

Буындарының элементтері кез келген қисық және нүкте болатын жоғары жұпты және оны ауыстыратын кривошип – жылжымалы механизм сұлбасы

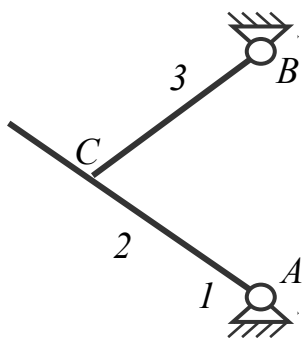
Келесі мүмкін болатын жағдай - жанасатын элементтің біреуі қисық a , ал екіншісі нүкте C (3.3.13–сурет). Бұл жағдайда C элементінің қисықтық центрі C нүктесінде түйіседі, сондықтан, ауыстырушы 4–буын O_2 қисықтық центрінде 2–буын элементімен V – класс айналмалы жұп арқылы, ал C нүктесінде 3–буынымен V–класс айналмалы жұп арқылы жалғасады.

Буындарының элементтері кез келген нүкте немесе қисық болатын жоғарғы және ауыстыратын кривошип – бұлғақты механизм сұлбасы



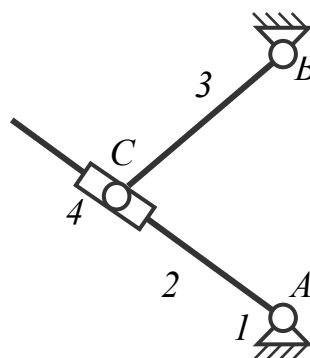
3.3.13–сурет

Буындардың элементі – түзу және нүкте механизм сұлбасы



3.3.14-сурет

Ауыстырушы механизм сұлбасы



3.3.15–сурет

Егер бір элементі түзу AC , ал екіншісі нүкте C болса (3.3.14–сурет), онда ауыстырушы 4 – буын 3 – буынымен айналмалы, 2 – буынымен ілгерілемелі жұптары арқылы жалғасады. Ауыстырушы механизм 3.3.15–суретте көрсетілген.

Сонымен, кез келген IV – класс жоғары жұпты жазық механизмді, тек V-класс төменгі кинематикалық жұп құрамында болатын механизм арқылы ауыстыруға болады.

Егер жазық механизм құрамындағы барлық IV–класты жоғары жұптары төменгі жұптары арқылы ауыстырылған болса, онда ауыстыратын механизм үшін құрылымдық мынадай түрде жазылады $W = 3n - 2p_5$.

3.4 Ассур тобы бойынша механизмдердің классификациясы.

Механизм пайда болу тәсілдері.

Жазық механизмдердің құрылым классификациясы

Ассур тобы бойынша механизмдердің классификациясы.

XVIII – ғасырдың соңынан бастап ғалымдар механизмдердің әр түрлі белгілерін бөлуге негізделген, әр түрлі классификация жүйелерін ұсынған:

- 1) буын қозғалысының сипатына байланысты;
- 2) жылдамдықтарды түрлендіру белгілеріне байланысты;

3) белгілі бағытта тағайындалуына байланысты және т.с.с. Осы классификация жүйелерінің біреуі де бар механизмдерді толық қамти алмады. 1914 жылы Петербург политехникалық институты профессоры Ассур механизм классификациясы жүйесін ұсынды. Бұл механизм және машина теориясы дамуына елеулі әсерін тигізді. Ассур классификациясы құрамына тек төменгі кинематикалық жұп енетін жазық механизм бағынады.

Ассур классификациясы жүйесінің негізгі түйіні мынадай: 1) механизмдердің пайда болуына жол көрсетеді; 2) кинематикалық және кинетостатикалық әдістерімен механизмдерді зерттеу көрсетіледі, яғни Ассур классификациясы жүйесінде әрбір механизм тобына анықталған зерттеулер сәйкес келеді.

Қозғалыс дәрежесі механизмнің еркіндік дәрежесіне тең механизм тобы (кинематикалық тізбек) Бастапқы буындардың тобы деп аталады. Қозғалыс дәрежесі нөлге тең кинематикалық тізбек Ассур тобы деп аталады. Сонымен, кез келген механизмді бір

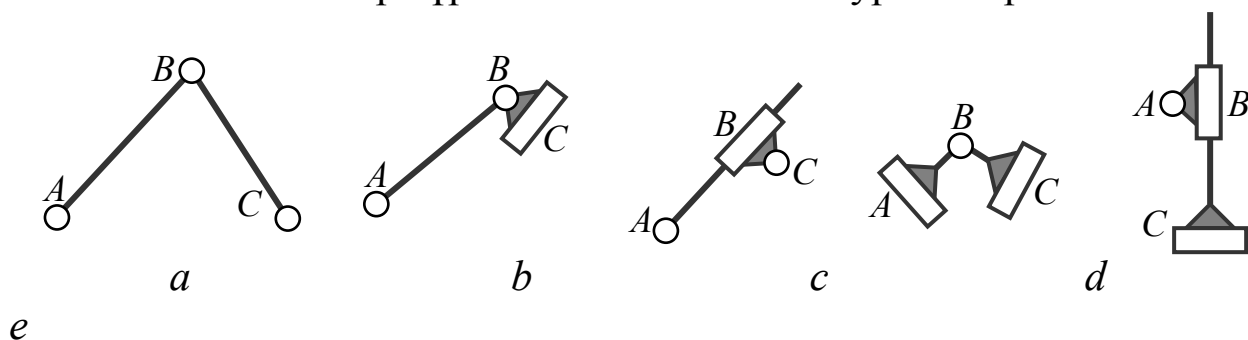
Кестенің бірінші тік бағаны қарапайым топ 2 буыннан және 5 – класс үш кинематикалық жұп құрамында болатынын көрсетеді (3.4.2–сурет). Осы топ екінші класты Ассур тобы қатарына жатады және *екі салалы* немесе *екінші ретті топ* деп аталады. Сала – екі кинематикалық жұп құрамына енетін топ буыны. Топ реті әрқашан сала санымен анықталады. Барлық екінші класты топтар екінші ретті топтар болып табылады.

Таблицаның бірінші тік бағаны үш вариантты кинематикалық тізбектерді құруға мүмкіндік береді (3.4.3–сурет). 3.4.3,*а*–суретте көрсетілген кинематикалық тізбек топ бола алмайды, ал *екінші* класты *ABC* және *DEF* екі Ассур топтарына жіктеледі. 3.4.3,*б*–суретте көрсетілген кинематикалық тізбек үшінші ретті *үшінші класты* Ассур тобын құрады. Бұл топта *A, B, C* кинематикалық жұптары ішкі, ал *D, E, F* кинематикалық жұптары ішкі болады. 3.4.3,*с*–суретте көрсетілген кинематикалық тізбек екінші ретті *төртінші* класты Ассур тобы деп аталады. Бұл топта *A* және *B* кинематикалық жұптары сыртқы, ал *C, D, E, F* кинематикалық жұптары ішкі болады.

Екіден жоғары Ассур топтарының класы, контур құратын кинематикалық жұптардың санымен анықталады.

Үшінші және жоғары кластағы Ассур топтары түрлеріне қарай ажыратылады.

Әр түрлі екінші класты Ассур топтары



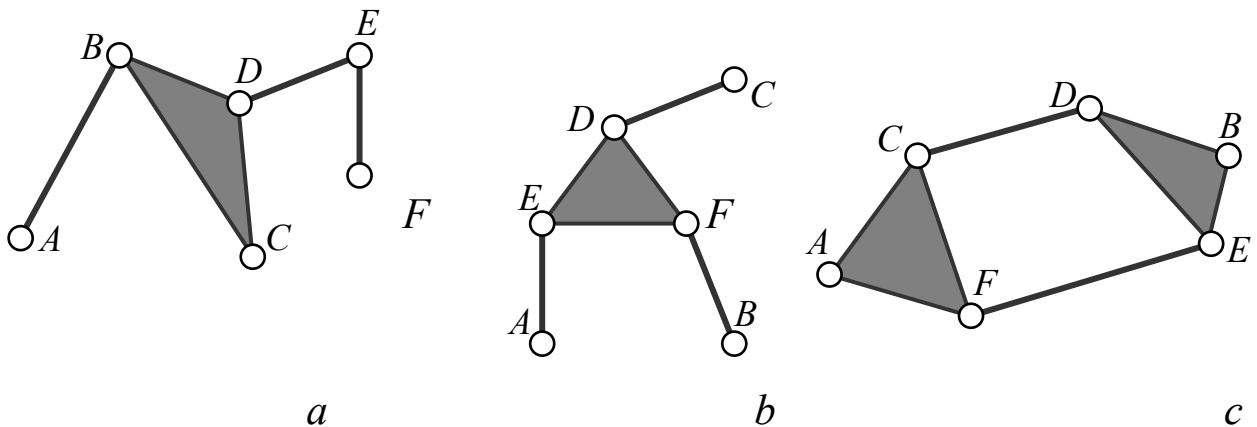
a) бірінші, *b)* екінші, *c)* үшінші, *d)* төртінші, *e)* бесінші.

3.4.2- сурет

Механизм класы құрамына кіретін Ассур топтарының ең жоғары класы санымен анықталады. Жетекші буынды өзгерту арқылы механизм класы санын жоғарылатуға немесе төмендетуге болатынын есте сақтау керек. Сондықтан, бірдей берілген барлық жағдайда механизм класы жетекші буынды қабылдауға байланысты болады.

Механизм класы санын жоғарылату механизміді ки-нематикалық және күштік талдау жүргізуде қиындық тудырады, сондықтан, берілген механизмнің кинематикалық сұлбасын мүмкін болатын барлық төменгі класты механизм ретінде қарастыру керек. Бірінші класты механизм деп тірек және бесінші класс кинематикалық жұп құратын қозғалмалы буынды айтады.

Кинематикалық тізбектің үш варианты

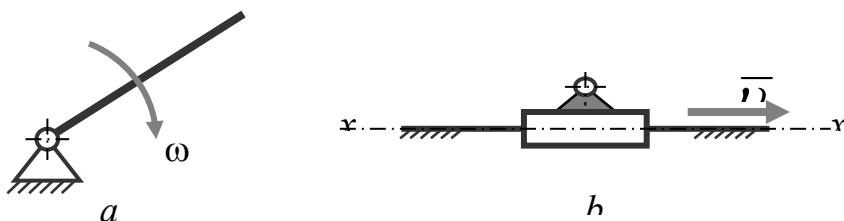


a) екінші класты екі Ассур тобы, *b)* бір үшінші класты топ, *c)* бір төртінші класты топ

3.4.3- сурет

Бірінші класты механизм машина жасау құрылысында кең қолданылады. Ілгерілемелі қозғалыстағы кинематикалық жұпты механизм іштен жанатын двигательдер, дизельдер, пармен жұмыс жасайтын машиналар механизмдері болып табылады т.с.с.

Бірінші класты механизмдердің сұлбасы



a) айналмалы жұпты механизм; *b)* ілгерілемелі жұпты механизм

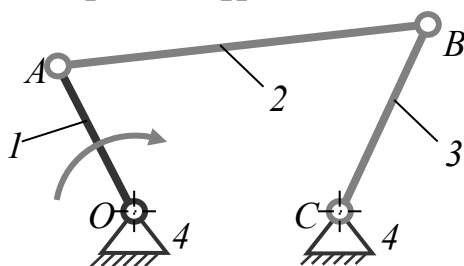
3.4.4–сурет

Екінші класты механизм кинематикалық сұлбасы бірінші класты механизмге екінші класты құрылымдық топтарды жалғастыру арқылы құрылады. Механизм буындарының қозғалыс заңдылықтары

бірінші класты механизм қозғалыс заңдылықтары арқылы анықталады.

Бірінші класты механизмге әр түрлі екінші класты Ассур топтарын жалғастыру арқылы құрылған кейбір механизмдердің кинематикалық сұлбасын қарастырамыз. Бұл 5 – класты кинематикалық жұп құрамында болатын төрт буынды механизм.

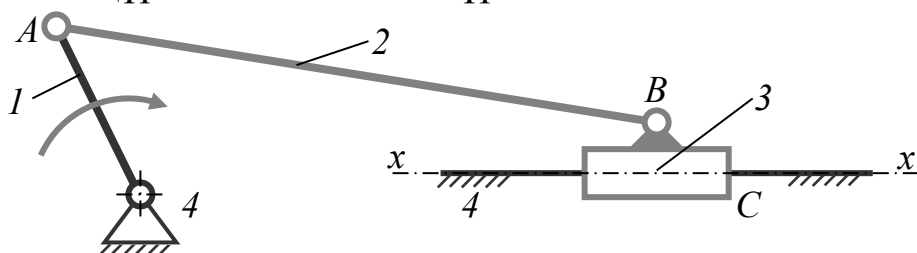
Құрамында бірінші түрдегі топ болатын механизм



3.4.5–сурет

Топсалы төрт буын құрамында жетекші буынға және тірекке жалғасқан бірінші түрдегі екінші класты Ассур тобы болады. Бұл механизм сұлбасы 3.4.5–суретте көрсетілген. Механизм 1 – жетекші буынға 2 және 3 буындардың құрылым тобын жалғастыру арқылы құрылған. Құрамына A , B және C айналмалы кинематикалық жұптары енеді.

Құрамында екінші түрдегі топ болатын механизм

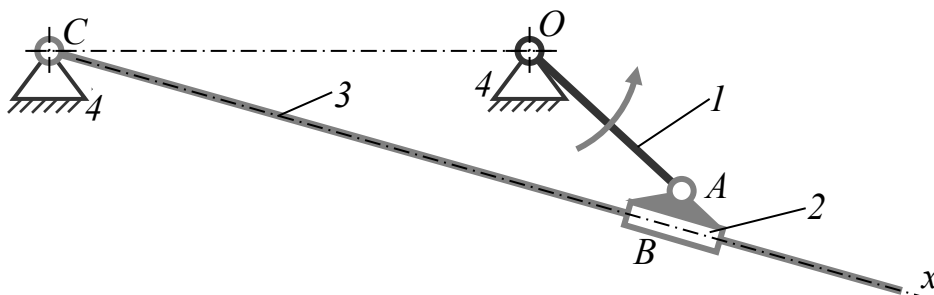


3.4.6– сурет

Кривошипті – жылжымалы механизмнің құрамында жетекші буынға және тірекке жалғасқан екінші түрдегі екінші класты Ассур тобы болады. Бұл механизм сұлбасы 3.4.6–суретте көрсетілген. Механизм 1 – жетекші буынға 2 және 3 буындардың құрылым тобын жалғастыру арқылы құрылған. Құрамына A , және B айналмалы және C ілгерілемелі кинематикалық жұптары енеді.

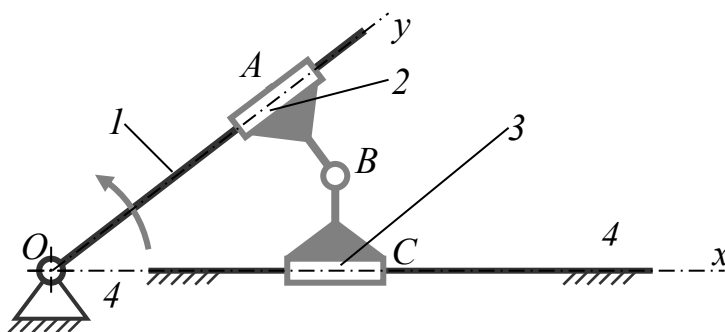
Кулисалы Витвора (Whitworth) механизмінің құрамында жетекші буынға және тірекке жалғасқан үшінші түрдегі екінші класты Ассур тобы болады. Бұл механизм сұлбасы 3.4.7–суретте көрсетілген. Механизм 1–жетекші буынға 2 және 3 буындардың құрылым тобын жалғастыру арқылы құрылған. Құрамына A , және C айналмалы және B ішкі ілгерілемелі кинематикалық жұптары енеді.

Құрамында үшінші түрдегі топ болатын механизм



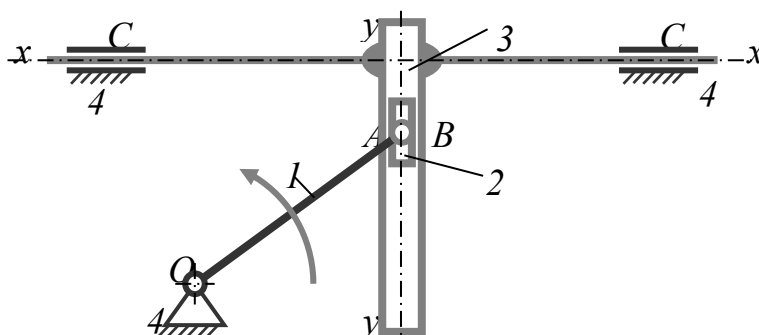
3.4.7–сурет

Құрамында төртінші түрдегі топ болатын механизм



3.4.8–сурет

Құрамында бесінші түрдегі топ болатын механизм

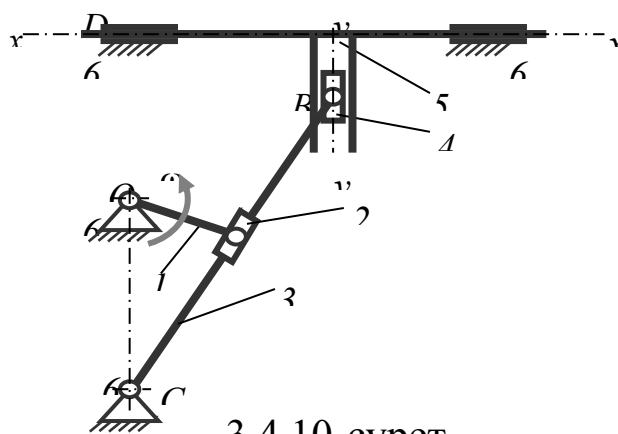


3.4.9-сурет

Келесі механизм құрамында жетекші буынға және тірекке жалғасқан төртінші түрдегі екінші класты Ассур тобы болады. Бұл механизм сұлбасы 3.4.8–суретте көрсетілген. Механизм 1–жетекші буынға 2 және 3 буындардың құрылым тобын жалғастыру арқылы құрылған. Құрамына *A*, және *C* ілгерілемелі, *B* ішкі айналмалы кинематикалық жұптары енеді.

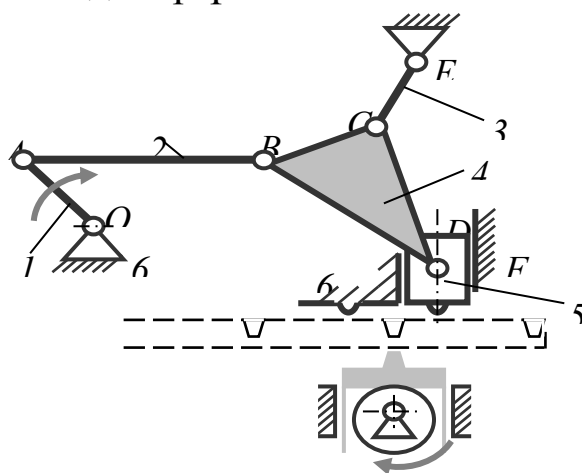
Бесінші механизм құрамында жетекші буынға және тірекке жалғасқан бесінші түрдегі екінші класты Ассур тобы болады. Бұл механизм сұлбасы 3.4.9–суретте көрсетілген. Механизм 1–жетекші буынға 2 және 3 буындардың құрылым тобын жалғастыру арқылы құрылған. Құрамына *A* айналмалы *C* ілгерілемелі және *B* ішкі ілгерілемелі кинематикалық жұптары енеді.

Құрамында үшінші және бесінші түрдегі топтар болатын механизм



3.4.10-сурет

Құрамында бір үшінші класс тобы болатын механизм



3.4.11-сурет

Кинематикалық сұлбасы 3.4.10–суретте көрсетілген алты буынды екінші класты механизмді қарастырамыз. Механизм құрамына екі құрылымдық Ассур тобы енеді. 2 және 3 буындары үшінші түрдегі топты, ал 4, 5 буындары бесінші түрдегі топты құрады.

Шойын құймасын сындыратын механизмді қарастырамыз. Бұл механизм құрамында бастапқы буынға жалғасқан үшінші класты Ассур тобы болады (3.4.11–сурет). Иітіректі механизм құрамында бес қозғалыстағы буындар бар. 2, 3, 4 және 5 буындар үшінші класс құрылымдық тобын құрады. Құрамына *A, B, C, D* және *E* айналмалы, *F* ілгерілемелі кинематикалық жұптары енеді. Барлық ішкі *B, C* және *D* айналмалы кинематикалық жұптары тұйықталу құрады және Ассур құрылымдық тобының класын анықтайды.

3.5 Графикалық тәсілмен іін тіректі механизмді кинематикалық талдау

3.5.1 Масштаб коэффициенті. Топтар буындарының орнын және нүктелерінің траекториясын тұрғызу

Механизмдерді кинематикалық зерттегенде келесі негізгі сұрақтар қарастырылады:

a) механизмнің орын жобасын және оның буындарында орналасқан жеке нүктелерінің сызатын траекторияларын тұрғызу;

б) механизмнің буындарында орналасқан нүктелерінің жылдамдықтарын, үдеулерін және жеке буындарының бұрыштық жылдамдықтарын, бұрыштық үдеулерін анықтау;

Барлық аталған сұрақтар аналитикалық, эксперимент немесе графикалық тәсілдермен шешілуі мүмкін.

Эксперимент тәсілі сәйкес лаборатория болған жағдайда қолданылады. Аналитикалық тәсіл қарапайым механизмдерді талдауда қолдану жеңіл, ал күрделі механизмдерді аналитикалық тәсілмен шешу өте қиын. Механизмдер және машиналар теориясында графоаналитикалық тәсіл, кинематикалық зерттеу сұрақтарын тез шешу үшін жуық дәлдікпен практикалық есептеу жүргізуге мүмкіндік береді. Кинематикалық есептеуде мынадай шамалар беріледі:

1) механизм буындарының өлшемдері және оның кинематикалық сұлбасы;

2) бастапқы буынның қозғалыс заңы.

Механизмдер және машиналар теориясында қолданылатын масштабтар

Сызбада графикалық тұрғызу орындағанда буын ұзындықтарын, жеке нүктелер жылдамдықтарын және үдеулерін, күштерді және т.б. масштабта кескіндеу қажет болады. Масштаб туралы түсінік қарапайым болғанымен, практикалық есептеулерде кателердің көбі масштаб көмегімен графикалық тұрғызуға байланысты болады. Сондықтан, графикалық және графоаналитикалық тәсілдермен механизмдерді зерттеу жұмыстарын жүргізгенде масштабты есептеуге ұқыпты болған дұрыс.

Механизмдер және машиналар теориясында масштаб түсінігі ретінде, қарастырылатын шаманың осы шаманы сызбада кескіндейтін кесіндінің шамасына қатынасы қабылданады.

Мысалы, қандайда бір физикалық шама N сызбада ұзындығы X миллиметр кесіндімен кескінделсе, онда масштаб μ мынадай қатынаспен анықталады

$$\mu = \frac{N}{X}.$$

Механизмдер және машиналар теориясында және басқа техникалық ғылымдарда, *Халықаралық бірлік жүйесі қолданылады (СИ, SI – System International)*. Ұзындық – метрмен (m), масса – килограммен (kg), күш және салмақ – ньютонмен (N), уақыт – секундпен (s) көрсетіледі. Механика бөлімінде өлшем бірлік масса және уақыт негізгі, ал өлшем бірлік күш және салмақ өзіндік аты бар туынды СИ бірлік болып табылады. *Ньютон, массасы 1 кг денені 1 м/с² үдеумен қозғайтын күш.*

Орын, жылдамдық және үдеу жобалары масштабын, жоба қажетті дәлдікпен орындалатындай және сызба аймағын дұрыс пайдалануға болатындай етіп қабылдайды. Масштабтың қандай шаманы көрсететінін анықтау үшін, μ масштабта индекс қойылады.

Кинематикалық шамалар үшін, масштаб өлшем бірліктері мынадай: ұзындық масштабы - $\mu_l \left[\frac{m}{mm} \right]$, жылдамдық - $\mu_v \left[\frac{m \cdot s^{-1}}{mm} \right]$, үдеу - $\mu_a \left[\frac{m \cdot s^{-2}}{mm} \right]$.

Механизмнің орын жобасын тұрғызу

Механизмнің орын жобасы деп, қабылданған уақыт мезетіндегі буындардың өзара орналасуының графикалық кескіндерін айтады. Механизм қозғалған кезінде барлық уақытта буындардың орналасуы өзгереді, оның өзгерісін қадағалау үшін, тізбектелген орнын тұрғызады. Мұндай тұрғызу қайтымды қозғалыс жасайтын механизм үшін орынды. Мысалы, кривошиптің бір айналысы уақыт периодына тең. Осындай механизмнің 12 – орын жобаларын тұрғызады.

Механизмнің орын жобаларын тұрғызу үшін мыналар берілуі қажет:

- а) механизмнің кинематикалық сұлбасы;
- б) буындардың өлшемдері;
- в) жетекші немесе бастапқы буынның қозғалыс заңы.

Механизмнің орын жобаларын тұрғызу әдісі оның күрделілік дәрежесіне, яғни механизм құрамына кіретін Ассур топтарының ретіне және класына байланысты. Төменде екі салалы топтарға қолданылатын осы әдісті қарастырамыз.

Механизмнің орын жобасын тұрғызуға қойылған мәселені шешуді мысалмен қарастырамыз.

Мысал ретінде 3.5.1.1–суретте көрсетілген I–класты 2–ретті механизмді қарастырамыз. Механизмнің өлшемдері:

$l_{OA} = 0,08 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,1 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,09 \text{ м}$, $l_{OC} = 0,05 \text{ м}$, $l_{BD} = 0,06 \text{ м}$, $\omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}$. Механизмнің 12 орын жобаларын тұрғызу керек.

Шешуі: 1) Механизм буындарының саны $k = 4$, қозғалыстағы буындарының саны $n = k - 1 = 4 - 1 = 3$, V - кластағы кинематикалық жұптар саны $p_5 = 4$, механизмнің қозғалыс дәрежесі $W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$. Механизмнің құрылыс формуласы: $I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,3)}$. Құрылыс формуласынан жалғасатын топтардың класы – екінші, сондықтан, берілген механизм екінші класқа жатады.

Механизмнің орын жобаларын тұрғызуды мынадай тәртіппен орындаймыз.

Сызбада қозғалмайтын O және C өстерді белгілейміз (3.5.1.1–сурет).

Сызбада жетекші буынды кескіндейтін (OA) кесіндісінің ұзындығын 80 мм деп қабылдаймыз. Онда механизмнің сұлба масштабы $\mu_l = l_{OA} / (OA) = 0,001 \text{ м/мм}$. Егер осы буын бірқалыпты айналмалы қозғалыста болатын және толық айналыс жасайтын болса, онда A нүктесі сызатын шеңберді тең 12 бөлікке бөлеміз. Бастапқы буынның

әрбір орнын анықталған нөмір арқылы белгілейміз және осы нөмір ары қарай барлық механизмнің жобасына қатысты болады. Мысалы, «2 – орны үшін механизмнің жобасы».

Қабылданған масштаб бойынша AB , BC , BD , OC кесінділерінің ұзындықтарын есептейміз

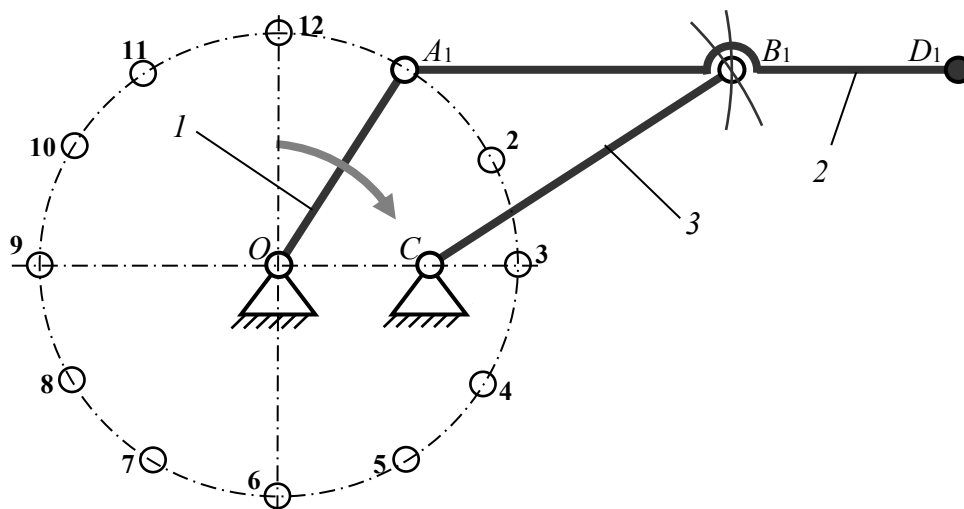
$$(AB) = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0,09}{0,001} = 90 \text{ мм},$$

$$(BC) = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,1}{0,001} = 100 \text{ мм},$$

$$(BD) = \frac{l_{BD}}{\mu_l} = \frac{0,06}{0,001} = 60 \text{ мм},$$

$$(OC) = \frac{l_{OC}}{\mu_l} = \frac{0,05}{0,001} = 50 \text{ мм}.$$

Механизмнің орын жобаларын тұрғызуға арналған



3.5.1.1–сурет

2 және 3 буын құрамында болатын топтың орнын тұрғызамыз. Бастапқы буын орын жобаларын OA_1 , OA_2 , OA_3 т.с.с. тұрғызу орындалғаннан кейін, 2 – буын бойында жататын B нүктесінің сәйкес орындарын анықтаймыз. Бұл үшін циркуль көмегімен BC кесіндісінің ұзындығына тең центрі C нүктесінде болатын шеңбер доғасын және A нүктесінен радиусы AB – ға тең шеңбер доғасын сызамыз. B нүктесінің орны шеңбер доғаларының қиылысу нүктесінде жатады.

D нүктесінің орнын AB түзуінің бойынан анықтаймыз.

2 және 3 буындары арқылы құрылатын топтарының орны тұрғызылды. Бір сызбада жетекші буынның және 2, 3 буындардың тізбектелген қатарын тұрғызамыз. D нүктесінің тізбектелген орындарын қисық сызықпен қосып, D нүктесінің траекториясын аламыз. Тірек буынымен кинематикалық жұп құра алмайтын буын нүктелерінің траекториясын, *бұлғақ қисығы* деп атайды.

Машиналар және механизмдердің жұмысшы мүшелерін пайдалану үшін қазіргі уақытта техникада бұлғақ қисығы кең қолданылады.

Төрт буынды механизмнің жалпы түрінің бұлғақ қисығы алтыншы ретті алгебралық қисық болып табылады. Кривошип - бұлғақ механизмінің жалпы түрінің бұлғақ қисығы төртінші ретті алгебралық қисық болып табылады.

3.5.2 1–түрдегі 2–класс Ассур тобымен құрылатын механизм үшін жылдамдық және үдеу жобаларын тұрғызу

Жылдамдықтар жобасын тұрғызу

Механизмнің жылдамдықтар және үдеулер жобасы оның орны туралы мәселені шешкеннен кейін орындалады, мұнда механизмді құратын жеке Ассур топтары үшін жоба тұрғызу орындалады.

Екі айналшақты топсалы төрт буынды қарастырамыз. Берілгені: $l_{OA} = 0,07 \text{ м}$, $l_{OC} = 0,04 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,08 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,075 \text{ м}$, $l_{BD} = 0,04$, $\varphi_1 = 30^\circ$, OA айналшақтың бұрыштық жылдамдығы тұрақты және $\omega_1 = 15 \text{ с}^{-1}$ (3.5.2.1-сурет).

Бірінші механизм орнының жобасын тұрғызамыз. Ұзындық масштабын $\mu_l = 0,001 \text{ м/мм}$ –ге тең деп қабылдаймыз. Сызбада буындарды бейнелейтін кесінділердің ұзындықтарын есептейміз.

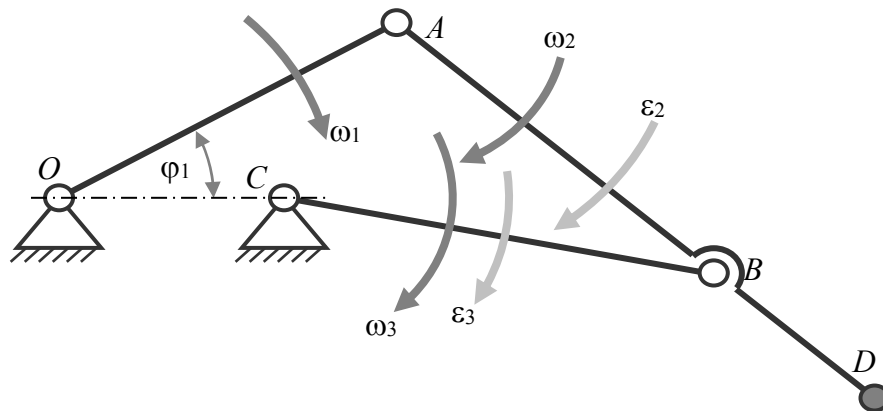
Механизмнің әрбір орны үшін графикалық әдіспен нүктелерінің жылдамдығын анықтаймыз. Бірінші тұрақты ω_1 бұрыштық жылдамдықпен айналатын жетекші буында жататын A нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз. Бұл нүкте жылдамдығының шамасы

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 15 \cdot 0,07 = 1,05 \text{ м/с},$$

және OA буынына перпендикуляр бағытталады. Жылдамдықтар жобасының полюсі деп аталатын кез келген p нүктесінен (pa) кесіндісін өлшеп саламыз. (pa) кесіндісінің ұзындығын (OA) –ға тең деп қабылдаймыз. (pa) = (OA) = 70 мм. Жылдамдықтар масштаб коэффициентін есептейміз

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(pa)} = \omega_1 \cdot \mu_l = 0,015 \text{ м/с}^{-1} / \text{мм.}$$

Механизм орнының жобасы



3.5.2.1– сурет

2 және 3 буындардың тобы үшін жылдамдықтар жобасын тұрғызамыз. Бұл буындар тобында барлық кинематикалық жұп айналмалы. B нүктесінің жылдамдығын екі векторлық теңдеулер арқылы анықтаймыз

$$1) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_{BA} \perp \overline{BA},$$

$$2) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}, \quad \bar{v}_{BC} \perp \overline{BC},$$

мұндағы \bar{v}_A - A нүктесінің жылдамдығы, бізге белгілі; \bar{v}_{BA} - BA буыны A топса өсін айнала қозғалғанда B нүктесінің жылдамдығы, шамасы $v_{BA} = \omega_2 \cdot l_{BA}$ (ω_2 - буын BA -ның бұрыштық жылдамдығы, шамасы белгісіз) және BA түзуіне перпендикуляр бағытталады; \bar{v}_C - 4-тірек нүктесінің жылдамдығы (ол нөлге тең, себебі 4 - буын қозғалмайды); \bar{v}_{BC} - BC буыны C топса өсін айнала қозғалғанда B нүктесінің жылдамдығы, шамасы $v_{BC} = \omega_3 \cdot l_{BC}$ (ω_3 - буын BC -ның бұрыштық жылдамдығы, шамасы белгісіз) және BC түзуіне перпендикуляр бағытталады.

Жылдамдықтар жобасын мынадай ретпен тұрғызамыз. Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз: a нүктесінен \bar{v}_{BA} жылдамдығын кескіндейтін BA буынына перпендикуляр түзу жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз: C нүктесінің жылдамдығы нөлге тең

болғандықтан c нүктесі p полюспен түйіседі, p нүктесінен \bar{v}_{BC} жылдамдығын кескіндейтін BC буынына перпендикуляр түзу жүргіземіз. Осы жүргізілген екі перпендикуляр түзулер b нүктесінде қиылысады. Полюс p мен b – ны қосатын кесінді B нүктесінің жылдамдығын кескіндейді.

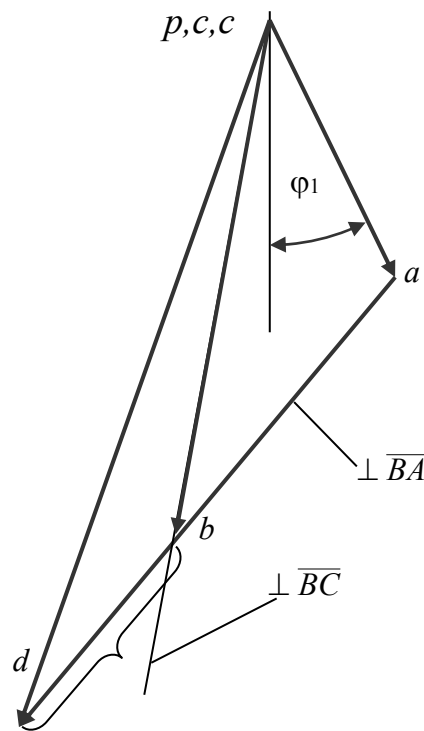
D нүктесінің жылдамдығын ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз: бұл жылдамдық векторының соңы (ab) кесіндісі жалғасында жатуы керек. Мынадай пропорция құрамыз

$$\frac{(ad)}{(ab)} = \frac{(AD)}{(AB)} \Rightarrow (ad) = (ab) \cdot \frac{(AD)}{(AB)} = 85 \cdot \frac{115}{75} \approx 130 \text{ мм.}$$

B нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_B = (pb) \cdot \mu_v = 128 \cdot 0,015 = 1,92 \text{ м/с.}$$

Механизмнің жылдамдықтар жобасы



3.5.2.2–сурет

D нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_D = (pd) \cdot \mu_v = 169 \cdot 0,015 \approx 2,54 \text{ м/с.}$$

AB буынының бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ba) \cdot \mu_v}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(ba) \cdot \omega_1 \cdot \mu_l}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(ba)}{(AB)} \cdot \omega_1 = \frac{85}{75} \cdot 15 = 17 \text{ с}^{-1}.$$

Буын AB – ның бұрыштық жылдамдығы ω_2 – нің бағытын былай анықтаймыз. \bar{v}_{BA} векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2 – буын сағат тілімен айнала қозғалатынын көреміз. 2 –буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

BC буынның бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_3 = \frac{v_{BC}}{l_{BC}} = \frac{(pb) \cdot \mu_v}{(BC) \cdot \mu_l} = \frac{(pb) \cdot \omega_1 \cdot \mu_l}{(BC) \cdot \mu_l} = \frac{(pb)}{(BC)} \cdot \omega_1 = \frac{128}{80} \cdot 15 = 24 \text{ c}^{-1}.$$

Буын BC – ның бұрыштық жылдамдығы ω_3 – тің бағыты ω_2 – нің бағыты анықталған жолмен анықталады.

Үдеулер жобасын тұрғызу

Нүктелер үдеулері үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен анықталады. Бірінші тұрақты ω_1 бұрыштық жылдамдықпен айналатын жетекші буынның бойында жататын A нүктесінің үдеуін анықтаймыз. A нүктесінің толық үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau.$$

$\varepsilon_1 = 0$ болғандықтан жанама құраушы үдеуі $a_A^\tau = 0$. Онда $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ және A нүктесінің үдеуі жеңіл анықталады: $a_A = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$. Сонан соң 2 және 3 буындары үшін үдеулер жобасын тұрғызамыз. Бұл буындардың қозғалысы жазық параллель және айналмалы болғандықтан, теориялық механикасы пәнінен белгілі теореманы пайдаланамыз: *жазық фигураның кез келген нүктесінің үдеуі полюс үдеуі мен осы нүктенің полюске қатысты алынған үдеуінің геометриялық қосындысына тең*. Бұл жобаны мынадай екі векторлық тендеулермен тұрғызамыз

$$1) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad \bar{a}_{BA}^n \parallel \overline{BA}, \quad B \rightarrow A,$$

$$2) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad \bar{a}_{BC}^n \parallel \overline{BC}, \quad B \rightarrow C,$$

мұндағы $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$ және OA түзуіне параллель A нүктесінен O нүктесіне қарай бағытталады.

Айналмалы қозғалыстағы AB буыны B нүктесінің полюс A –ға қатысты нормаль құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l},$$

және AB түзуіне параллель B нүктесінен A нүктесіне қарай бағытталады ($B \rightarrow A$);

айналмалы қозғалыстағы AB буыны B нүктесінің полюс A – ға қатысты жанама құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot l_{AB},$$

(AB буынның бұрыштық үдеуі ε_2 белгісіз) және AB түзуіне перпендикуляр бағытталады;

4–буын қозғалмайтын болғандықтан C нүктесінің үдеуі $\bar{a}_C = 0$;

айналмалы қозғалыстағы BC буыны B нүктесінің C нүктесіне қатысты нормаль құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BC} = \left(\frac{v_{BC}}{l_{BC}} \right)^2 \cdot l_{BC} = \frac{v_{BC}^2}{l_{BC}} = \frac{(pb)^2 \cdot \mu_v^2}{(BC) \cdot \mu_l},$$

және BC түзуіне параллель B нүктесінен C нүктесіне қарай бағытталады ($B \rightarrow C$);

айналмалы қозғалыстағы BC буыны B нүктесінің C нүктесіне қатысты жанама құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BC}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot l_{BC},$$

(BC буынның бұрыштық үдеуі ε_3 белгісіз) және BC түзуіне перпендикуляр бағытталады.

Үдеулер жобасын тұрғызуды төмендегі тәртіп тізбегі бойынша жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз, ол үшін OA түзуіне параллель, жоба полюсі π – ден \bar{a}_A үдеуін кескіндейтін (πa) кесіндісін өлшеп саламыз. Егер (πa) кесіндісінің ұзындығын 70 мм–ге тең болса, онда үдеу масштабы мынадай болады

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot l_{OA}}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(\pi a)} = \omega_1^2 \cdot \mu_l = 15^2 \cdot 0,001 = 0,225 \frac{m/c^{-2}}{mm}.$$

a нүктесінен \bar{a}_{BA}^n үдеуін кескіндейтін ($a n_{BA}$) кесіндіні өлшеп саламыз. ($a n_{BA}$) кесіндісінің ұзындығы мынадай формуламен есептеледі

$$(a n_{BA}) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_2^2 \cdot l_{AB}}{\omega_a} = \frac{\left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB}}{\mu_a} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB} \cdot \mu_a} =$$

$$= \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(ba)^2}{(AB)} = \frac{85^2}{75} \approx 96 \text{ мм.}$$

n_{BA} нүктесі арқылы AB түзуіне перпендикуляр \bar{a}_{BA}^n үдеуінің бағытын жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызуға көшеміз. Бұл үшін жоба полюсі π -ден \bar{a}_C үдеу векторын саламыз, бірақ ол нөлге тең, сондықтан, c нүктесі π нүктесімен түйіседі. π нүктесінен \bar{a}_{BC}^n үдеуін кескіндейтін (πn_{BC}) кесіндісін өлшеп саламыз. (πn_{BC}) кесіндісінің ұзындығы мынадай формуламен есептеледі

$$\begin{aligned} (\pi n_{BC}) &= \frac{a_{BC}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_3^2 \cdot l_{BC}}{\mu_a} = \frac{\left(\frac{v_{BC}}{l_{BC}}\right)^2 \cdot l_{BC}}{\mu_a} = \frac{v_{BC}^2}{l_{BC} \cdot \mu_a} \\ &= \frac{(pb)^2 \cdot \mu_v^2}{(BC) \cdot \omega_l \cdot \omega_a} = \frac{(pb)^2}{(BC)} = \frac{128^2}{80} \approx 205 \text{ мм.} \end{aligned}$$

n_{BC} нүктесі арқылы BC түзуіне перпендикуляр \bar{a}_{BC}^r үдеуінің бағытын жүргіземіз. Осы түзу мен AB -ға перпендикуляр түзудің қиылысқан нүктесі b нүктесін береді. $\bar{\pi b}$ векторы B нүктесінің үдеу векторы болады. a және b нүктелерін қосып \bar{a}_{BA} үдеу векторын аламыз. D нүктесінің үдеуін ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз

$$\frac{(ad)}{(ab)} = \frac{(AD)}{(AB)} \Rightarrow (ad) = (ab) \cdot \frac{(AD)}{(AB)} = 164 \cdot \frac{115}{75} \approx 251 \text{ мм.}$$

d нүктесін жоба полюсі π - мен қосып, D нүктесінің абсолюттік үдеуін кескіндейтін кесіндіні аламыз.

B және D нүктелерінің абсолюттік үдеулері мынадай теңдіктер арқылы анықталады

$$\begin{aligned} a_B &= (\pi b) \cdot \mu_a = 232 \cdot 0,225 \approx 52 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; \\ a_D &= (\pi d) \cdot \mu_a = 320 \cdot 0,225 = 72 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Қозғалмалы буындардың масса центрі үдеулерін ұқсастық ережесі бойынша анықтаймыз. S_1 , S_2 және S_3 нүктелері сәйкес буындардың ортасында орналасқан. Жобада бұл үдеулер мынадай векторлар: $\bar{\pi s}_1, \bar{\pi s}_2, \bar{\pi s}_3$. Осы масса центрі үдеулерінің абсолюттік шамалары былай анықталады

$$a_{S1} = (\pi s_1) \cdot \mu_a = 35 \cdot 0,225 \approx 7,9 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

$$a_{S2} = (\pi s_2) \cdot \mu_a = 194 \cdot 0,225 \approx 44 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

$$a_{S3} = (\pi s_3) \cdot \mu_a = 116 \cdot 0,225 \approx 26 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

AB буынының бұрыштық үдеу шамасы былай анықталады

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{AB}} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \mu_a}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b)}{(AB)} \cdot \omega_1^2 = \frac{133}{75} \cdot 15^2 = 399 \text{ с}^{-2}.$$

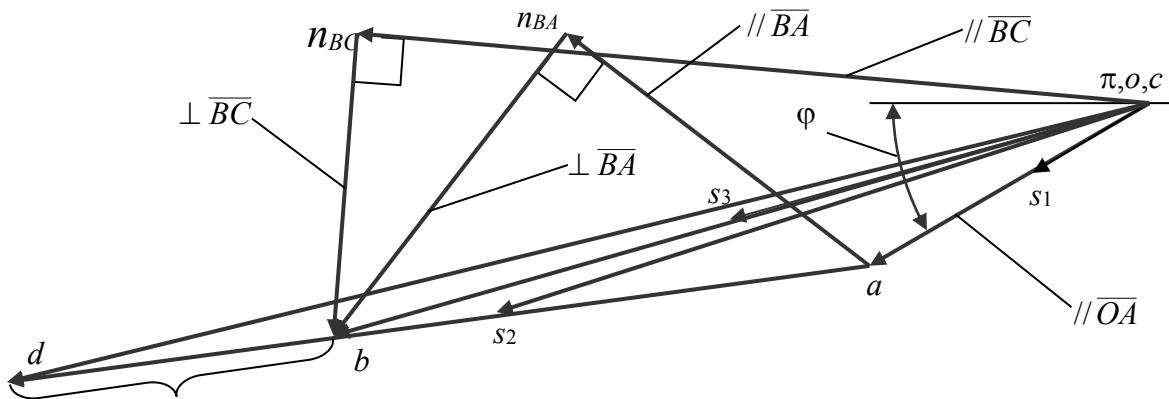
Буын AB –ның бұрыштық үдеуі ε_2 –нің бағытын былай анықтаймыз. \vec{a}_{BA}^r векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2–буын сағат тілімен айнала қозғалатынын көреміз. 2–буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

BC буынының бұрыштық үдеу шамасы былай анықталады

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^r}{l_{BC}} = \frac{(n_{BC}b) \cdot \mu_a}{(BC) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BC}b) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(BC) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BC}b)}{(BC)} \cdot \omega_1^2 = 312,2 \text{ с}^{-2}.$$

Буын BC –ның бұрыштық үдеуі ε_3 –тің бағыты ε_2 –нің бағыты анықталған жолмен анықталады. Механизмнің үдеулер жобасында 3.5.2.3–суретте көрсетілген.

Механизмнің үдеулер жобасы



3.5.2.3-сурет

3.5.3 2 және 3–түрдегі 2–класс Ассур тобымен құрылатын механизм үшін жылдамдық және үдеу жобаларын тұрғызу. Кориолис үдеуі.

Жылдамдықтар жобасын тұрғызу

Кривошип – бұлғақ механизмінің берілген орны үшін (механизмнің орын жобасы 3.5.2.2–суретте көрсетілген) графикалық

тәсілмен нүктелерінің жылдамдығы анықталады. Бірінші тұрақты бұрыштық ω_1 жылдамдықпен айнала қозғалатын жетекші буында жататын A нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз. Бұл нүктенің жылдамдығының шамасы

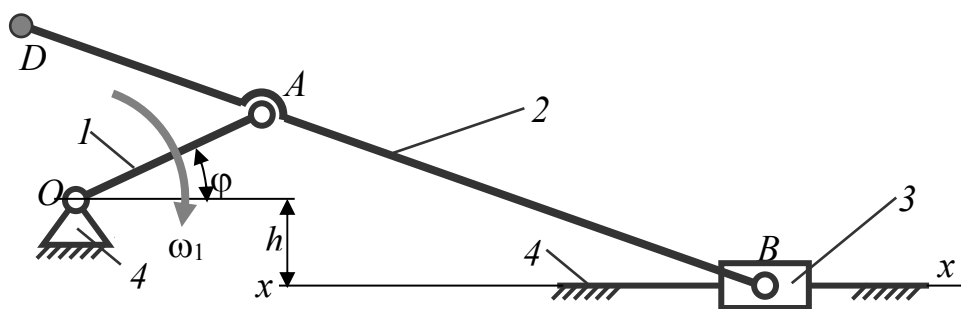
$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA},$$

және OA буынына перпендикуляр айналыс бағытымен бағытталады. Жоба полюсі деп аталатын кез келген p нүктесінен (pa) кесіндісін өлшеп саламыз. (pa) кесіндісінің ұзындығын (OA) -ға тең деп қабылдаймыз. $(pa) = (OA)$ [мм]. Жылдамдықтар масштабы коэффициентін есептейміз

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(pa)} = \omega_1 \cdot \mu_l \quad [m/c / mm].$$

2 және 3 буынды топ үшін жылдамдықтар жобасын тұрғызамыз. Бұл топ 2-түріне жатады. Бұл топ құрамында бір ілгерілемелі жұп B_3 және екі тізбекті орналасқан айналмалы B_2 және A жұптары болады. 2-буын негізгі механизм құрамында болатын 1-буынымен айналмалы A жұбын құрады, ал 3-буын негізгі механизм құрамында болатын 4-буынымен ілгерілемелі B_3 жұбын құрады. 3-буын 4-буында жататын $x - x$ бағыттаушы өсі бойымен қозғалады. B нүктесінің жылдамдығын анықтау үшін теориялық механика пәнінде оқып үйренген жылдам-

Дезаксиалды кривошип – бұлғақ механизмі



2.5.3.1– сурет

дықтарды қосу теоремасын пайдаланамыз: *нүктенің абсолют жылдамдығы тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың векторлық қосындысына тең болады.* B нүктесінің жылдамдығын төмендегі екі векторлық теңдеулермен анықтаймыз

$$1) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_{BA} \perp \overline{BA};$$

$$2) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{B_4} + \bar{v}_{BB_4}, \quad \bar{v}_{BB_4} // \overline{xx},$$

мұндағы \bar{v}_A - A нүктесінің жылдамдығы, бізге белгілі, \bar{v}_{BA} - BA буыны топса A -ның өсін айнала қозғалғанда B нүктесінің жылдамдығы, шамасы $\bar{v}_{BA} = \omega_2 \cdot l_{BA}$ және BA түзуіне перпендикуляр бағытталған; \bar{v}_{B_4} - B нүктесімен сәйкес келетін 4-тіректің B_4 нүктесінің жылдамдығы (ол нөлге тең, себебі 4-буын қозғалмайды); \bar{v}_{BB_4} - B_4 нүктесіне қатысты B нүктесінің салыстырмалы жылдамдығы (оның шамасы белгісіз, ал ол xx өсі бойымен бағытталады).

Жылдамдықтар жобасын мынадай ретпен тұрғызамыз. Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз: a нүктесінен BA түзуіне перпендикуляр түзу жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз: p нүктесінен \bar{v}_{B_4} жылдамдығын кескіндейтін кесіндіні салу керек болатын, ол нөлге тең, сондықтан, b_4 нүктесін жылдамдықтар жобасы полюсі p -мен түйістіреміз, p нүктесінен BA түзуіне перпендикуляр түзуімен қиылысатын xx өсіне параллель түзу жүргіземіз. Қиылысу нүктесі b нүкте B -ның жылдамдық векторының соңы болады. o нүктесін полюске орналастырамыз (– сурет).

D нүктесінің жылдамдығын ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз, бұл вектордың соңы (ab) кесіндісінің соңында жатуы керек. Төмендегі қатынасты құрамыз

$$\frac{(ad)}{(ab)} = \frac{(AD)}{(AB)} \Rightarrow (ad) = (ab) \cdot \frac{(AD)}{(AB)} \quad [мм].$$

B нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз: $v_B = (pb) \cdot \mu_v \quad [м/с]$.

D нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз: $v_D = (pd) \cdot \mu_v \quad [м/с]$.

AB буынның бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ba) \cdot \mu_v}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(ba) \cdot \omega_1 \cdot \mu_l}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(ba)}{(AB)} \cdot \omega_1 \quad [с^{-1}].$$

Буын AB – ның бұрыштық жылдамдығы ω_2 -нің бағытын былай анықтаймыз. \bar{v}_{BA} векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2-буын сағат тіліне қарсы айнала қозғалатынын көреміз. 2-буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

Үдеулер жобасын тұрғызу

Нүктелердің үдеулері үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен табылады. 2 және 3 буындардың тобы үшін үдеулер жобасын тұрғызамыз. Мұнда 3–буын бағыттаушы 4–буынға қатысты ілгерілемелі қозғалады. Теориялық механика пәнінде оқып үйренген үдеулерді қосу теоремасын пайдаланамыз (Кориолис теоремасы): *нүктенің абсолют үдеуі тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің геометриялық қосындысына тең болады*. Бұл жобаны мынадай екі векторлық теңдеулермен тұрғызамыз

$$1) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^r, \quad \bar{a}_{BA}^n // \overline{BA}, B \rightarrow A,$$

$$2) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}_{BB_4}^{cor} + \bar{a}_{BB_4}^r, \quad \bar{a}_{BB_4}^r // \overline{xx},$$

мұндағы $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}$ және OA түзуіне параллель A нүктесінен O нүктесіне қарай бағытталады.

Айналмалы қозғалыстағы AB буыны B нүктесінің полюс A –ға қатысты нормаль құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l},$$

және AB түзуіне параллель B нүктесінен A нүктесіне қарай бағытталады ($B \rightarrow A$);

Айналмалы қозғалыстағы AB буыны B нүктесінің полюс A –ға қатысты жанама құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$\bar{a}_{BA}^r = \varepsilon_2 \cdot l_{AB},$$

(AB буынның бұрыштық үдеуі ε_2 белгісіз) және AB түзуіне перпендикуляр бағытталады;

\bar{a}_{B_4} - B_4 нүктесінің үдеуі, нөлге тең, себебі 4–буын қозғалмайды;

$\bar{a}_{BB_4}^{cor}$ - B нүктесінің B_4 нүктесіне қатысты Кориолис үдеуі, нөлге тең, себебі бағыттаушы (4–буын) айналмайды;

$\bar{a}_{BB_4}^r$ - B нүктесінің B_4 нүктесіне қатысты салыстырмалы үдеуі, ол xx өсіне параллель бағытталады;

Үдеулер жобасын тұрғызуды төмендегі тәртіп тізбегі бойынша жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз, ол үшін OA түзуіне параллель, жоба полюсі π –ден \bar{a}_A үдеуін кескіндейтін (πa) кесіндісін өлшеп саламыз. Егер (πa)

кесіндісінің ұзындығын OA -ға тең болса, онда үдеу масштабы мынадай болады

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot l_{OA}}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(\pi a)} = \omega_1^2 \cdot \mu_l \left[\frac{m/c^2}{mm} \right].$$

a нүктесінен \bar{a}_{BA}^n үдеуін кескіндейтін (an_{BA}) кесіндіні өлшеп саламыз. (an_{BA}) кесіндісінің ұзындығы былай есептеледі

$$(an_{BA}) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_2^2 \cdot l_{AB}}{\mu_a} = \frac{\left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB}}{\mu_a} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB} \cdot \mu_a} = \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(ba)^2}{(AB)}.$$

n_{BA} нүктесі арқылы BA түзуіне перпендикуляр \bar{a}_{BA}^r үдеу векторының бағытын жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызуға көшеміз. Бұл үшін жоба полюсі π - ден \bar{a}_{B_4} үдеу векторын саламыз, бірақ ол нөлге тең, сондықтан, b_4 нүктесі π нүктесімен түйіседі. Осы нүктемен $\bar{a}_{BB_4}^{cor}$ үдеу векторының соңы k нүктесі сәйкес келеді ($\bar{a}_{BB_4}^{cor}$ үдеуі нөлге тең). k нүктесінен xx өсіне параллель түзу жүргіземіз. AB түзуіне перпендикуляр түзуімен қиылысу нүктесі b нүкте B - ның үдеу векторының соңы болады. b және a нүктелерін қосып \bar{a}_{BA} үдеу векторын аламыз. O нүктесін π нүктесімен беттестіреміз. Осымен үдеулер жобасын тұрғызу аяқталады (3.5.3.2–сурет). D нүктесінің үдеу векторының соңын ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз

$$\frac{(bd)}{(ab)} = \frac{(BD)}{(AB)} \Rightarrow (bd) = (ab) \cdot \frac{(BD)}{(AB)} \cdot [mm]$$

d нүктесін полюс π - мен қосып D нүктесінің абсолюттік үдеуін кескіндейтін (πd) кесіндісін аламыз.

B және D нүктелерінің абсолюттік үдеулері төмендегі теңдіктер арқылы анықталады

$$a_B = (\pi b) \cdot \mu_a \ [m \cdot c^{-2}]; \quad a_D = (\pi d) \cdot \mu_a \ [m \cdot c^{-2}].$$

AB буынның бұрыштық үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{AB}} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \mu_a}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b)}{(AB)} \cdot \omega_1^2 \ [c^{-2}].$$

Буын AB -ның бұрыштық үдеуі ε_2 -нің бағытын былай анықтаймыз. \bar{a}_{BA}^r векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2–буын сағат тіліне қарсы айнала

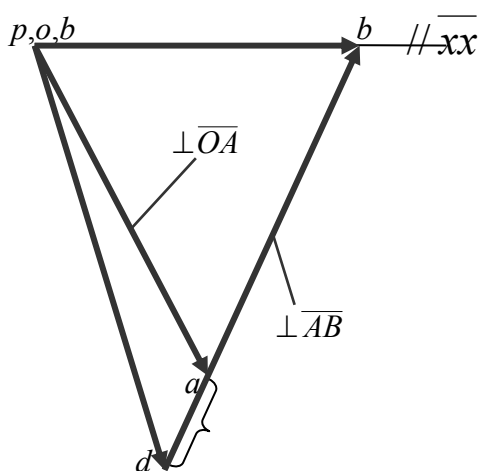
қозғалатынын көреміз. 2-буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

3-түрдегі 2-класты топ құрамында болатын механизмді қарастырамыз. Жалғасқан топта ортаңғы кинематикалық жұп – ілгерілемелі, қалғандары – айналмалы (3.5.3.4-сурет). Берілгені:

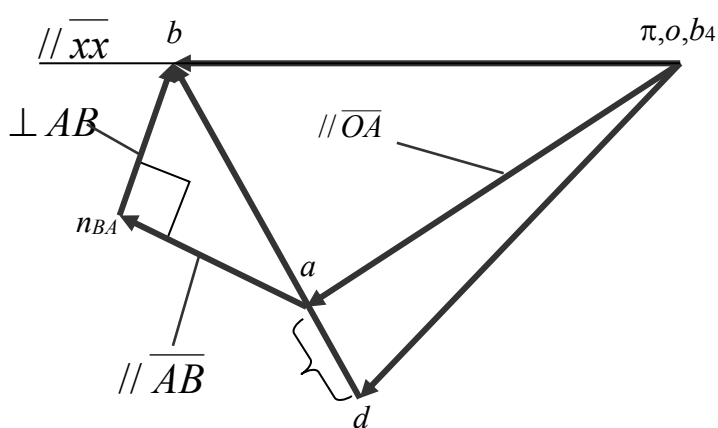
$$l_{OA} = 0,05 \text{ м}, l_{OC} = 0,12 \text{ м}, l_{BC} = 0,18 \text{ м}, \omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}, \varphi_1 = 30^\circ.$$

Суреттегі буындардың ұзындықтарын миллиметр бірлігіне ауыстырып механизмнің орын жобасын тұрғызамыз. Жылдамдықтар жобасын тұрғызамыз. A нүктесінің \vec{v}_A жылдамдығы белгілі. 2 және 3 буындардың тобы үшін жылдамдықтар жобасын төмендегі екі векторлық теңдеулер арқылы тұрғызамыз

Механизмнің жылдамдықтар жобасы Механизмнің үдеулер жобасы



3.5.3.2-сурет

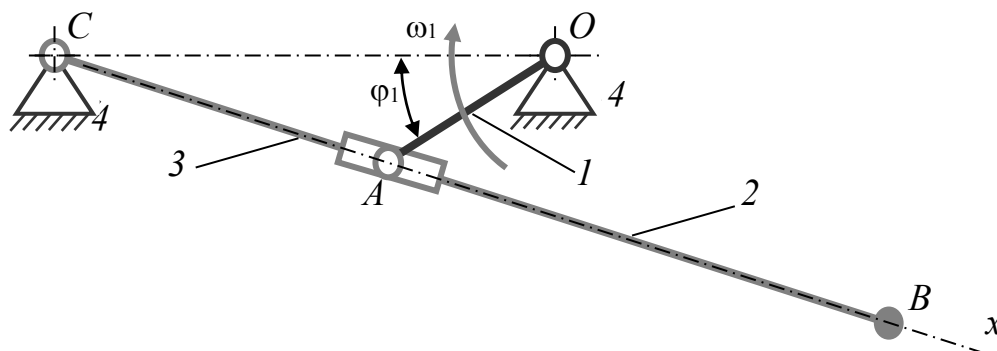


3.5.3.3-сурет

$$1) \quad \vec{v}_{A_3} = \vec{v}_A + \vec{v}_{A_3A}, \quad \vec{v}_{A_3A} \parallel \overline{Cx},$$

$$2) \quad \vec{v}_{A_3} = \vec{v}_C + \vec{v}_{A_3C}, \quad \vec{v}_{A_3C} \perp \overline{Cx},$$

Үшінші түрдегі топ құрамында болатын Витвора механизмі



3.5.3.4-сурет

мұндағы 3–буынның A_3 нүктесінің жылдамдығы \vec{v}_{A_3} A нүктесінің астында жатады; A нүктесінің жылдамдығы $v_A = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ және $\perp \overline{OA}$ ω_1 бұрыштық жылдамдық бағытымен анықталады; A_3 нүктесінің A нүктесіне қатысты салыстырмалы жылдамдығы Cx түзуіне параллель бағытталады; C нүктесінің жылдамдығы $\vec{v}_C = 0$; 3–буынның C нүктесін айнала қозғалғанда A нүктесінің жылдамдығы $v_{A_3C} = \omega_3 \cdot l_{A_3C}$ және $\perp \overline{Cx}$ бағытталады (шамасы белгісіз).

Бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз. Полюс p – дан (3.5.3.5–сурет) A нүктесінің жылдамдығын кескіндейтін (pa) кесіндісін өлшеп саламыз. Бұл кесіндінің ұзындығын $(pa) = (OA) = 50 \text{ мм}$ деп қабылдаймыз. a нүктесі арқылы Cx түзуіне параллель түзу жүргіземіз.

Жоғарыда көрсетілген екінші теңдеудің шешімін тұрғызамыз. C нүктесінің жылдамдығын өлшеп салу керек, ол нөлге тең, сондықтан, c нүктесін p полюсіне орналастырамыз және p нүктесінен $\perp \overline{Cx}$ түзу жүргіземіз. Оның алдында жүргізілген Cx түзуіне параллель түзуімен қиылысатын нүктесі a_3 \vec{v}_{A_3} жылдамдық векторының соңын көрсетеді. B нүктесінің жылдамдық вектор соңы b нүктесін ұқсастықтар ережесі қатынасымен анықтаймыз

$$\frac{(cb)}{(ca_3)} = \frac{(CB)}{(CA_3)} \Rightarrow (cb) = (ca_3) \cdot \frac{(CB)}{(CA_3)} = 33 \cdot \frac{180}{81} \approx 73 \text{ мм}.$$

Осымен Витвора механизміне жылдамдықтар жобасын тұрғызу аяқталады.

Жылдамдықтар жобасының масштабы

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot (OA) \cdot \omega_l}{(pa)} = \omega_1 \cdot \mu_l = 10 \cdot 0,001 = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

2 және 3 топтардың үдеулер жобасын тұрғызу

Бұл жобаны мынадай екі векторлық теңдеулермен тұрғызамыз

$$1) \quad \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_A + \vec{a}_{A_3A}^{cor} + \vec{a}_{A_3A}^r, \quad \vec{a}_{A_3A}^r // \overline{Cx},$$

$$2) \quad \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_C + \vec{a}_{A_3C}^n + \vec{a}_{A_3C}^r, \quad \vec{a}_{A_3C}^n \perp \overline{Cx}, \quad A_3 \rightarrow C,$$

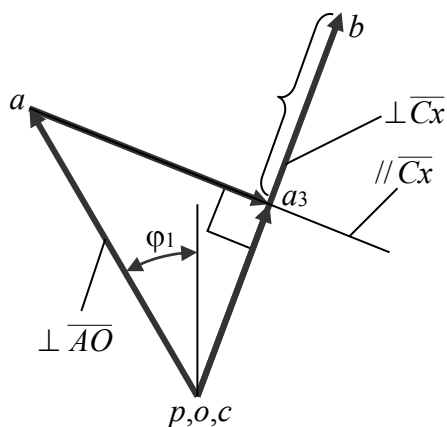
мұндағы \vec{a}_{A_3} 1–буынның A нүктесімен сәйкес келетін 3 – буынның A_3 нүктесінің үдеуі; $a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = 10^2 \cdot 0,05 = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ және OA түзуіне параллель A нүктесінен O нүктесіне қарай

бағытталады; $a_{A_3A}^{cor}$ – A_3 нүктесінің 2-буынға қатысты *Кориолиса* үдеуі, шамасы

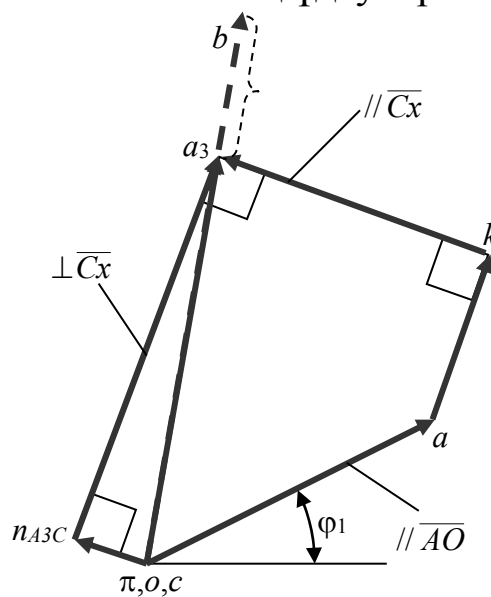
$$a_{A_3A}^{cor} = 2 \omega_2 \cdot v_{A_3A} = 2 \cdot \frac{v_{A_3C}}{l_{AC}} \cdot v_{A_3A}.$$

($\omega_2 = \omega_3$ и $\omega_3 = v_{A_3C}/l_{AC}$ болғандықтан) және бағыты \bar{v}_{A_3A} жылдамдық векторының бағытын, тасымал қозғалыс ω_2 бұрыштық жылдамдық бағытымен 90° бұрышқа бұрғандағы бағытты қабылдайды (2 – буынның қозғалысы); $\bar{a}_{A_3A}^r$ – A_3 нүктесінің A нүктесіне қатысты Sx түзуіне параллель бағытталған салыстырмалы үдеу; \bar{a}_C – C нүктесінің үдеуі (ол нөлге тең); $\bar{a}_{A_3C}^n$ – 3-буын C нүктесіне қатысты айнала қозғалғанда A_3 нүктесінің нормаль құраушы үдеуі, шамасы $a_{A_3C}^n = \frac{v_{A_3C}^2}{l_{A_3C}}$,

Механизмнің жылдамдықтар жобасы Механизмнің үдеулер жобасы



3.5.3.5-сурет



3.5.3.6-сурет

және A_3 нүктесінен C нүктесіне Sx түзуіне параллель бағытталған; $\bar{a}_{A_3C}^r$ – 3-буынның A_3 нүктесінің жанама құраушы үдеуі, шамасы $\bar{a}_{A_3C}^r = \varepsilon_3 l_{A_3C}$ (бізге белгісіз) және $\perp \overline{Cx}$ бағытталған.

Бірінші векторлы теңдеудің шешімін тұрғызамыз. Жобада \bar{a}_A үдеуін кескіндейтін кесіндіні $(\pi a) = (OA) = 50$ мм қабылдаймыз.

Үдеулер жобасында масштаб мынадай теңдік арқылы анықталады

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot l_{OA}}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(\pi a)} = \omega_1^2 \cdot \mu_l = 10^2 \cdot 0,001 = 0,1 \frac{m}{c^2}.$$

(π) полюсінен қабылданған (πa) кесіндісін өлшеп саламыз, оған (ak) кориолис үдеу векторын кескіндейтін кесіндіні қосамыз. Оның ұзындығын мынадай формуламен анықтаймыз

$$(ak) = \frac{a_{A_3A}^{Cor}}{\mu_a} = \frac{2v_{A_3C} \cdot v_{A_3A}}{l_{A_3C} \cdot \mu_a} = \frac{2(a_3c) \cdot (a_3a) \cdot \mu_v^2}{(A_3C) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{2 \cdot 32 \cdot 37}{81} \approx 29 \text{ мм},$$

(a_3c) = 32мм және (a_3a) = 37мм кесінділері жылдамдықтар жобасынан, ал (A_3C) = 81мм кесіндісі орын жобасынан алынған. k нүктесі арқылы Cx түзуіне параллель түзу жүргіземіз.

Екінші теңдеудің шешімін тұрғызуға көшеміз. $\bar{a}_C = 0$ болғандықтан c нүктесін π нүктесімен түйістіреміз, $\bar{a}_{A_3C}^n$ нормаль құраушы үдеуін кескіндейтін (πn_{A_3C}) кесіндіні өлшеп саламыз, оның ұзындығы

$$(\pi n_{A_3C}) = \frac{v_{A_3C}^2}{l_{A_3C} \cdot \mu_a} = \frac{(pa_3)^2 \cdot \mu_v^2}{(A_3C) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(pa_3)^2}{(A_3C)} = \frac{32^2}{81} \approx 13 \text{ мм},$$

ары қарай n_{A_3C} нүктесінен $\perp \bar{Cx}$ түзу жүргіземіз. Осы түзу k нүктесінен Cx түзуіне параллель жүргізілген түзуімен қиылысады. Қиылысу нүктесі \bar{a}_3 үдеу векторы \bar{a}_{A_3} -тің соңы болып табылады. B топса центрінің үдеу векторының соңын (b нүктесін) ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз

$$(\pi b) = (\pi a_3) \cdot \frac{(CB)}{(CA_3)} = 67 \cdot \frac{180}{81} \approx 149 \text{ мм}$$

Осымен Витворта механизмінің үдеулер жобасын тұрғызу аяқталды (3.5.3.6– сурет).

Кориолис үдеуін анықтау

Нүктенің абсолют үдеуі тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің геометриялық қосындысына тең болады: $\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_{cor}$. Кориолис үдеу векторы мынадай векторлық формуламен анықталады: $\bar{a}_{Cor} = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$. Бұл векторлық көбейтінді. Кориолис үдеу векторының шамасы мынадай формуламен анықталады

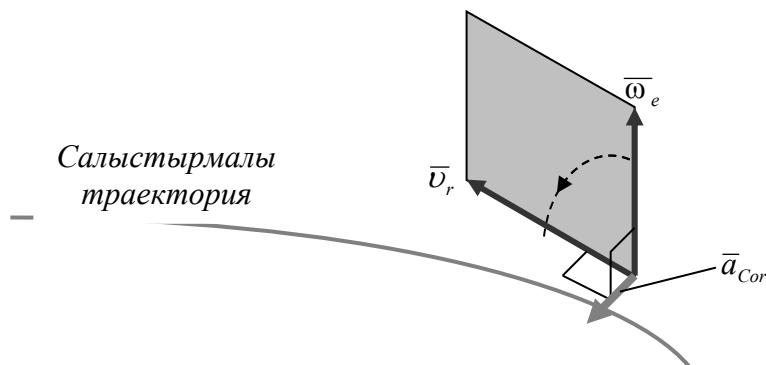
$a_{\ddot{r}} = 2\omega v_r \sin \alpha$, α - $\bar{\omega}_e$ және \bar{v}_r векторларының арасындағы бұрыш.

Кориолис үдеу векторының бағытын анықтау үшін, векторлық алгебра ережесіне жүгіну қажет (3.5.3.7-сурет).

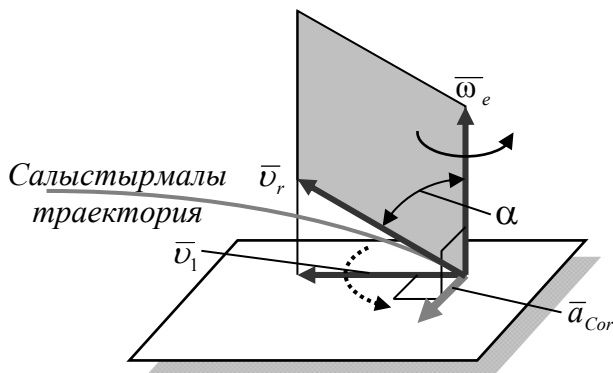
\bar{a}_{Cor} векторы соңынан қарағанда $\bar{\omega}_e$ векторын \bar{v}_r векторы бағытына қысқа айналдыру сағат тіліне қарама қарсы айналдыру бағытымен көрінетін, $\bar{\omega}_e$ және \bar{v}_r векторлары анықтайтын жазықтыққа перпендикуляр бағытталады.

3.5.3.8-суретте \bar{a}_{cor} бағытын анықтаудың басқа тәсілі көрсетілген. Мұнда $v_1 = v_r \cdot \sin \alpha$ бұрыштық жылдамдық $\bar{\omega}_e$ - ге перпендикуляр жазықтықтағы \bar{v}_r векторының проекциясы болып табылады. Осы проекция векторын $\bar{\omega}_e$ бағытымен 90° бұрышқа бұрамыз және \bar{a}_{cor} векторының бағытын анықтаймыз.

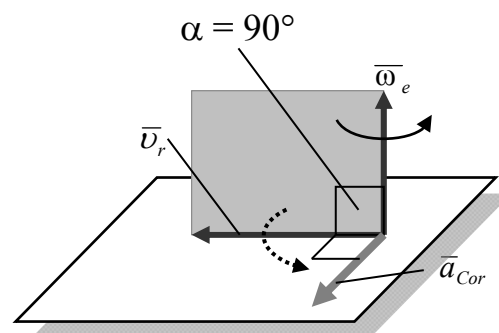
Кориолис үдеу векторының бағытын анықтауға векторлық көбейтінді ережесі



3.5.3.7-сурет



3.5.3.8- сурет



3.5.3.9-сурет

Егер $\bar{\omega}_e \perp \bar{v}_r$ болса, онда \bar{v}_r векторын тасымал айналыс бағытымен 90° бұрышқа бұру керек (3.5.3.9–сурет). Бұл жағдайда Кориолис үдеу векторының шамасын анықтау жеңіл: $a_{Cor} = 2\omega_e \cdot v_r$.

3.6 Графикалық тәсілмен иін тіректі механизмді күштік талдау

3.6.1 Механизм буындарының инерция күштерін анықтау.

Кинематикалық тізбектердің статикалық анықталуы

Мәселе және тәсілдер

Кинематикалық жұптардың элементтерін және буындарды беріктік шартына есептеу және олардың құрылымдық өлшемдерін анықтау үшін механизмнің қозғалысы кезінде оларға әсер ететін күштерді алдын - ала анықтайды.

Ереже бойынша, жетектегі буынға түсірілген күш, пайдалы кедергі күші берілді деп есептеледі. Механизмдердің кейбір буындары айнымалы қозғалыста және үдулерінің шамасы, бағыты айнымалы болады. Сондықтан, кинематикалық жұпта пайда болатын реакция күштері механизм буындарына түсірілген тек сыртқы күшке ғана емес, буындардың айнымалы қозғалысы кезінде пайда болатын қосымша динамикалық қысым күштеріне байланысты болады. Динамикалық қысым күштерінің шамасы және бағыты буындарының инерция күшіне тәуелді.

Сонымен, егер механизм буындарына, сыртқы күштерімен бірге оның буындарының инерция күшін қойса, онда механизмді тыныштықта болады деп қарастыруға болады. Бұл жағдайда кинематикалық жұп реакция күштерін анықтау үшін статика теңдеулерін пайдалануға болады. осы теңдеулерді шеше отырып қозғалыстағы механизмнің кинематикалық жұп қысым күштерін анықтаймыз.

Тепе – теңдік теңдеулер құрамына, механизмнің қозғалысы кезінде пайда болатын буындарының инерция күштері кіретін болатындықтан, мұндай есептеу тәсілі *кинетостатикалық* деп аталады.

Есептеу қысқа болу үшін кинематикалық жұп элементтерінің арасындағы үйкеліс күші есепке алынбайды. Бірінші кинематикалық жұп қысым күштерін анықтайды. Сонан соң, үйкеліс коэффициентін қабылдап, механизмдердің кинематикалық жұптары бойында пайда болатын үйкеліс күшін анықтайды. Кинетостатикалық есептеу қорытындысында механизмнің буындарына әсер ететін пайдалы

кедергі және буындардың инерция күштері әсерінен бастапқы буынның реакция күшін анықтауға болады. Бұл күштің кривошиптің айналу өсіне қатысты моментіне тең момент M_k , қозғаушы моментке тең.

Буындардың инерция күштері

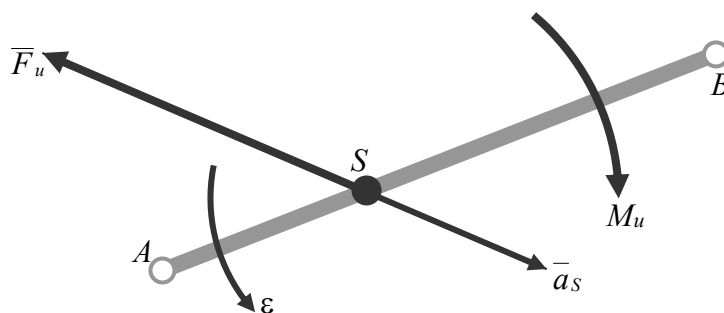
Буынның материялық нүктелерінің инерция күштері бір нүктеге келтіріледі және олар негізгі вектор және негізгі момент деп аталады.

Буынның *инерция күші* деп аталатын инерция күшінің негізгі векторы мынадай формуламен анықталады

$$\bar{F}_u = -m\bar{a}_S, \quad (3.6.1.1)$$

мұндағы m [кг] – буын массасы, \bar{a}_S [м·с⁻²] – буынның масса S центрінің үдеуі. Инерция \bar{F}_u күшінің бағыты \bar{a}_S векторының бағытына қарама - қарсы бағытталады. Оның өлшем бірлігі [кг·м·с⁻²], яғни ол ньютонмен өлшенеді [Н].

Буынның инерция күші



3.6.1–сурет

Жазық параллель қозғалыстағы және оның қозғалыс жазықтығына параллель симметриялы жазықтығы бар буынды қарастырамыз. Инерция күштерінің келтіру центрі ретінде оның масса центрі алынады (3.6.1–сурет). Онда қос күш инерция момент шамасына тең инерция күштерінің негізгі моментінің өрнегі мынадай формуламен анықталады

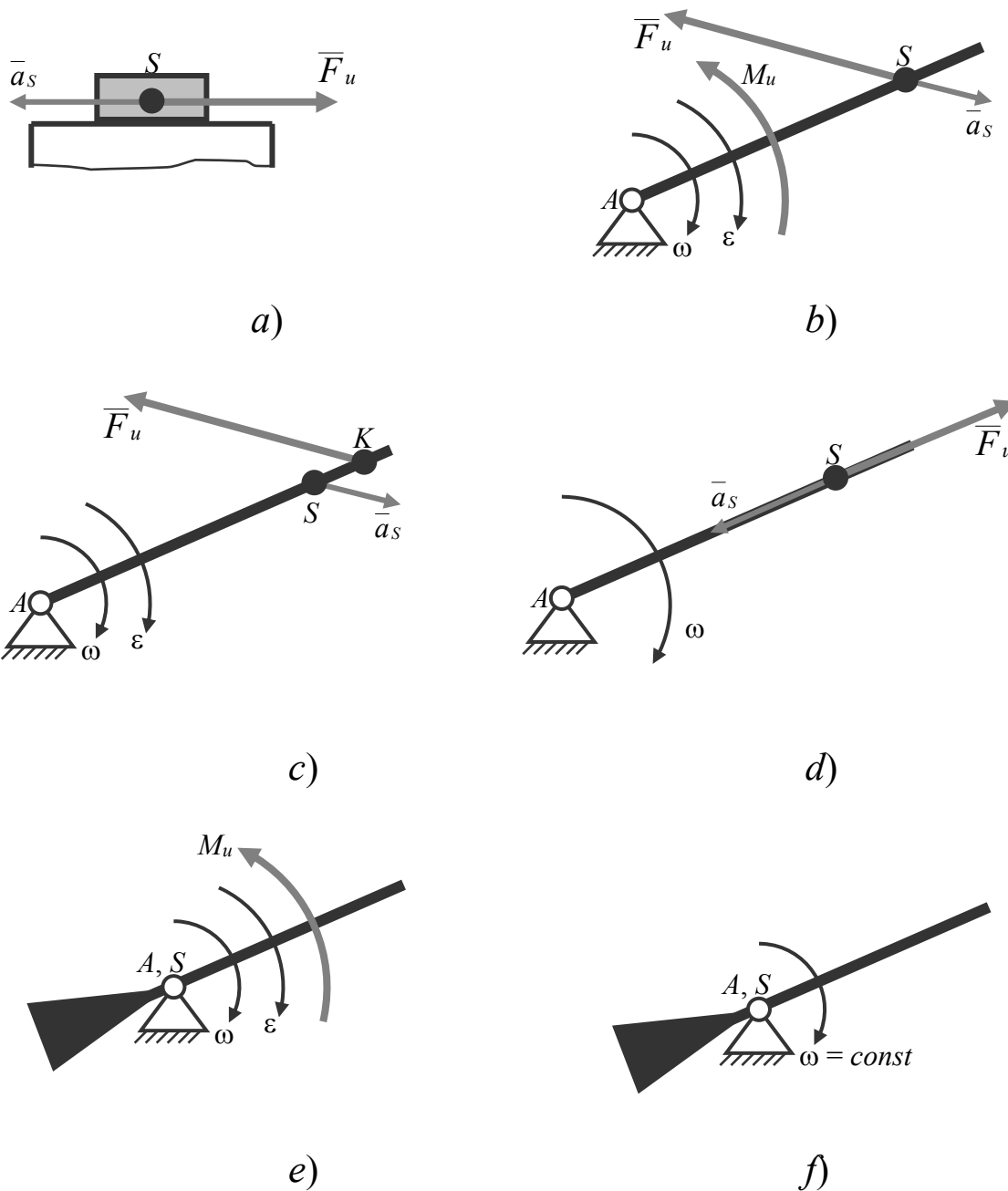
$$M_u = -I_S \epsilon, \quad (3.6.1.2)$$

мұндағы I_S [кг·м²] - буынның центрлік инерция моменті, ϵ [с⁻²] – буынның бұрыштық жылдамдығы.

Инерция моментінің өлшем бірлігі $[кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}] = [Н \cdot м]$. Әсер етуші жазықтығы буынның қозғалыс жазықтығына параллель, буынның бұрыштық үдеуі бағытына қарама – қарсы бағытталады.

Сонымен, жалпы жағдайда буынның инерция күштері S нүктесіне түсірілген бір \vec{F}_u инерция күшіне және бір инерция күшінің моментіне келтіріледі.

Буынның инерция күштерінің жеке жағдайлары



3.6.2–сурет

Жеке жағдайлар (3.6.2–сурет).

Буынның ілгерілемелі қозғалысы (3.6.2,а–сурет). Инерция күштері бір инерция \bar{F}_u күшіне келтіріледі және (3.6.1.1) формуламен анықталады.

Буынның айнымалы айналмалы қозғалысы (3.6.2,б–сурет). Инерция күштері \bar{F}_u күшіне және M_u инерция күшінің моментіне келтіріледі, (3.6.1.1) және (3.6.1.2) формулаларымен анықталады. Бұл жағдайда буынның масса центрінің толық үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_s = \sqrt{(a_s^n)^2 + (a_s^\tau)^2} = l_{AS} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (3.6.1.3)$$

мұндағы a_s^n және a_s^τ буынның масса центрінің нормаль және жанама құраушы үдеуі, ω и ε – буынның бұрыштық жылдамдығы және бұрыштық үдеуі, l_{AS} – S масса центрінен буынның A айналу өсіне дейінгі ара қашықтық.

Күш \bar{F}_u -ді және M_u -ді бір \bar{F}_u күшіне келтіруге болады. Бұл үшін \bar{F}_u күшін оның бағытын сақтай отырып, буынның тербеліс центрі K нүктесіне қоямыз (3.6.2,с–сурет). Айналу өсі A -дан тербеліс центрі K -ға дейінгі ара – қашықтық мынадай теңдік арқылы анықталады

$$l_{AK} = l_{AS} + \frac{I_S}{m \cdot l_{AS}}, \quad (3.6.1.4)$$

Буынның бірқалыпты айналмалы қозғалысы (3.6.2,d-сурет). Инерция күштері бір \bar{F}_u күшіне келтіріледі және AS түзуі бойымен буынның масса центрінің нормаль үдеу векторы бағытына қарсы бағытталады, шамасы

$$a_s^n = \omega^2 \cdot l_{AS}, \quad (3.6.1.5)$$

және центріне тартқыш инерция күші мынадай формуламен анықталады

$$F_u = -m \cdot a_s = -m \cdot a_s^n = -m \cdot \omega^2 \cdot l_{AS}, \quad (3.6.1.6)$$

Көбейтінді $m l_{AS}$ теңгерілмегендік деп аталады және өлшем бірлігі $[кг \cdot м]$.

Буынның масса центрі S оның айналу центрі A -мен беттескен жағдайдағы айнымалы айналмалы қозғалысы (3.6.2,e–сурет). Буынның инерция күштері (3.6.1.2) формуламен анықталатын M_u инерция моментіне келтіріледі.

Буынның масса центрі S оның айналу центрі A -мен беттескен жағдайдағы бірқалыпты айналмалы қозғалысы (3.6.2, f -сурет).

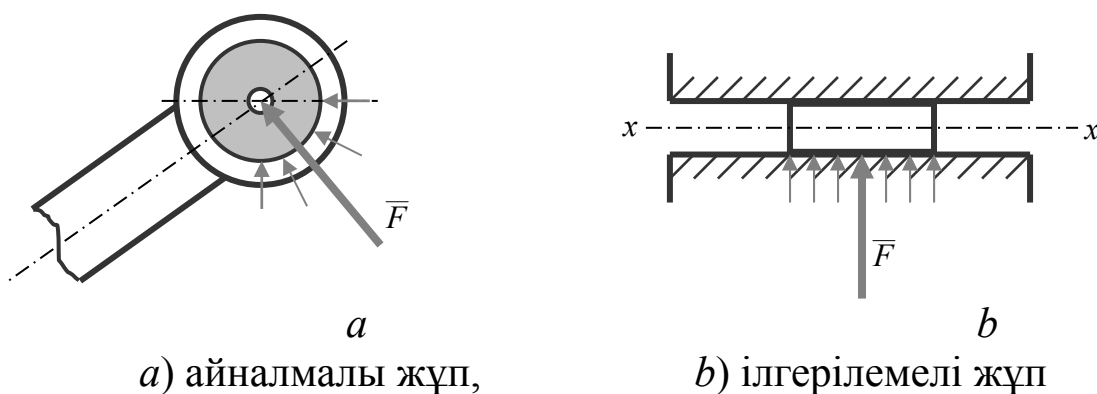
Бұл жағдайда $l_{AS} = 0$ және (3.6.1.3) формула бойынша $a_S = 0$, яғни $\bar{F}_u = 0$, және $\varepsilon = 0$ болғандықтан, $M_u = 0$. Инерция күші және инерция моменті нөлге болса, онда ол теңгерілген деп аталады.

Қандай да бір механизмнің берілген орнында барлық буындарының инерция күштерін анықтау үшін, жылдамдықтар және үдеулер жобасын тұрғызу қажет.

Құрылымдық топтың статикалық анықталуы

Төменгі кинематикалық жұп элементтері арасындағы қысым күшінің тең әсер етуші \bar{F} күші шамасымен, бағытымен және қойылу нүктесімен анықталады. Егер үйкеліс күшін есепке алмаса, онда айналмалы жұпта барлық уақытта \bar{F} күшінің қойылу нүктесі, ал ілгерілемелі жұпта оның бағыты белгілі (бағыттаушы түзуіне перпендикуляр) (3.6.3 – сурет).

Кинематикалық жұптардың қысым күші



3.6.3–сурет

Яғни, әрбір төменгі жұпта \bar{F} күшінің екі параметрі белгісіз. Жазық механизмнің әрбір қозғалыстағы буындарына үш тепе – теңдік теңдеулерін, ал барлық қозғалыстағы буындары үшін - $3n$ тепе-теңдік теңдеулерін құруға болады. Әрбір төменгі жұпта қысым күшін анықтау үшін, алдында айтылғандай, екі белгісізді анықтау жеткілікті.

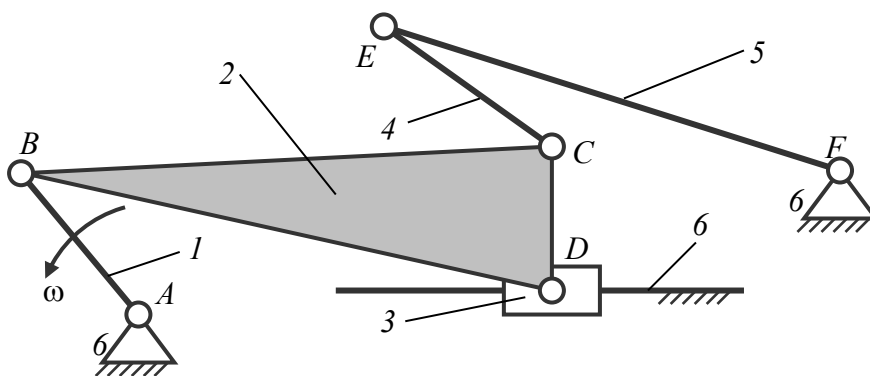
Кинематикалық тізбекті анықталған дейміз, егер ол $3n = 2p_5$ шартын қанағаттандыратын болса (теңдеулер саны оған түсірілген күш параметрлеріне тең болса). Алдында құрылымдық топтың

$3n = 2p_5$ теңдігін қанағаттандыратын шарты көрсетілген болатын. Яғни, буындардың құрылымдық тобы статикалық анықталған. Сондықтан, кинетостатикалық есептеу тәсілі әр түрлі құрылымдық топтарға қолданылады. Механизмді кинематикалық зерттегенде, зерттеу реті топтарды жалғастыру ретімен сәйкес келетіні алдында айтылған болатын, яғни бірінші бастапқы немесе бастапқы буындарға және тірекке жалғасатын топ қарастырылады. Сонан соң келесі топ т.с.с. Күшке есептеу реті кинематикалық зерттеуге кері болады, яғни *күшке есептеу соңғы жалғасқан топтан басталады және бастапқы буынды есептеумен аяқталады.*

Мысалы, 3.6.4–суретте көрсетілген алты буынды механизмді күшке есептеу керек болсын дейік.

Бастапқы 1–буынға және 6–тірекке II-кластағы 2 және 3 буын құрамында болатын бірінші топ жалғасқан, ал 2–буынға және 6–тірекке II-кластағы 4 және 5 буын құрамында болатын екінші топ жалғасқан. Күшке есептеуді соңғы жалғасқан топтан бастаймыз, яғни 4 және 5 буын құрамында болатын топтан, сонан соң 2 және 3 буын құрамында болатын топқа көшеміз, соңында 1–бастапқы буынға күшке есептеу жүргіземіз.

Алты буынды механизмді күшке есептеу реті



3.6.4-сурет

Механизмдерді күшке есептеу

Кинематикалық жұптардың реакция күштерін анықтау.

Буынның массасы мынадай: $m_1=0,7$ кг, $m_2=1,15$ кг, $m_3=0,8$ кг.

Буындардың масса центрінң үдеуі алдында анықталған. Еркін түсу үдеуі $g \approx 9,8$ м·с⁻².

Механизм буындарының инерция күші және моменті анықталады. Инерция күшін тұрғызылған үдеулер жобасын пайдаланып анықтаймыз. Инерция күші мынадай формуламен анықталады

$$\bar{F}_u = -m \cdot \bar{a}_S,$$

мұндағы m – буынның массасы ($кг$); a_S – буынның масса центрінің үдеуі ($м/с^2$). Инерция \bar{F}_e күшінің бағыты үдеу \bar{a}_S векторының бағытына қарсы бағытталады. Оның өлшем бірлігі ($кг \cdot м/с^2$), яғни ол ньютонмен өлшенеді (H). Буын жазық параллель қозғалыста болады деп қарастырамыз. Бұл жағдайда инерция күштерін келтіру центрі ретінде, оның масса центрін аламыз, сонда қос инерция күш моментін өрнектеу қысқарады. Қос күш инерция моменті мынадай формуламен анықталады

$$M_u = -I_S \cdot \varepsilon,$$

мұндағы I_S ($кг \cdot м^2$) – оның масса центрі арқылы өтетін материалды симметриялы жазықтығына перпендикуляр өске қатысты инерция моменті; ε ($с^{-2}$) – буынның бұрыштық үдеуі.

Буынның қос күш инерция M_u моменті мынадай өлшем бірлікті қабылдайды ($кг \cdot м^2 \cdot с^{-2}$) = ($H \cdot м$). Ол әсер ететін жазықтық, буынның қозғалыс жазықтығына параллель және ол буынның бұрыштық үдеуі бағытына қарсы бағытталады.

Кривошиптің инерция күшінің шамасы

$$F_{u1} = m_1 \cdot a_{S1} = 0,7 \cdot 7,9 \approx 5,5 H,$$

кривошиптің масса S_1 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S1} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

2 (бұлғақ) – буынның инерция күші

$$F_{u2} = m_2 \cdot a_{S2} = 1,15 \cdot 44 = 50,6 H$$

бұлғақтың масса S_2 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S2} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

3 (күйенте) – буынның инерция күші

$$F_{u3} = m_3 \cdot a_{S3} = 0,8 \cdot 26 = 20,8 H$$

күйентенің масса S_3 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S3} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

1–буын бірқалыпты айналмалы қозғалыста болғандықтан, қос күш моменті нөлге тең $M_{u1} = 0$.

2 (бұлғақ) – буынның қос күш инерция моменті

$$M_{u2} = I_{S2} \cdot \varepsilon_2 \approx 0,1 m_2 \cdot l_2^2 \cdot \varepsilon_2 = 0,1 \cdot 1,15 \cdot 0,115^2 \cdot 399 \approx 0,61 H \cdot м.$$

3 (күйенте) – буынның қос күш инерция моменті

$$M_{u3} = I_{S3} \cdot \varepsilon_3 \approx 0,1 m_3 \cdot l_{BC}^2 \cdot \varepsilon_3 = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,08^2 \cdot 312 \approx 0,16 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2 және 3 буындары құрамында болатын топты күшке есептеу

Жалғастырылған Ассур тобын есептеуден бастаймыз, одан соң жетектейтін буынды есептеуге көшеміз. Ассур тобы статикалық анықталған, сондықтан, барлық топқа немесе оның жеке буындарына тепе – теңдік теңдеулер жүйесін құрамыз

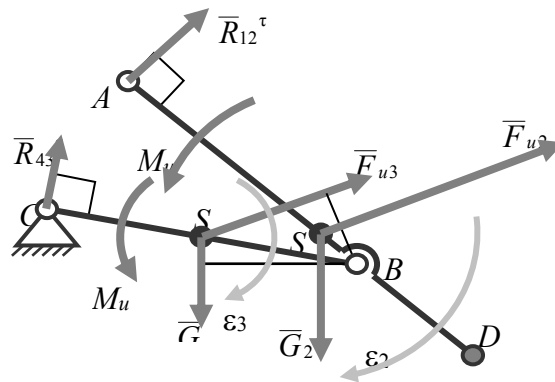
$$\sum \bar{F}_i = 0, \quad \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i) = 0.$$

Осы теңдеулердің негізіне күштер жобасы деп аталатын күш көп бұрышын тұрғызамыз, бірінші топтың сыртқы кинематикалық жұптардың реакция күштерін, ал сонан соң ішкі кинематикалық жұптардың реакция күштерін буындардың тепе – теңдік шартынан анықтаймыз.

3 және 3 буындары құрамында болатын топқа векторлық тепе - теңдік теңдеу құрамыз

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{43} = 0.$$

2 және 3 буындардың инерция күштері және инерция қос күш моменттері



3.6.5 – сурет

Бұл теңдеудің құрамында төрт белгісіз бар: \bar{R}_{12} реакция күшінің шамасы және бағыты және \bar{R}_{43} реакция күшінің шамасы және бағыты. Оны шешу үшін, яғни векторлық қосындыны тұрғызу үшін, әрбір \bar{R}_{12} , \bar{R}_{43} реакция күштерін екі құраушыларға жіктейміз, біреуін буынның өсі бойына, ал екіншісін буынның өсіне перпендикуляр бағытта тұрғызамыз (3.6.5–сурет). Бірінші реакция құраушы күшін n

индекспен, ал екіншісін - τ индексімен белгілейміз. Онда векторлық тепе - теңдік теңдеу мынадай түрде жазылады

$$\bar{R}_{12}^{\tau} + \bar{R}_{12}^n + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{43}^{\tau} + \bar{R}_{43}^n = 0.$$

Күш \bar{R}_{12}^{τ} шамасын, 2-буынның тепе-теңдігін қарастырып табамыз. 2-буынға түсірілген күштерге B нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_B = 0, \quad -R_{12}^{\tau} \cdot l_{AB} - F_{u2} \cdot h_{Fu2} + G_2 \cdot h_{G2} + M_{u2} = 0.$$

осыдан

$$R_{12}^{\tau} = \frac{-F_{u2} \cdot h_{Fu2} + G_2 \cdot h_{G2} + M_{u2}}{l_{AB}} \approx 0,65 H$$

мұндағы белгілі күштердің иіні сызбада анықталады және метрмен өлшенеді.

Күш \bar{R}_{43}^{τ} шамасын, 3-буынның тепе-теңдігін қарастырып табамыз. 3-буынға түсірілген күштерге B нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_B = 0, \quad -R_{43}^{\tau} \cdot l_{BC} - F_{u3} \cdot h_{Fu3} + G_3 \cdot h_{G3} + M_{u3} = 0,$$

осыдан

$$R_{43}^{\tau} = \frac{-F_{u3} \cdot h_{Fu3} + G_3 \cdot h_{G3} + M_{u3}}{l_{BC}} = 0,86 H,$$

мұндағы белгілі күштердің иіні сызбада анықталады және метрмен өлшенеді.

Тепе - теңдік теңдеулер бойынша топтың күштер жобасын $\mu_F = 0,2 \frac{H}{мм}$ масштабы бойынша тұрғызамыз.

Ассур тобына қолдануға болатын мынадай векторлық қосындыны тұрғызу реті ұсынылады: группа контуры үшін қандай да бір бағыт қабылдаймыз (мысалы, сағат тілінің бағытын) және қабылданған бағыт бойынша күштерді кескіндейтін кесінділерді қабылданған бағытымен өлшеп саламыз (3.6.6-сурет).

$$a \text{ нүктесінен } \bar{R}_{12}^{\tau} \text{ күшін кескіндейтін } (ab) = \frac{R_{12}^{\tau}}{\mu_F} = \frac{0,65}{0,2} \approx 3 \text{ мм}$$

кесіндіні өлшеп саламыз,

$$b \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u2} \text{ күшін кескіндейтін } (bc) = \frac{F_{u2}}{\mu_F} = \frac{50,6}{0,2} = 253 \text{ мм,}$$

кесіндіні өлшеп саламыз,

$$c \text{ нүктесінен } \bar{G}_2 \text{ күшін кескіндейтін } (cd) = \frac{G_2}{\mu_F} = \frac{11,3}{0,2} = 56,5 \text{ мм,}$$

кесіндіні өлшеп саламыз,

$$d \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u3} \text{ күшін кескіндейтін } (de) = \frac{F_{u3}}{\mu_F} = \frac{20,8}{0,2} = 104 \text{ мм,}$$

кесіндіні өлшеп саламыз,

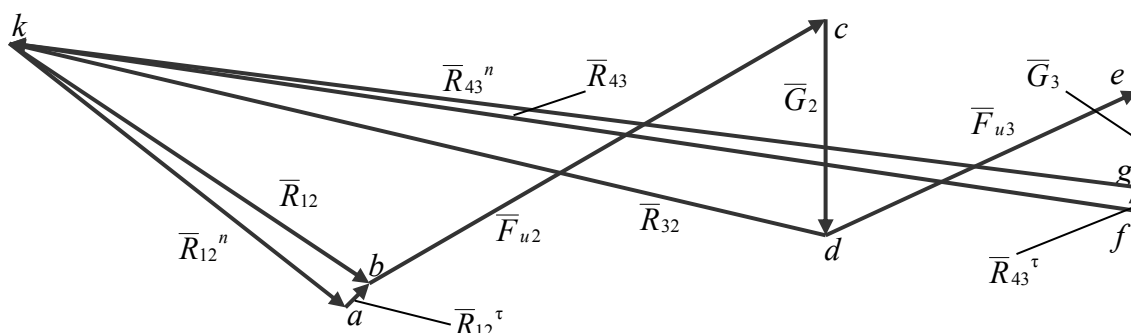
$$e \text{ нүктесінен } \bar{G}_3 \text{ күшін кескіндейтін } (ef) = \frac{G_3}{\mu_F} = \frac{7,8}{0,2} = 39 \text{ мм.}$$

кесіндіні өлшеп саламыз,

$$f \text{ нүктесінен } \bar{R}_{43}^\tau \text{ күшін кескіндейтін } (fg) = \frac{R_{43}^\tau}{\mu_F} = \frac{0,86}{0,2} \approx 4 \text{ мм.}$$

кесіндіні өлшеп саламыз.

2 және 3 буындары құрамында болатын топтың күштер жобасы



3.6.6–сурет

a нүктесінен AB түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Бұл түзу \bar{R}_{12}^n күшінің әсер етуші сызығы болады, ал g нүктесінен BC түзуіне параллель түзу жүргіземіз. Ол түзу \bar{R}_{43}^n күшінің әсер етуші сызығы болады. Осы түзулердің қиылысу k нүктесін табамыз.

(ka) кесіндісі μ_F масштабта \bar{R}_{12}^n күшін, ал (gk) кесіндісі \bar{R}_{43}^n реакция күшін және (kb) кесіндісі \bar{R}_{12}^τ реакция күшін, (fk) кесіндісі \bar{R}_{43}^τ реакция күшін кескіндейді.

$$\text{Реакция күші } R_{12}^n = (ka) \cdot \mu_F = 178 \cdot 0,2 = 35,6 \text{ Н.}$$

$$\text{Толық реакция күші } R_{12} = (kb) \cdot \mu_F = 178 \cdot 0,2 = 35,6 \text{ Н.}$$

$$\text{Реакция күші } R_{43}^n = (gk) \cdot \mu_F = 478 \cdot 0,2 = 95,6 \text{ Н.}$$

Толық реакция күші $R_{43} = (fk) \cdot \mu_F = 479 \cdot 0,2 = 95,8 \text{ Н}$.

\bar{R}_{32} реакция күшін анықтау үшін 2-буынның тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{32} = 0.$$

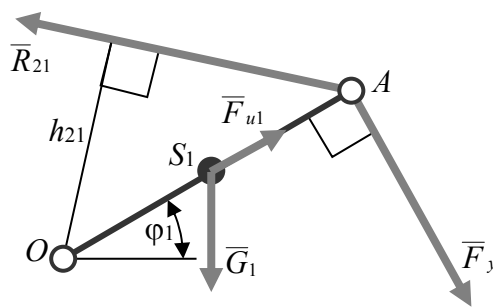
Күштер жобасында (dk) кесіндісі μ_F масштабта \bar{R}_{32} реакция күшіне сәйкес келеді.

Реакция күші $R_{32} = (dk) \cdot \mu_F = 382 \cdot 0,2 = 76,4 \text{ Н}$.

Жетекші буынды күштерге есептеу

1-буынға \bar{F}_{u1} күші, $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ (оның шамасы күштер жобасында (kb) кесіндісімен анықталған) күші, салмақ күші \bar{G}_1 , \bar{R}_{41} күші және теңгеретін момент M_y (3.6.7-сурет).

Жетекші буынға түсірілген күштер



3.6.7-сурет

1-буынға түсірілген күштерге, O нүктесіне қатысты моменттер теңдеуі құрып, теңгеретін қос күш моментінің шамасын анықтаймыз

$$\sum M_O = 0,$$

$$-M_y + R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_{G1} = 0, \quad -F_y \cdot l_{OA} + R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_{G1} = 0,$$

$$F_y = \frac{R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_{G1}}{l_{OA}} = 30,1 \text{ Н}.$$

4-буынның \bar{R}_{41} реакция күшінің шамасын анықтау үшін, 1-буынға түсірілген күштердің тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_y + \bar{F}_{u1} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{41} = 0.$$

Күштердің тепе-теңдік теңдеуі бойынша $\mu_F = 0,2 \frac{H}{мм}$. масштабта күштер жобасын тұрғызамыз. Кез келген a нүктесінен \bar{R}_{21} реакция күшін кескіндейтін (ab) кесіндіні өлшеп саламыз

$$(ab) = \frac{R_{21}}{\mu_F} = \frac{35,6}{0,2} = 178 \text{ мм},$$

теңгеретін \bar{F}_y күшін - (bc) кесінді түрінде

$$(bc) = \frac{F_y}{\mu_F} = \frac{30,1}{0,2} = 150,5 \text{ мм}$$

инерция \bar{F}_{u1} күшін - (cd) кесінді түрінде

$$(cd) = \frac{F_{u1}}{\mu_F} = \frac{5,5}{0,2} = 27,5 \text{ мм},$$

кривошиптің салмақ \bar{G}_1 күшін (de) кесіндісі түрінде

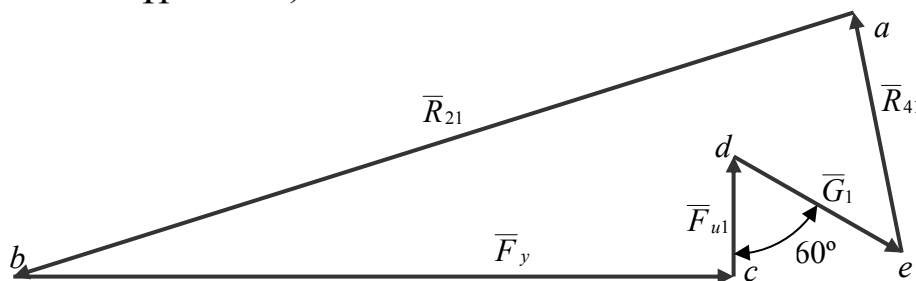
$$(de) = \frac{G_1}{\mu_F} = \frac{6,9}{0,2} = 34,5 \text{ мм}.$$

Осыдан \bar{R}_{41} реакция күшінің шамасын анықтаймыз:

$$R_{41} = (ea) \cdot \mu_F = 58 \cdot 0,2 = 11,6 \text{ Н}.$$

Осымен механизмді кинетостатикалық зерттеу аяқталады.

Жетекші буын үшін күштер жобасы (жоба сағат тілі бағытымен 60° бұрышқа бұрылған)



3.6.8-сурет

3.6.2 Келтірілген күшті және келтірілген күш моментін анықтау. Жуковскийдің теоремасы. Механизмнің кинетикалық энергиясы. Механизмнің кинетикалық энергиясы. Механизмнің келтірілген массасы және келтірілген инерция моменті

Келтірілген күш және күш моменті

Берілген күштердің әсерінде болатын механизм қозғалысын зерттегенде, буындарына түсірілген барлық күштерді механизм

буындарының біреуіне түсірілген күшпен ауыстырған ыңғайлы болады. Келтірілген күш деп, келтіру нүктесінің мүмкіндік орын ауыстырғанда элементар жұмысы элементар орын ауыстырғанда барлық нүктелеріне әсер етіп тұрған келтірілетін күштердің элементар жұмыстарының қосындысына тең, механизмнің бір нүктесіне түсірілген күшті айтады

$$F_{\Pi} \cdot ds_{\Pi} \cdot \cos \alpha_{\Pi} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot ds_i \cdot \cos \alpha_i. \quad (3.6.2.1)$$

мұндағы ds – күш әсер етіп тұрған нүктенің элементар орын ауыстыру; α – күш векторы және осы күштің әсер етіп тұрған нүктенің орын ауыстыру бағатының арасындағы бұрыш.

Бірінші теңдеуді (3.6.2.1) (dt) –ға бөлейік

$$F_{\Pi} \cdot v_{\Pi} \cdot \cos \alpha_{\Pi} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i. \quad (3.6.2.2)$$

осыдан,

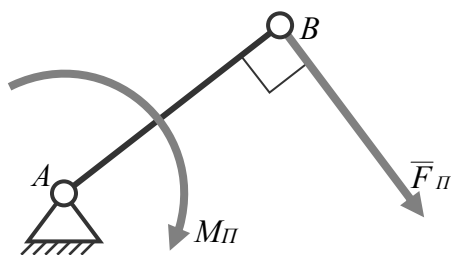
$$N_{\Pi} = \sum_{i=1}^n N_i. \quad (3.6.2.3)$$

Келтірілген күштің қуаты барлық әсер етіп тұрған күштердің қуаттарының қосындысына тең. Қуатты былайда өркендеуге болады

$$N_{\Pi} = F_{\Pi} \cdot v_{\Pi} = M_{\Pi} \cdot \omega, \quad (3.6.2.4)$$

мұндағы M_{Π} – келтірілген қос күш моменті.

Келтірілген күш және келтірілген қос күш моменті түсірілген буынның сұлбасы



3.6.9-сурет

Н.Е.Жуковскийдің теоремасы

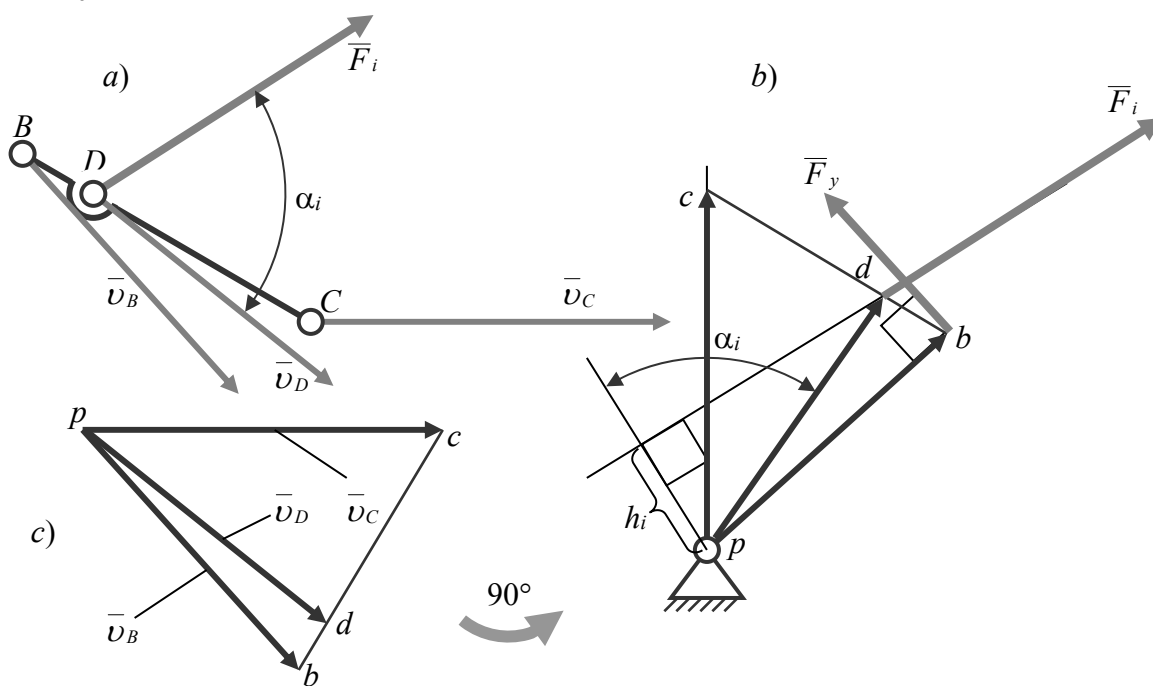
Теңгергіш күш дегеніміз, келтірілген күшке қарама - қарсы бағыталған күш. $(\bar{F}_y = -\bar{F}_{\Pi})$. (3.6.2.2)–ші теңдеудегі келтірілген күшті теңгергіш күшпен ауыстырсақ, онда

$$F_y \cdot v_y \cdot \cos \alpha_y + \sum_{i=1}^n F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i = 0. \quad (3.6.2.5)$$

бұл теңдеу барлық күштердің қуаттар қосындысы механизмнің мүмкіндік оран ауыстыру жағдайында нөлге тең болатынын көрсетеді, яғни берілген механизм үшін мүмкіндік орын ауыстыру принципінің аналитикалық өрнегін аламыз.

BC буынына D нүктесінде \bar{F}_i күші әсер етсін дейік (3.6.2,*a*-сурет). Буынның жылдамдықтар жобасы 90° - қа бұрамыз (3.6.2,*b*-сурет); бұрылған бағыт еркін болуы керек (сағат тілімен бағыттас немесе қарсы 3.6.2,*c*-сурет). Бұрылған жобаның D – нүктесіне \bar{F}_i күшін көшіреміз және жобаның бастапқы нүктесінен (p нүктесі) осы күштің бағытына h_i перпендикуляр тұрғызамыз.

Жылдамдықтар жобасын бұру көмегімен теңгергіш күшті анықтау



3.6.2-сурет

3.6.2,*c*-суреттен алатынымыз

$$F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i = F_i \cdot (pd) \cdot \mu_v \cdot \cos \alpha_i = F_i \cdot \mu_v \cdot h_i = \mu_v \cdot M_{II}(F_i), \quad (3.6.2.6)$$

мұндағы μ_v – жылдамдықтар жобасының масштабы; $F_i \cdot h_i$ – жылдамдықтар жобасының полюсіне қатысты F_i күшінің моменті.

Сонымен, күштің қуатын осы күштің жылдамдықтар жобасының бас нүктесіне қатысты моментін μ_v масштабы

көбейтіндісі өрнегімен көрсетуге болады. (3.6.2.5)–теңдеуге бұл ауыстыруды қолдансақ, онда

$$F_y \cdot h_y + \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0. \quad (3.6.2.7)$$

(3.6.2.7) - теңдеу Н.Е.Жуковскийдің теоремасын сипаттайды: *егер механизм тепе–теңдікте болатын механизм буындарына түсірілген барлық күштерді бұрылған жылдамдықтар жобасының тиісті нүктелеріне көшірсе, онда барлық осы күштердің жоба басына қатысты моменттерінің қосындысы нөлге тең болады.*

Егер бұрылған жобаны айналу өсі жобаның басы болатын қатаң иін тірек деп қарасақ (3.6.2,с-сурет), онда (3.6.2.7)–теңдеу иін тіректің тепе-теңдік теңдеуі болып табылады.

Даламбер принципі бойынша, егер сыртқы күштер әсерінде болатын механизм буындарына инерция күштерін түсірсек, онда механизм тепе – теңдікте болады. Сонымен, егер F_i кедергі және инерция күштері деп алсақ, онда (3.6.2.7)–теңдеуі арқылы анықталатын теңгергіш күш қозғаушы күш болады ($F_y = F_K$). Егер, бұл күшті механизмнің жетекші буынына түсірсе, онда ол кедергі күштерді жеңіп шығады және механизм буындары берілген заңымен қозғалады. Егер қозғаушы күш және буындардың инерция күштері берілсе, онда теңгергіш күш кедергі күші болады ($F_y = R$).

Күштер әсерлерінің тәуелсіздігі туралы принципі негізіне сүйене отырып, Жуковский теоремасын пайдаланып, механизм буындарына түсірілген әрбір күш үшін теңгергіш күшті анықтауға болады.

Механизмнің кинетикалық энергиясы

Механизмнің кинетикалық энергиясы анықталатын теңдеуі былай өрнектеледі

$$A_k - A_{ked} = \sum \frac{m \cdot v^2}{2} - \sum \frac{m \cdot v_0^2}{2}. \quad (3.6.2.8)$$

мұндағы A_k – барлық қозғаушы күштердің жұмысы, A_{ked} – барлық кедергі күштердің жұмысы, $\sum mv^2/2$ – механизмнің кинетикалық энергиясы, v_0 және v бастапқы және соңғы жылдамдықтары.

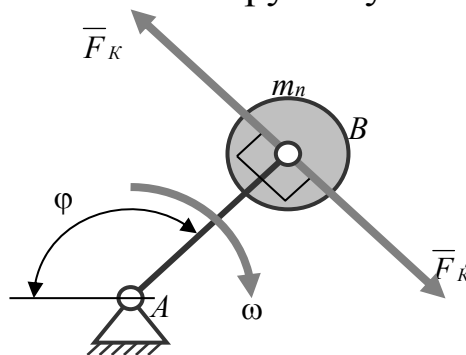
Барлық қозғаушы күштерді таңдап алынған AB келтірілетін буынның (3.6.3-сурет) B нүктесіне түсірілген бір келтірілген \bar{F} күшімен ауыстыруға болады. Дәл осылай, барлық кедергі күштерін

AB келтірілетін буынның B нүктесіне түсірілген бір келтірілген \bar{F}_K күшімен ауыстыруға болады. Қозғаушы және кедергі күштердің моментерін M_K және M_K A валында келтірілген моменттерімен ауыстыруға болады. Жазық-параллель қозғалыстағы буынның кинетикалық энергиясы мынадай теңдік арқылы өрнектеледі

$$T = \frac{1}{2} \sum (m_i \cdot v_i^2 + I_i \cdot \omega_i^2). \quad (3.6.2.9)$$

мұндағы m_i – i -буынның массасы, v_i – буынның массалар центрінің жылдамдығы, I_i – буынның массалар центрі арқылы өтетін өске қатысты инерция моменті, ω_i – оның бұрыштық жылдамдығы.

Келтірілген массасы мен келтіруші буын сұлбасы



3.6.3–сурет

Ілгерлімелі қозғалыстағы буынның кинетикалық энергиясы мынадай теңдік арқылы өрнектеледі

$$T = \frac{m \cdot v_S^2}{2}. \quad (3.6.2.10)$$

бұл формулада v_S – буынның массалар центрінің жылдамдығы.

Айналмалы қозғалыстағы буынның кинетикалық энергиясы мынадай теңдік арқылы өрнектеледі

$$T = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \quad (3.6.2.11)$$

мұндағы I – айналу өсіне қатысты буынның момент инерциясы, ω – буынның бұрыштық жылдамдығы.

Жазық-параллель қозғалыстағы буынның кинетикалық энергиясын мынадай теңдік арқылы өрнектеуге болады

$$T = \frac{I_P \cdot \omega^2}{2}, \quad (3.6.2.12)$$

мұндағы I_P – лездік айналу центрі P арқылы өтетін өске қатысты буынның инерция моменті, ω – буынның лездік бұрыштық жылдамдығы. Лездік айналу центрі P арқылы өтетін өске қатысты буынның I_P инерция моментін буынның массалар центрі S арқылы өтетін өске қатысты I_S инерция моменті арқылы өрнектеуге болады

$$I_P = I_S + m \cdot l_{PS}^2. \quad (3.6.2.13)$$

мұндағы l_{PS} – буынның S массалар центрінен P лездік айналу центріне дейінгі қашықтық. (3.6.2.13) теңдегінің мәнін (3.6.2.12) теңдігіне қойып, мынадай күрделі айналмалы – ілгерілемелі буынның кинетикалық энергиясын өрнектейтін формуланы аламыз

$$T = \frac{I_S \cdot \omega^2}{2} + \frac{m \cdot v_S^2}{2}. \quad (3.6.2.14)$$

мұндағы $\omega \cdot l_{PS} = v_S$ буынның массалар центрінің жылдамдығы. (3.6.2.9) формуланы пайдаланып, жеке буындардың алгебралық кинетикалық энергиясын қосып, механизмнің кинетикалық энергиясын табамыз.

Механизмнің келтірілген массасы және келтірілген инерция моменті

Еркіндік дәрежесі бірге тең механизмнің бастапқы буыны біреу және осы буынды келтіруші буын ретінде қабылдауға болады. Механизм n буыннан құрылсын дейік және еркіндік дәрежесі бірге тең болсын. Осы механизмнің AB буынын келтіруші буын, ал A нүктесін келтіруші нүкте ретінде таңдап алайық. AB буынын 1 номерімен белгілейміз.

Келтірілген масса деп кинетикалық энергиясы T_K келтіруші буындардың кинетикалық энергияларының $\sum T_i$ қосындысына тең келтірілетін нүктеге жинақталған жалған массаны айтады. (3.6.2.9)–теңдікті пайдаланып келтірілген масса анықталатын формуланы аламыз

$$m_n = \frac{\sum m_i \cdot v_i^2 + \sum I_i \cdot \omega_i^2}{v_B^2}, \quad (3.6.2.15)$$

мұндағы v_B – келтіру нүктесінің жылдамдығы.

Егер, буындардың массалары бір буынға келтірілсе және ол буын тірекпен айналмалы жұп құратын болса, онда келтірілген инерция моменті түсінігін пайдалануға болады.

Келтірілген инерция моменті мынадай теңдік арқылы анықталады

$$I_n = \frac{2 \sum T_i}{\omega_1^2} = \frac{\sum m_i \cdot v_i^2 + \sum I_i \cdot \omega_i^2}{\omega_1^2}, \quad (3.6.2.16)$$

мұндағы ω_1 – келтіруші буынның бұрыштық жылдамдығы. (3.6.2.15) және (3.6.2.16) теңдіктерден m_k массаның өлшем бірлігі [кг], ал I_n инерция моментінің өлшем бірлігі [кг·м²] болатынын көреміз. (3.6.2.15) теңдіктен жалпы жағдайда m_n айнымалы және сызықтық және бұрыштық жылдамдықтар квадраттарының қатынастарына тәуелді екенін көреміз. Сондықтан, келтірілген масса әрқашан оң таңбалы. (3.6.2.16) теңдеудегі I_k айнымалы және оң таңбалы шама және механизмнің AB буынына келтірілген инерция моменті болып табылады. Бұл AB буынымен бірге айналатын шартты дененің инерция моменті, әрбір қарастырылатын орнында механизмнің кинетикалық энергиясы барлық буындары кинетикалық энергияларының қосындысына тең.

3.7 Жұдырықша механизмдері және олардың негізгі түрлері

Цикл диаграммалар. Жұдырықшаның профилін есептеу

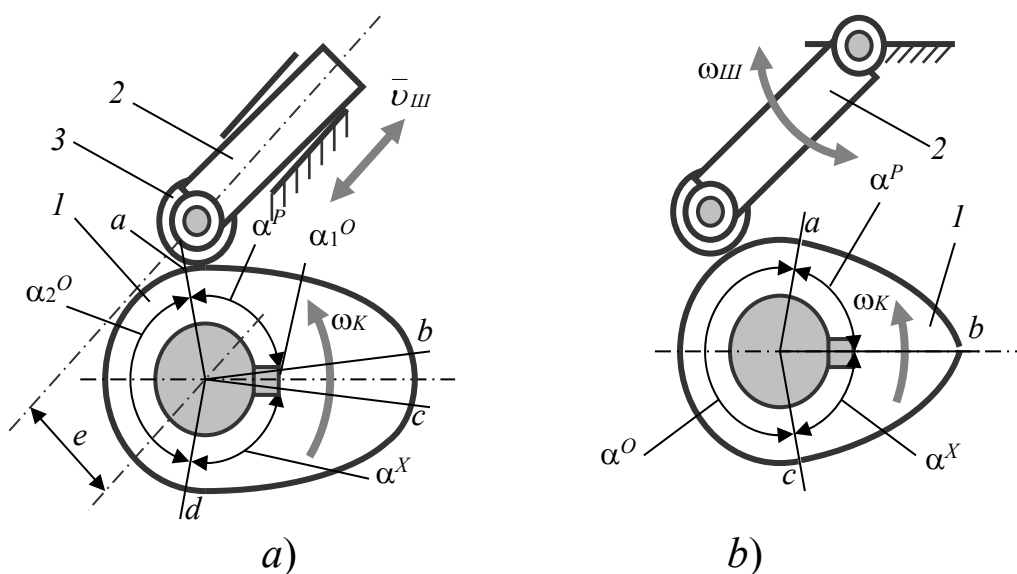
Қарапайым жұдырықша механизмі үш буыннан құрылады: жұдырықша 1, штанга 2, және тірек (3.7.1-сурет). Әдетте штанга мен жұдырықша құратын жұпта пайда болатын сырғанау үйкеліс күшін домалау үйкеліс күшімен ауыстыру үшін штанганың соңына ролик (3) орналастырылады. Ролик механизмнің қозғалыс заңын өзгертпейді. Сондықтан, ролигі бар механизм *үш буынды жұдырықша механизмі* деп аталады. Көп жағдайларда жұдырықша жетекші буын, ал штанга жетектегі буын болады. Жұдырықша әрқашан да жетекші буын болып табылады, ал жетектегі буын 2 штанга деп аталады. Егер буын штанга 2 іргерілемелі қозғалыста болатын болса, онда оны итергіш (3.7.1,*a*-сурет), ал егер буын штанга 2 айналмалы қозғалыста болатын болса, онда күйенте деп аталады (3.7.1,*b*-сурет). Жетекші және жетектегі буындардың қозғалыс траекторияларының орнына қарай, жұдырықша механизмдері жазық және кеңістік болып екі топқа бөлінеді.

3.7.1–суретте жұдырықшалы механизмдердің мысалдары келтірілген, мұндағы жұдырықша (1) профилінің қисықтығы айнымалы

болып келген буын, жетектегі буыны (2) ілгерілмелі немесе айналмалы қозғалыста болады. Егер штанганың ілгерілемелі қозғалыс өсі жұдырықшаның айналу центрі арқылы өтсе, онда жұдырықша механизмі *аксиалдық механизм* деп аталады ($e = 0$). Егер штанганың ілгерілемелі қозғалыс өсі жұдырықшаның айналу центрі арқылы өтпесе, онда жұдырықша механизмі *дезаксиалды механизм* болып аталады ($e \neq 0$) (3.7.1,а–сурет).

Осындай типті механизмдер іштен жанатын двигательдердің қақанақ реттеуші тетіктерінде және газды, ауаны, буды қысатын машиналарда көп кездеседі.

Жұдырықша механизмдері және цикл диаграммалары.

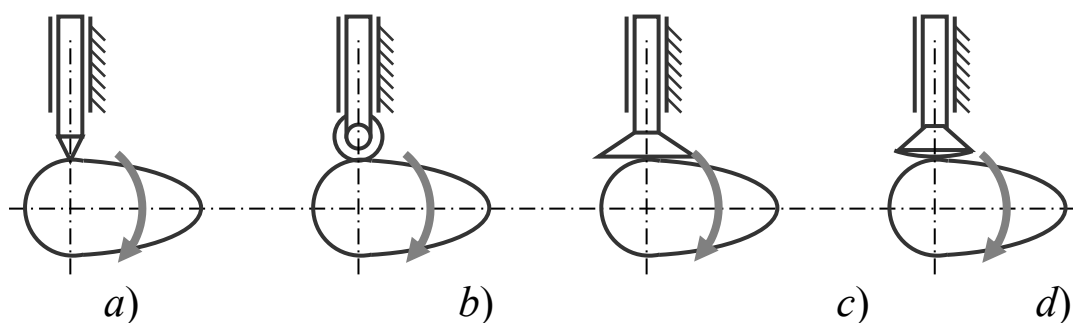


3.7.1–сурет

Осындай типті механизмдер іштен жанатын двигательдердің қақанақ реттеуші тетіктерінде және газды, ауаны, буды қысатын машиналарда көп кездеседі.

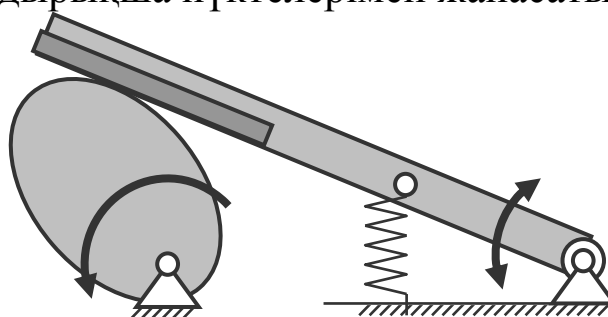
Штанга және жұдырықша жоғарғы кинематикалық жұп құрады. Мұндай жұптардың элементтері әртүрлі геометриялық формада болады. 3.7.2–суретте қарастырылатын жұптардың типті элементтері ілгерілей қозғалатын жетектегі буын штанга (итергіш) болатын механизм көрсетілген. Әсер күштерінің шамалары аз болғанда, жетектегі буыны сүйір ұшты штанга типті жұп (3.7.2,а–сурет) қолданылады. Тербелмелі штанга жұдырықшамен жанасатын айналмалы қозғалыста болатын роликпен жабдықталады (3.7.2,б–сурет).

Айналмалы қозғалыстағы жұдырықша механизмдердің негізгі түрлері



3.7.2-сурет

Жұдырықша нүктелерімен жанасатын штанга



3.7.3-сурет

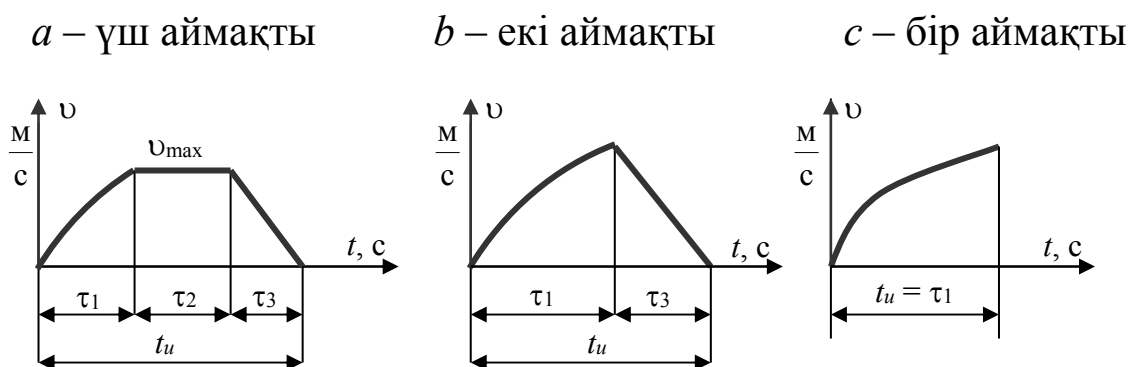
Кейбір жағдайларда штанганың жұмыс жасайтын беті жазықтық түрінде орындалады (3.7.3-сурет). Бұл механизмде штанга жұдырықшамен өзінің әр нүктелерінде жанасады. Штанга берілген қозғалысты орындау үшін, жұдырықшамен үнемі жанасуда болуы керек.

Әдетте екі түрлі жұп тұйықталу типі қолданады: күштік және геометриялық. Бірінші жағдайда жоғарғы кинематикалық жұптың күштік тұйықталуы көбінесе пружиналар көмегімен жүзеге асырылады (3.7.3-сурет). Жұптың геометриялық тұйықталуы жұдырықша конструкциясына байланысты. Жазық пазды жұдырықша роликпен жабдықталған жетектегі буынды механизмдер үшін ғана қолдануға жарамды. Мұнда ролик өз ара эквидистантты, яғни нормаль бойынша бірдей қашықтағы қисықтар дөңгелете сызылған паз арқылы сырғанады. Жұдырықшалы механизмдердің басқа түрлерінің қос роликті итергіші бар жұдырықшалы механизм, жазық жақтаулы итергіші бар жұдырықшалы механизмі және тағы басқалары белгілі. Мұндай механизмдер жетектегі буынның нүкте траекторияларын және қозғалыстың берілген заңдылықтарын

орындауға кең мүмкіндік туғызады. Мұнда жанасу аймағына едәуір меншікті қысым пайда болады және жоғарғы жұптар төменгі жұптарға қарағанда тезірек тозады. Осыған қарамастан қазіргі автомат машиналарда жұдырықшалы механизмдер көп қолданылады.

Цик диаграммалары

Жұдырықшалы механизмнің жетектегі буыны қозғалысы белгілі уақыт аралығында қайталанады, бұндай қозғалысты цикл қозғалысы деп айтады. Жұдырықшалы механизмнің жетектегі буыны қозғалысының циклы екі типке бөлінеді: орын ауыстыру және тоқтау. Әрбір типтің саны және ұзақтығы әр түрлі болады. Цикл қозғалысының құрылысын оның цикл диаграммасы анықтайды (3.7.1-сурет).



3.7.4–сурет

Жетектегі буын (итергіш) әрқашан үзік – үзік қозғалыста болады, оның жылдамдығы әрбір уақыт аралық соңында нөлге тең. Жалпы жағдайда қозғалыс аралықтары (интервал) үш сипаттама аймақтан тұрады:

1) үдемелі қозғалыс: жетектегі буынның жылдамдығы нөлден бастап максимум шамаға дейін өседі v_{max} ; жылдамдық өсу уақытын τ_1 , ал жүрген жолын – s_1 әріптерімен белгілейміз;

2) бірқалыпты қозғалыс: жетектегі буынның жылдамдығы $v = v_{max} = const$, уақытын τ_2 , ал жүрген жолын – s_2 әріптерімен белгілейміз.

Тахограммалары $v = f(t)$:

3) кемімелі қозғалыс: жетектегі буынның жылдамдығы интервал соңында нөлге дейін төмендейді, уақытын τ_3 , ал жүрген жолын – s_3 әріптерімен белгілейміз.

Қозғалыстың уақыт интервалы кейбір жеке жағдайда екі немесе бір аймақтан тұрады. Сонымен, орын ауыстыру интервалы үш аймақты, екі аймақты $\tau_2 = 0$ және бір аймақты ($\tau_2 = 0$ және $\tau_3 = 0$) болып бөлінеді (3.7.4-сурет).

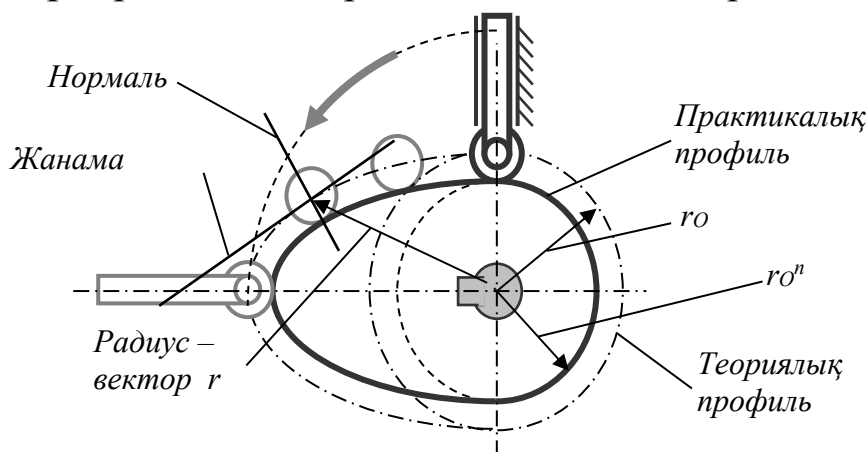
Механизмнің жұмысы оптималды болады, егер аймақ ішінде қозғалыс үдемелі және кемімелі болса, онда буынның жылдамдығы бір қалыпты өседі және төмендейді. Ол үшін бұл аймақтарда жылдамдық уақытқа бір мәнді монотонды функциясы болуы керек; үдеу үзік – үзік немесе үздіксіз функция болады, бірақ әрбір аймақта бір максимум немесе бір минимум болуы керек.

Жұдырықша профилінің геометриялық параметрі

Берілген цикл диаграммасы орындалу үшін және жетектегі буын берілген тендеумен қозғалу үшін $s = f(t)$, жұдырықша тиісті өлшемінде болуы керек, ал оның профилі тиісті қисық сызықтармен құрылуы керек. Егер штанганың ұшында ролик болса, онда екі профилі қарастырылады: практикалық және теориялық.

Жұдырықшаның жоғарғы кинемитикалық жұп элементі болып табылатын қисық жұдырықшаның практикалық профилі (3.5 – сурет) деп аталады. Жұдырықшаның практикалық профилінен ролик радиусына (r_p) тең қашықтықта жатқан тұйық қисық жұдырықшаның теориялық профилі деп аталады (3.7.5–сурет). Жұдырықшаның теориялық профилі бойымен жетектегі буынның ролик центрі оран ауыстырады. Сонымен, практикалық және теориялық профильден құрылатын қисық эквидистанты профиль деп аталады. Егер штага жұдырықшамен жанасып тұрса, онда теориялық және практикалық профильдер бір - бірімен сайкес келеді. Жұдырықшаның айналу өсінен теориялық профиль нүктелеріне дейінгі қашықтықты жұдырықшаның радиус – векторы деп атаймыз. Радиустары (r_o) и (r_o^n) (3.7.5-сурет) шеңберді теориялық және практикалық профильдерінің негізді және базисты шеңберлері деп атайды.

Жұдырықшаның практикалық және теориялық профилі



3.7.5-сурет

Жұдырықшаның профилін есептеу

Профильді есептегенде бастапқы радиус – векторының шамасы (базистық шеңбердің радиусы) берілген деп қарастырамыз. Көп жағдайда байланыс $r_i = f(\alpha_i)$ аналитикалық есептеу жолымен анықталады. Сондықтан $\frac{dr_i}{d\alpha_i}$ - шамасын анықтау үшін, $r_i = f(\alpha_i)$ –

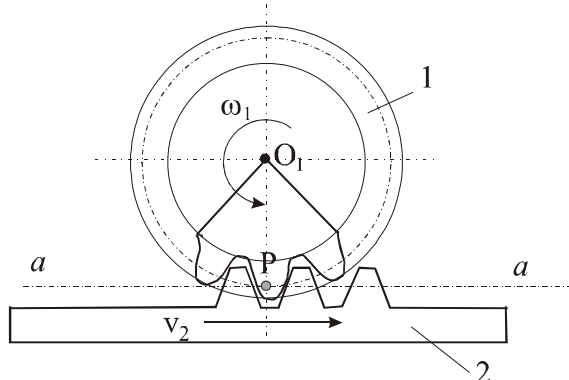
функцияның графигін тұрғызу керек және графикалық тәсілмен дифференциалдау керек. Бұндай жағдайда есептеу дәлдігі төмендейді. Штанганың салыстырмалы қозғалысында жұдырықшаны айналады және жұдырықшаның айналу центрінен алыстап немесе жақындап (3.7.6-сурет) бағыттаушы бойымен қозғалады. Штанганың салыстармалы қозғалысының біртіндеп орын ауыстыру графигі $s = f(\varphi)$ 3.7.6-суретте көрсетілген. Қозғалыстың шамасын базистік шеңберден бастап қоямыз. Бір қалыпты қисық сызық теориялық профильді құрады. Теориялық профильден әр нүктесінен радиусы (r_P) - ға тең доғаларды салсақ және сол доғаларды сызықпен қосатын болсақ, онда біз практикалық профильді аламыз. Профильдердің аймақтары α_2 және α_4 бұрыштарына сәйкес жұдырықшаның центрі арқылы жүргізілген шеңбер доғалары. Берілген механизм аксиальды механизм болса, онда α бұрышы φ бұрышына тең болады.

БМ ретінде бір түрлі қозғалысты келесіге түрлендіру үшін бұрама және төрткілдеш (реечный) берілістер қолданылады. Бір айналмалы қозғалысты басқа айналмалы қозғалысқа түрлендіру үшін қозғалмайтын осьті тісті берілістер (цилиндрлік, конустық, гипоидты доңғалақты), планетарлық, қозғалмалы осьті дифференциал берілістер, сонымен қатар, иілгіш тісті доңғалақты толқынды беріліс қолданылады. Айналмалы қозғалысты қашықтыққа беру үшін белдікті, шынжырлы, арқанды, тасбалы, тросты берілістерді қолданады. Иінтіректі және жұдырықшалы механизмдер *БМ* - нің функциясын атқара алатынын ескеру қажет.

Қозғалыс түрін түрлендіретін беріліс механизмдері

Жоғарыда көрсетілгендей қозғалыстың бір түрін келесіге түрлендіру үшін *БМ* - нің көптеген кластары бар. Осындай беріліс қатарларын қарастырайық.

Төрткілдешті беріліс тістерінің айналмалы қозғалысын төрткілдештің ілгерілемелі қозғалысына түрлендіру үшін және керісінше әрекет жасау қажет.



3.8.1- сурет. Төрткілдешті беріліс

ω_1 бұрыштық жылдамдық пен O_1 өсін айналатын тістергіш 1, төрткілдешті 2 ω_2 жылдамдығымен айналмалы қозғалысқа келтіреді (3.8.1-сурет). Сонда O_1P радиусты центроид (бастапқы шеңбер) P нүктесіне жанаса төрткілдешпен байланысқан $a-a$ түзуіне қатысты сырғанамай домалайды. P нүктесі 1-ші және 2-ші буындарының салыстырмалы қозғалыстарында жылдамдықтың лездік центрі болып табылады. Шеңбер $a-a$ түзуі бойымен сырғанаусыз қозғалатындықтан P нүктесінің $a-a$ түзу бойымен орын ауысуы орталық бұрышты φ_1 шеңбер доғасы (φ_2 бұрышы тістергіштің бұрылу бұрышына тең) ұзындығына тең. Сондықтан келесі қатынасты жазуға болады

$$s_2 = \varphi_2(O_1P).$$

Бұдан жылдамдық арасындағы тәуелділікті келесі түрде оңай алуға болады

$$v_2 = \omega_2(O_1P),$$

демек, төрткілдеш берілісінің кинематикалық көрсеткіштері келесі қатынаспен байланысқан

$$v_2/\omega_1 = r_1,$$

мұндағы r_1 – тістергіш радиусы.

Бұрама берілісі (3.8.2,*a*-сурет) төрткілдешке ұқсас 1-бұраманың айналмалы қозғалысын 2-сомынның ілгерілемелі қозғалысына түрлендіру үшін қолданады және керісінше (3.8.2,*b*-суретінде бұрама жұптың шартты бейнесі кинематикалық сұлбада көрсетілген).

Сомынның орын ауысуы (s) және бұраманың бұрылу бұрышы (φ) келесі қатынаспен байланысқан

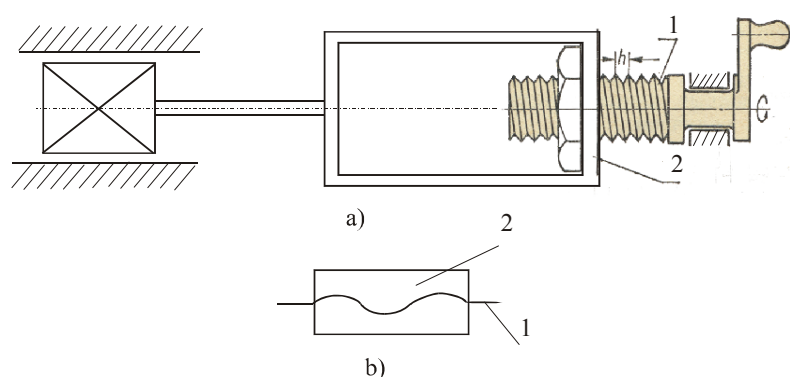
$$s = \varphi p k / 2\pi,$$

мұндағы s = [мм.], φ = рад., p - бұранда қадамы мм, k - бұранда кірмесі саны.

Сомын жылдамдығы мен бұраманың бұрыштық жылдамдығының арасындағы тәуелділік келесі түрге ие

$$v = \omega p k / (2\pi),$$

мұндағы v - сомын жылдамдығы, мм/с; ω - бұраманың бұрыштық жылдамдығы, с⁻¹.



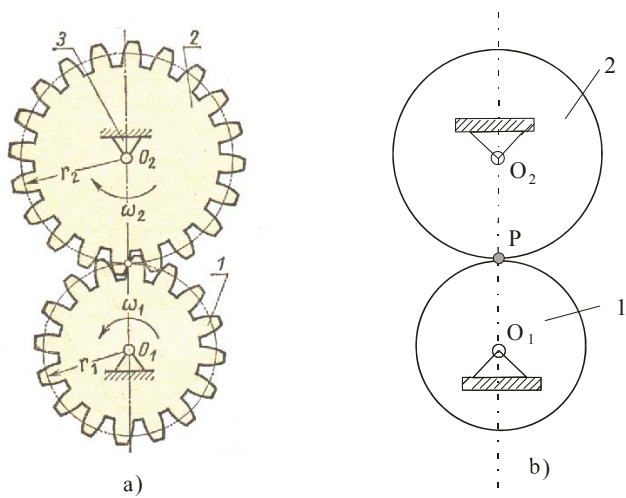
3.8.2-сурет. Бұрама беріліс

Айналмалы қозғалыстың берілісі және түрлендіру механизмдері
Роботтардың атқарушы механизмдерінде және жетектерінде айналмалы қозғалысты кеңістікте әртүрлі берілген екі осьтер арасында қайта болдыру үшін механизмдер кең қолданылады. Екі

қозғалмайтын осьтер арасындағы берілген беріліс қатынастарын қайта болдыру үшін қолданатын қарапайым механизм үш буынды тісті механизм болып табылады (3.8.3-сурет). Кинематикалық сұлбасы 3.8.3,б-суретте көрсетілген тісті механизм тіреуіштен 3 және тісті доңғалақтан 1, 2 тұрады. Тісті доңғалақтың білік осі 3.7.3-суретте көрсетілгендей параллель болуы мүмкін. Бұл жағдайда тісті доңғалақ тістер ілінісі ішкі және сыртқы цилиндрлі тісті болып келетін берілісті құрайды. Егер біліктер осьтері қиылысса, онда тісті доңғалақтар конустық беттік түрге ие және ереже бойынша конустық берілісті болып келеді. Егер біліктер осьтері айқастырылған болса, онда тісті доңғалақтар гиперболоидты тісті беріліс береді. Гиперболоидты берілістен практикада бұрамдылы, гипоидты, бұрамалы тісті берілістер қолданыс тапты.

Кинематикалық көзқараспен тісті доңғалақтардың үшбуынды тісті механизмдерінде айналу әртүрлі бұрыштық жылдамдықтармен ω_1, ω_2 орындалады.

БМ-ның маңызды кинематикалық сипаттамасы ретінде беріліс қатынасы деп аталынатын бұрыштық жылдамдықтарының қатынасы саналады.



3.8.3-сурет. Үш буынды тісті беріліс

3.8.3-суретте көрсетілген қозғалмайтын өсті тісті берілістің беріліс қатынасы мынаған тең

$$u_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (3.8.1)$$

мұндағы u_{12} – айналудың 1 тісті доңғалағынан 2 тісті доңғалағына берілу кезіндегі беріліс қатынасы.

Егер доңғалақтар бір бағытта айналатын болса, онда (+) таңбасы қойылады.

Егер доңғалақтар әртүрлі бағытта айналса, беріліс қатынасын теріс таңбамен алу шартталған. Сондықтан, екі доңғалақтың сыртқы ілінісінде берілістік қатынасы теріс санды, ал ішкі ілінісінде – оң санды болады.

Беріліс қатынасын геометриялық өлшемдер арқылы және доңғалақтың тістер саны арқылы өрнектеуге болады. Кинематикалық көзқарас тұрғысынан, $r_1=O_1P$ және $r_2=O_2P$ радиусты центроидтар (бастапқы шеңбер) 1 және 2 доңғалақтар айналған кезде бір - біріне қатысты дөңгелене жылжиды. P нүктесі жылдамдықтың салыстырмалы қозғалысында лездік центрі болып табылады. P нүктесінде екі доңғалақтың жылдамдығы бірдей, себебі олар бір-біріне қатысты сырғымайды, сондықтан

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2.$$

Беріліс қатынасы үшін оның анықтамасынан (3.8.1) өрнегін қолданып, доңғалақтың геометриялық өлшемдері арқылы беріліс қатынасы үшін өрнекті келесі түрде аламыз

$$u_{12} = \pm \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.8.2)$$

Анықталған шеңбер бойынша өлшенген екі көршілес тістердің бірдей нүктелері арасындағы t қашықтықты осы шеңбер бойынша қадамы деп атайды. Демек, тісті ілініс беретін тісті доңғалақтың бастапқы шеңбер бойынша қадамы біркелкі болуы қажет. Сонда төмендегі теңдіктегі орнын оңай көрсетуге болады

$$2\pi r_1 = tz_1, \quad 2\pi r_2 = tz_2.$$

Екінші теңдікті біріншіге бөліп және алынған қатынасты (3.8.2) теңдігіне қойып, тістер саны арқылы беріліс қатынасы үшін мынандай өрнекті аламыз

$$u_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (3.8.3)$$

Практикада ілініс модулі деп аталынатын тісті доңғалақтың геометриясын анықтайтын m шамасы қолданылады. Ілініс модулі қадамның π санына қатынасына тең

$$m = \frac{t}{\pi}.$$

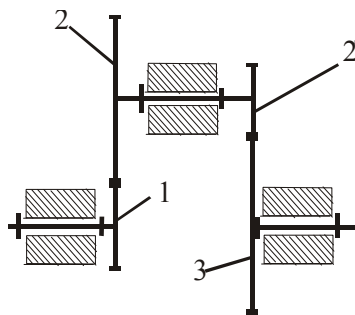
Тісті доңғалақ модулі көбінесе беріктік шартынан анықталады. Модуль шамасы стандартқа сәйкес таңдалынады. Ілініс жасайтын екі тісті доңғалақтар бірдей модульді болулары қажет. Модуль шамасы және тістер саны арқылы тісті доңғалақтың барлық геометриялық өлшемдері өрнектеледі, мысалы, бастапқы шеңбер радиусы

$$r = mz / 2. \quad (3.8.4)$$

Практикада көбінесе шамасы бойынша беріліс қатынасын қайта болдыру талап етіледі. Бұл жағдайда қарапайым үшбуынды механизм жеткіліксіз болып шығады, сондықтан көпсатылы тісті механизмдерді қолданады.

Егер *БМ*-ның жетекші буыны жетектегі буынға қарағанда үлкен бұрыштық жылдамдыққа ие болса, онда мұндай механизм редуктор деп аталынатынын ескеру қажет. Редуктор бұрыштық жылдамдықты төмендетеді. Егер, керісінше жетекші доңғалақ жетектегімен салыстырғанда кіші бұрышты жылдамдыққа ие болса, онда мұндай *БМ* мультипликатор деп аталынады. Мультипликатор бұрыштық жылдамдықты жоғарылатады.

Көпбаспалдақты тісті берілісте әрбір ілініс саты деп аталады. Әрбір сатының берілістік қатынасы (3.8.1 – 3.8.5) теңдіктеріне сәйкес анықталынады.

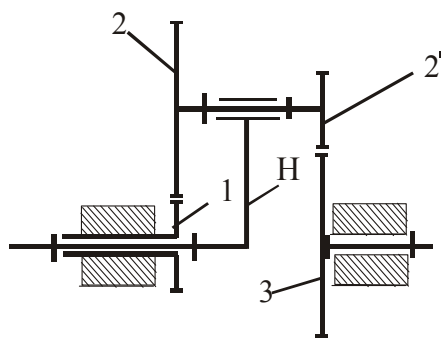


3.8.4-сурет. Екісатылы беріліс

Өстердің қозғалмалы орналасуларымен көпсатылы берілістің берілістік қатынасы өзінің таңбасымен алынған жеке сатылардың беріліс қатынасының туындысына тең, яғни

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k u_{12} \dots u_{(n-1)n}, \quad (3.8.5)$$

мұндағы k – сыртқы ілініс саны.



3.8.5-сурет. Планетарлық механизм

Айналмалы қозғалысты түрлендіру үшін сонымен қатар, қозғалмалы өсті тісті берілістерді қолданады. Қозғалмалы өсті көпсатылы тісті берілістерді планетарлық механизмдер деп атайды. Егер планетарлық механизмдер бірден үлкен қозғалыс дәрежесіне ие болса, онда олар дифференциалдық механизмдер деп аталынады. 3.8.5-суретте 2 және 2' доңғалақтарынан құралған тістергіш блогының өсі қозғалмалы және H жетектеуішпен бірге айналатын планетарлық механизм көрсетілген.

Планетарлық механизмнің беріліс қатынасын анықтау үшін қозғалысты айналу әдісін қолданайық. Механизмнің барлық буындарына жетектеуіштің бұрыштық жылдамдығына тең, бірақ қарама-қарсы бағыттағы бұрыштық жылдамдықты ($-\omega_H$) береміз. Сонда механизм буындарының бұрыштық жылдамдықтары басқа мәндерге ие қозғалмайтын өсті механизмге айналады, яғни толығырақ айтқанда: доңғалақтың 1-бұрыштық жылдамдығы $\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H = -\omega_H$ (жақшадағы индекс қозғалмайтын буын нөмірін көрсетеді, доңғалақ 1- шарт бойынша қозғалмайды); серіктің (сателлиттің) бұрыштық жылдамдығы: $\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H$; 3-ші буынның бұрыштық жылдамдығы

$$\omega_3^{(H)} = \omega_3 - \omega_H.$$

Сонда, айналдырылған механизмнің қозғалмайтын осьті беріліс қатынасы (4.5) формула көмегімен анықталуы мүмкін

$$u_{13}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{-\omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = 1 - u_{H3}.$$

Осы формуладан планетарлық редуктордың беріліс қатынасы үшін өрнек алуға болады

$$u_{H3} = 1 - u_{13}^{(H)}. \quad (3.8.6)$$

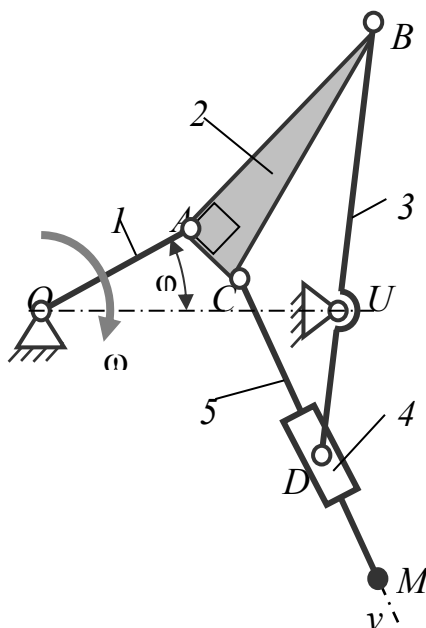
Айналдырылған механизм қозғалмайтын осьті механизм болып табылатындықтан оның беріліс қатынасы тісті доңғалақтың тістер санының қатынасы арқылы анықталуы мүмкін. Жоғарыда анықталғандай

$$u_{13}^{(H)} = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2}. \quad (3.8.7)$$

(3.8.6) және (3.8.7) теңдіктерін бірігіп шешуі планетарлық механизмнің беріліс қатынасы үшін қажетті бастапқы мәнін береді. Басқа түрлі планетарлық механизмдердің беріліс қатынастарын қозғалысты айналдыру негізінде осындай белгілерді жүргізу арқылы табуға болады.

3.9 «Механизмдерді кинематикалық және кинетостатикалық талдаулар» тақырыбы бойынша мысал есеп

Мысал. Екінші класты жазық иінтіректі механизмді кинематикалық және кинетостатикалық талдау



3.9.1-сурет. Алты буынды механизм сұлбасы

3.9.1-кесте

ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{AC}	l_{CM}	$l_{BC} = l_{OU} = l_{BU}$	l_{DU}
c^{-1}	$^\circ$	M					
15	15	0,05	0,096	0,028	0,18	0,1	0,06

Механизмнің құрылымдылық талдау

Зерттелінетін топсалы-иінтіректі механизм жазық механизм болып табылады, сондықтан қозғалыс дәрежесін анықтау үшін П.Л. Чебышев формуласын қолданып, анықтаймыз

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Алынған $W = 1$. мәні қарастырылып отырған механизмде бір жетекші буын бар екенін көрсетеді, ол иінтірек деп аталады. Қалған буындар Ассур топтарын құрады. Қарастырылып отырған механизм бір жетекші буыннан және екі екітармақты топтардан тұрады және екінші класты механизм қатарына жатады.

Механизмді Ассур топтарына жіктеу ары қарай кинематикалық талдауларды жеңілдіктер тудырады.

$k = 6$ – звенолардың жалпы саны,

$n = 5$ – қозғалмалы звенолар саны,

$p_5 = 7$ – V-класты кинематикалық жұптар саны.

$O(6,1)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

$A(1,2)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

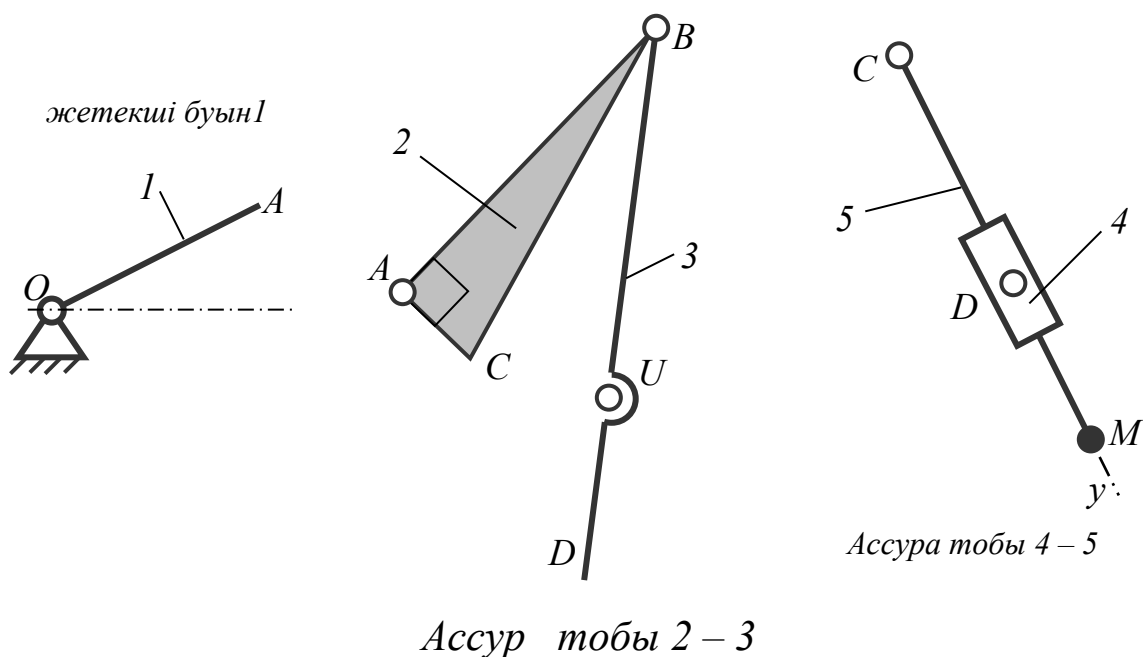
$B(2,3)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

$C(2,5)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

$U(6,3)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

$D_1(3,4)$ – V-класты кинематикалық жұп (айналмалы);

$D_2(4,5)$ – V-класты кинематикалық жұп (ілгерілемелі).



3.9.2-сурет. Механизмді Ассур топтарына жіктеу

Механизм 2-класты екі Ассур топтарын бастапқы буынға жалғастыру арқылы құрылған:

- 2 және 3 буындар құрамында болатын 1-түрдегі топтан;

- 4 және 5 буындары құрамында болатын 3-түрдегі топтан. 5-буынның D нүктесімен түйісетін нүктесін D_5 деп белгілейміз.

Механизмнің құрылыс формуласы: $I(0,1) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5)$.

Құрылыс формуласы бойынша жетекші I-звено болатын жалғастырылған топтардың ең жоғрағы классы екінші класс болғандықтан, берілген механизмнің классы екінші класс. (У.А. Джолдасбеков классификациясы бойынша).

Механизмнің орын- жағдайлар жобасы тұрғызу

Механизмнің орын жобасы деп, қабылданған уақыт мезетіндегі буындар өз-ара орналасуының графикалық кескіндерін айтады. Механизм қозғалған кезінде барлық уақытта буындарының орналасуы өзгереді, оның өзгерісін қадағалау үшін, тізбектелген орнын тұрғызады. Мұндай тұрғызу қайтымды қозғалыс жасайтын механизм үшін орынды. Мысалы, иінтіректің бір айналысы уақыт периодына тең. Осындай механизмнің 12 – орын-жағдайлар жобасын тұрғызады.

Механизмнің орын – жағдайлар жобасын тұрғызуды мынадай тәртіппен орындаймыз.

Сызбада қозғалмайтын O және U өстерді белгілейміз (3.8.1–сурет).

Сызбада жетекші буыны кескіндейтін (OA) кесіндісінің ұзындығын 50 мм деп қабылдаймыз. Онда механизмнің сұлба масштабы

$$\mu_l = l_{OA} / (OA) = 0,05 / 50 = 0,001 \text{ м/мм.}$$

Егер осы буын бірқалыпты айналмалы қозғалыста болатын және толық айналыс жасайтын болса, онда A нүктесі сызатын шеңберді тең 12 (18 немесе 24) бөлікке бөлеміз. Бастапқы буынның әрбір орнын анықталған нөмір арқылы белгілейміз және осы нөмір ары қарай барлық механизмнің жобасына қатысты болады. Қабылданған масштаб бойынша $AB, BU, OU, AC, BC, DU, CM$, кесінділерінің ұзындықтарын есептейміз

$$(AB) = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0,096}{0,001} = 96 \text{ мм};$$

$$(BU) = \frac{l_{BU}}{\mu_1} = \frac{0,1}{0,001} = 100 \text{ мм};$$

$$(OU) = \frac{l_{OU}}{\mu_1} = \frac{0,1}{0,001} = 100 \text{ мм};$$

$$(AC) = \frac{l_{AC}}{\mu_1} = \frac{0,028}{0,001} = 28 \text{ мм};$$

$$(BC) = \frac{l_{BC}}{\mu_1} = \frac{0,1}{0,001} = 100 \text{ мм};$$

$$(DU) = \frac{l_{DU}}{\mu_1} = \frac{0,06}{0,001} = 60 \text{ мм},$$

$$(CM) = \frac{l_{CM}}{\mu_1} = \frac{0,18}{0,001} = 180 \text{ мм},$$

$$\varphi_1 = 15^\circ.$$

Механизмнің орын-жағдайлар жобасын тұрғызуды мынадай тәртіппен орындаймыз.

Сызбада қозғалмайтын O және U нүктелерін белгілейміз. Бастапқы берілген $\varphi_1 = 15^\circ$ бұрышына сәйкес жетекші буынның орнын тұрғызамыз және A нүктесінің орнын анықтаймыз. 2 және 3 буын құрамында болатын топтың орнын тұрғызамыз. Бастапқы буын орын жобасын тұрғызу орындалғаннан кейін, 2–буын бойында жататын B нүктесінің сәйкес орындарын анықтаймыз. Бұл үшін циркуль көмегімен (BU) кесіндісінің ұзындығына тең центрі U нүктесінде болатын шеңбер доғасын және A нүктесінен радиусы AB –ға тең шеңбер доғасын сызамыз. B нүктесінің орны шеңбер доғаларының қиылысу нүктесінде жатады. B нүктесінен радиусы BC –ға, ал A нүктесінен радиусы AC –ға тең шеңбер доғаларын сызамыз. C нүктесінің орны шеңбер доғаларының қиылысу нүктесінде жатады. (BU) кесіндісінің жалғасынан түзу бойынан D нүктесінің орнын аламыз. B және U нүктелері арқылы S_u бағытын бағытын көрсетеміз және оның бойынан (CM) кесіндісін өлшеп салып, M нүктесінің орнын анықтаймыз.

Жылдамдықтар жобасын тұрғызу

Механизмнің жылдамдықтар және үдеулер жобасы оның орны туралы мәселені шешкеннен кейін орындалады. Бірінші тұрақты ω_1 бұрыштық жылдамдықпен айналатын жетекші буында жататын A

нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз. Бұл нүкте жылдамдығының шамасы

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{OA} = 15 \cdot 0,05 = 0,75 \frac{m}{c}.$$

Оның бағыты OA буынының өсіне перпендикуляр бағытталады. Жылдамдықтар жобасының полюсі деп аталатын кез келген p нүктесінен (pa) кесіндісін өлшеп саламыз.

(pa) кесіндісінің ұзындығын: $(pa) = (OA) = 50mm$ деп қабылдаймыз. Жылдамдықтар масштаб коэффициентін есептейміз

$$\mu_v = \frac{v_A}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot l_{OA}}{(pa)} = \frac{\omega_1 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(pa)} = \omega_1 \cdot \mu_l = 0,015 \frac{m/c}{mm}.$$

2 және 3 буындарының Ассур тобы үшін жылдамдықтар жобасын тұрғызамыз. Бұл буындар тобында барлық кинематикалық жұп айналмалы. B нүктесінің жылдамдығын екі векторлық теңдеулер жүйесі арқылы анықтаймыз

$$1) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_{BA} \perp \overline{BA},$$

$$2) \quad \bar{v}_B = \bar{v}_U + \bar{v}_{BU}, \quad \bar{v}_{BU} \perp \overline{BU}.$$

Мұндағы:

\bar{v}_A - A нүктесінің жылдамдығы, бізге белгілі;

\bar{v}_{BA} - BA буыны A топса өсіне қатысты айнала қозғалғандағы B нүктесінің жылдамдығы, шамасы $v_{BA} = \omega_2 \cdot l_{BA}$;

ω_2 – буын BA -ның бұрыштық жылдамдығы, шамасы белгісіз, ал бағыты BA түзуіне перпендикуляр;

\bar{v}_U – тірек нүктесінің жылдамдығы (ол нөлге тең, себебі тірек қозғалмайды);

\bar{v}_{BU} – BU буыны U топса өсіне қатысты айнала қозғалғандағы B нүктесінің жылдамдығы, шамасы $v_{BU} = \omega_3 \cdot l_{BU}$;

ω_3 – буын BU -ның бұрыштық жылдамдығы, шамасы белгісіз, ал бағыты BU түзуіне перпендикуляр.

Жылдамдықтар жобасын келесі рет бойынша тұрғызамыз.

Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің графикалық шешімін табамыз: жылдамдық жобасының a нүктесінен \bar{v}_{BA} жылдамдығын кескіндейтін BA буынына перпендикуляр түзу жүргіземіз.

Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің графикалық шешімін табамыз: U нүктесінің жылдамдығы нөлге тең болғандықтан u нүктесі p полюспен түйіндеседі, сондықтан p нүктесінен \bar{v}_{BU}

жылдамдығын кескіндейтін BU буынына перпендикуляр түзу жүргіземіз. Осы жүргізілген екі перпендикуляр түзулер b нүктесінде қиылысады.

Полюс p нүктесімен b нүктесін қосатын сәуле B нүктесінің абсолюттық жылдамдығын кескіндейді. O нүктесін полюспен түйіндестіреміз.

C нүктесінің жылдамдығын үшбұрыштардың ұқсастық ережесі бойынша анықтаймыз: $\Delta(abc) \sim \Delta(ABC)$. a нүктесінен (ab) кесіндісіне перпендикуляр түзу жүргіземіз. Осы түзудің бойында c нүктесі жатыр. Пропорция құрамыз

$$\frac{(ac)}{(ab)} = \frac{(AC)}{(AB)} \Rightarrow (ac) = (ab) \cdot \frac{(AC)}{(AB)} = 120 \cdot \frac{28}{96} = 35 \text{ мм.}$$

Сонан соң осы түзудің бойынан (ac) кесіндісін өлшеп саламыз.

c нүктесін жылдамдық жобасы полюсімен p қосамыз. Полюстен шыққан pc сәуле C нүктесінің абсолют жылдамдығын кескіндейді.

D нүктесінің жылдамдығын ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз: бұл жылдамдық векторының соңы (bu) кесіндісі жалғасында жатуы керек.

d нүктесінің жылдамдығын келесі пропорция құру арқылы анықтаймыз

$$\frac{(pd)}{(pb)} = \frac{(UD)}{(UB)} \Rightarrow (pd) = (pb) \cdot \frac{(UD)}{(UB)} = 73 \cdot \frac{60}{100} \approx 44 \text{ мм.}$$

4 және 5 буындар Ассур тобының жылдамдықтар жобасын тұрғызуға көшеміз, ол үшін төмендегі екі векторлық теңдеулер жүйесінің графикалық шешімін табамыз

$$1) \quad \vec{v}_{D_5} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D_5D}, \quad \vec{v}_{D_5D} \parallel \vec{C}_y,$$

$$2) \quad \vec{v}_{D_5} = \vec{v}_C + \vec{v}_{D_5C}, \quad \vec{v}_{D_5C} \perp \vec{C}_y.$$

Мұндағы:

5-буынның D_5 нүктесі D нүктесінің астында жатады, жылдамдық \vec{v}_D алдыңғы тұрғызуда анықталған (кесінді (pd));

D_5 нүктесінің D нүктесіне қатысты салыстырмалы жылдамдығы Cy түзуіне параллель бағытталады;

C нүктесінің жылдамдығы \vec{v}_C алдыңғы тұрғызуда анықталған (кесінді (pc));

5-буынның D_5 нүктесінің C нүктесіне қатысты айнала қозғалғандағы жылдамдығының шамасы

$$v_{D_5C} = \omega_3 \cdot l_{D_5C} \text{ ал бағыты } \perp \overline{Cy}.$$

Бірінші векторлық теңдеудің графикалық шешімін табамыз, ол үшін жылдамдық жобасының d нүктесі арқылы Cy түзуіне параллель түзу жүргіземіз.

Жоғарыда көрсетілген екінші теңдеудің графикалық шешімін табамыз, ол үшін жылдамдық жобасының c нүктесінен $\perp \overline{Cy}$ түзуін жүргіземіз. Осы екі түзулер қиылысатын нүкте d_5 жылдамдық \overline{v}_{D_5} векторының соңын көрсетеді (кесінді (pd_5)). M нүктесінің жылдамдық вектор соңы m нүктесін ұқсастықтар ережесі қатынасымен анықтаймыз

$$\frac{(cm)}{(cd_5)} = \frac{(CM)}{(CD_5)} \Rightarrow (cm) = (cd_5) \cdot \frac{(CM)}{(CD_5)} = 28,5 \cdot \frac{180}{67} \approx 76,5 \text{ мм.}$$

m нүктесін p полюсімен қосамыз. Вектор \overline{pm} нүкте M – нің абсолют жылдамдығын кескіндейді.

Осымен механизмінің жылдамдықтар жобасын тұрғызу аяқталады.

B нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_B = (pb) \cdot \mu_v = 73 \cdot 0,015 \approx 1,1 \text{ м/с.}$$

C нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_C = (pc) \cdot \mu_v = 34 \cdot 0,015 = 0,51 \text{ м/с.}$$

B нүктесінің A нүктесіне қатысты жылдамдығын анықтаймыз

$$v_{BA} = (ba) \cdot \mu_v = 95 \cdot 0,015 = 1,425 \text{ м/с.}$$

D нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_D = (pd) \cdot \mu_v = 44 \cdot 0,015 = 0,66 \text{ м/с.}$$

D_5 нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_{D_5} = (pd_5) \cdot \mu_v = 50,5 \cdot 0,015 \approx 0,78 \text{ м/с.}$$

D_5 нүктесінің C нүктесіне қатысты жылдамдығын анықтаймыз

$$v_{D_5C} = (cd_5) \cdot \mu_v = 28,5 \cdot 0,015 \approx 0,43 \text{ м/с.}$$

D_5 нүктесінің D нүктесіне қатысты жылдамдығын анықтаймыз

$$v_{D_5D} = (dd_5) \cdot \mu_v = 15 \cdot 0,015 = 0,225 \text{ м/с.}$$

M нүктесінің жылдамдығын анықтаймыз

$$v_M = (pm) \cdot \mu_v = 93 \cdot 0,015 \approx 1,4 \text{ м/с.}$$

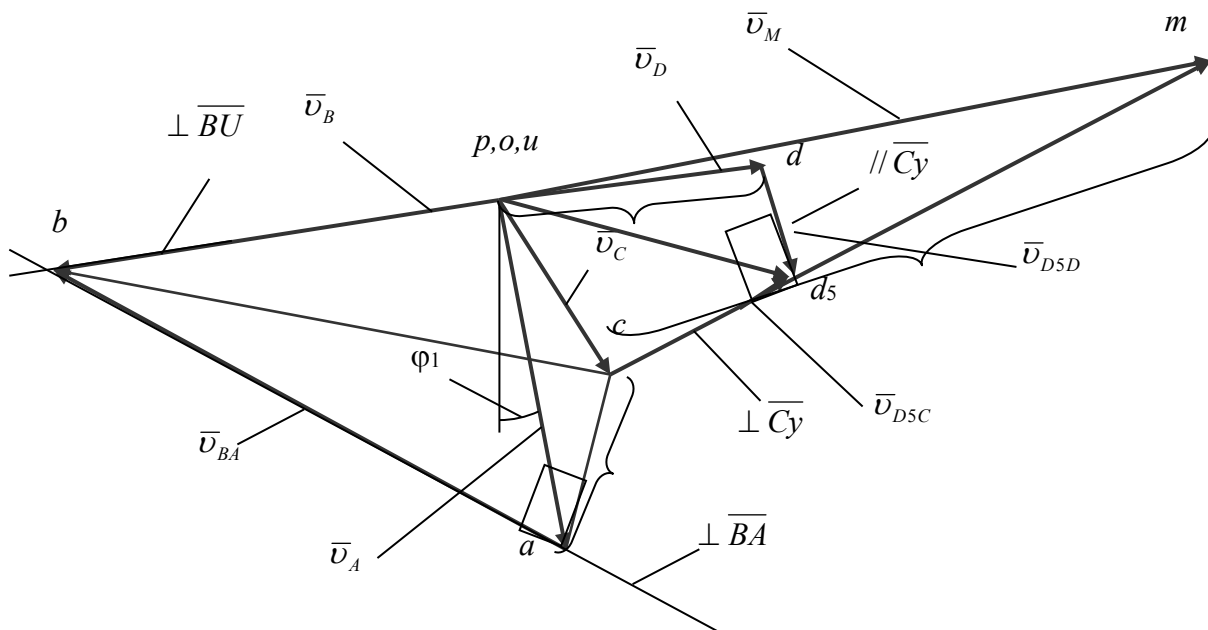
AB буынының бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l_{AB}} = \frac{(ba) \cdot \mu_v}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(ba) \cdot \omega_1 \cdot \omega_l}{(AB) \cdot \omega_l} = \frac{(ba)}{(AB)} \cdot \omega_1 = \frac{95}{96} \cdot 15 \approx 14,84 \text{ с}^{-1}.$$

Буын AB –ның бұрыштық жылдамдығы ω_2 –нің бағытын былай анықтаймыз: \bar{v}_{BA} векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2–буын сағат тіліне қарсы айнала қозғалатынын көреміз. 2–буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

BD буынының бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_3 = \frac{v_{BU}}{l_{BU}} = \frac{(pb) \cdot \omega_v}{(BU) \cdot \omega_1} = \frac{(pb) \cdot \omega_1 \cdot \mu_l}{(BU) \cdot \omega_1} = \frac{(pb)}{(BU)} \cdot \omega_1 = \frac{73}{100} \cdot 15 = 10,5 \text{ c}^{-1}.$$



3.9.3-сурет. Механизмнің жылдамдықтар жобасы

Буын BD –ның бұрыштық жылдамдығы ω_3 –тің бағыты ω_2 –нің бағыты анықталған жолмен анықталады. \bar{v}_{BU} векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса U өсін 3–буын сағат тіліне қарсы айнала қозғалатынын көреміз. 3–буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

CM буынының бұрыштық жылдамдығын анықтаймыз

$$\omega_5 = \frac{v_{D_5C}}{l_{DC}} = \frac{(cd_5) \cdot \mu_v}{(DC) \cdot \omega_1} = \frac{(cd_5) \cdot \omega_1 \cdot \mu_l}{(DC) \cdot \omega_1} = \frac{(cd_5)}{(DC)} \cdot \omega_1 = \frac{28,5}{67} \cdot 15 \approx 6,38 \text{ c}^{-1}.$$

Буын CM –нің бұрыштық жылдамдығы ω_5 –тің бағыты ω_2 –нің бағыты анықталған жолмен анықталады. \bar{v}_{D_5C} векторын ойша D нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса C өсін 5–буын сағат тіліне қарсы айнала қозғалатынын көреміз. 5–буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

Үдеулер жобасын тұрғызу

Нүктелер үдеулері үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен анықталады. Бірінші тұрақты ω_1 бұрыштық жылдамдықпен айналатын жетекші буынның бойында жататын A нүктесінің үдеуін анықтаймыз. A нүктесінің толық үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau.$$

$$\varepsilon_1 = 0 \text{ болғандықтан жанама құраушы үдеуі } \bar{a}_A^\tau = 0.$$

Онда $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$ және A нүктесінің үдеуі жеңіл анықталады

$$a_A = \omega_1^2 l_{OA}.$$

Сонан соң 2 және 3 буындары үшін үдеулер жобасын тұрғызамыз. Бұл буындардың қозғалысы жазық параллель және айналмалы болғандықтан, теориялық механикасы пәнінен белгілі теореманы пайдаланамыз: *жазық фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен осы нүктенің полюске қатысты алынған жылдамдығының геометриялық қосындысына тең.*

Үдеулер жобасын тұрғызу үшін келесі векторлық теңдеулер жүйесін жазамыз

$$1) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad \bar{a}_{BA}^n \parallel \overline{BA}, B \rightarrow A, \quad \bar{a}_{BA}^\tau \perp \overline{BA};$$

$$2) \quad \bar{a}_B = \bar{a}_U + \bar{a}_{BU}^n + \bar{a}_{BU}^\tau, \quad \bar{a}_{BU}^n \parallel \overline{BU}, B \rightarrow U, \quad \bar{a}_{BU}^\tau \perp \overline{BU},$$

мұндағы $a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}$.

Бұл үдеу бағыты OA түзуіне параллель A нүктесінен O нүктесіне қарай бағытталады.

Айналмалы қозғалыстағы AB буынындағы B нүктесінің полюс A -ға қатысты нормаль құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB} = \frac{v_{BA}^2}{l_{AB}} = \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l},$$

бұл үдеу бағыты AB түзуіне параллель B нүктесінен A нүктесіне қарай бағытталады ($B \rightarrow A$).

Айналмалы қозғалыстағы AB буынындағы B нүктесінің полюс A -ға қатысты жанама құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_{AB},$$

AB буынының бұрыштық үдеуі ε_2 белгісіз, ал бағыты AB түзуіне перпендикуляр бағытталады.

6-буыны қозғалмайтын болғандықтан U нүктесінің үдеуі $\bar{a}_U = 0$.

Айналмалы қозғалыстағы BU буынындағы B нүктесінің U нүктесіне қатысты нормаль құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BU}^n = \omega_3^2 \cdot l_{BU} = \left(\frac{v_{BU}}{l_{BU}} \right)^2 \cdot l_{BU} = \frac{v_{BU}^2}{l_{BU}} = \frac{(pb)^2 \cdot \mu_v^2}{(BU) \cdot \mu_l},$$

бұл үдеу бағыты BU түзуіне параллель B нүктесінен U нүктесіне қарай бағытталады ($B \rightarrow U$).

Айналмалы қозғалыстағы BU буынындағы B нүктесінің U нүктесіне қатысты жанама құраушы үдеуі мынадай формуламен анықталады

$$a_{BU}^r = \varepsilon_3 l_{BU},$$

BU буынының бұрыштық үдеуі ε_3 белгісіз, ал бағыты BU түзуіне перпендикуляр бағытталады.

Үдеулер жобасын тұрғызуды төмендегі тәртіп тізбегі бойынша жүргіземіз.

Жоғарыда көрсетілген бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз, ол үшін OA түзуіне параллель, үдеу жобасы полюсі π -ден \bar{a}_A үдеуін кескіндейтін (πa) кесіндісін өлшеп саламыз. Егер (πa) кесіндісінің ұзындығын 50 мм-ге тең болса, онда үдеу масштабы мынадай болады

$$\mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot l_{OA}}{(\pi a)} = \frac{\omega_1^2 \cdot (OA) \cdot \mu_l}{(\pi a)} = \omega_1^2 \cdot \mu_l = 15^2 \cdot 0,001 = 0,225 \frac{m/c^2}{mm} \cdot a$$

нүктесінен \bar{a}_{BA}^n үдеуін кескіндейтін (an_{BA}) кесіндіні өлшеп саламыз. (an_{BA}) кесіндісінің ұзындығы мынадай формуламен есептеледі

$$(an_{BA}) = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_2^2 \cdot l_{AB}}{\mu_a} = \frac{\left(\frac{v_{BA}}{l_{AB}} \right)^2 \cdot l_{AB}}{\mu_a} = \frac{(ba)^2 \cdot \mu_v^2}{(AB) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(ba)^2}{(AB)} = \frac{95^2}{96} \approx 94_{mm}.$$

n_{BA} нүктесі арқылы AB түзуіне перпендикуляр \bar{a}_{BA}^r үдеуінің бағытын жүргіземіз. Жоғарыда көрсетілген екінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызуға көшеміз. Бұл үшін жоба полюсі π -ден \bar{a}_U үдеу векторын саламыз, бірақ ол нөлге тең, сондықтан, u нүктесі π нүктесімен түйіседі. π нүктесінен \bar{a}_{BC}^n үдеуін кескіндейтін (πn_{BU}) кесіндісін өлшеп саламыз. (πn_{BU}) кесіндісінің ұзындығы мынадай формуламен есептеледі

$$(\pi n_{BU}) = \frac{a_{BU}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_3^2 \cdot l_{BU}}{\mu_a} = \frac{\left(\frac{v_{BU}}{l_{BU}}\right)^2 \cdot l_{BU}}{\mu_a} = \frac{(pb)^2 \cdot \mu_v^2}{(BU) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(pb)^2}{(BU)} = \frac{73^2}{100} \approx 53 \text{ мм.}$$

n_{BU} нүктесі арқылы BU түзуіне перпендикуляр \bar{a}_{BU}^r үдеуінің бағытын жүргіземіз. Осы түзу мен AB – перпендикуляр түзудің қиылысқан нүктесі b нүктесін береді. \overline{pb} векторы B нүктесінің үдеу векторы болады. a және b нүктелерін қосып \bar{a}_{BA} үдеу векторын аламыз. o нүктесін π нүктесімен беттестіреміз. C нүктесінің үдеуін жылдамдықтар жобасындағы сияқты үшбұрыштардың ұқсастықтары ережесі бойынша анықтаймыз

$$\Delta(abc) \sim \Delta(ABC).$$

Пропорция құрамыз

$$\frac{(ac)}{(ab)} = \frac{(AC)}{(AB)} \Rightarrow (ac) = (ab) \cdot \frac{(AC)}{(AB)} = 120 \cdot \frac{28}{96} = 35 \text{ мм.}$$

D нүктесінің үдеу векторының соңы d нүктесін ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз

$$\frac{(\pi d)}{(\pi b)} = \frac{(UD)}{(UB)} \Rightarrow (\pi d) = (\pi b) \cdot \frac{(UD)}{(UB)} = 169 \cdot \frac{60}{100} \approx 101,5 \text{ мм.}$$

4 және 5 буындар Ассур тобына үдеулер жобасын тұрғызуға көшеміз. Бірінші 5-буынға қатысты D_5 нүктесінің үдеуін анықтаймыз.

Ол үшін төмендегі векторлық теңдеулер жүйесін пайдаланамыз

$$1) \quad \bar{a}_{D_5} = \bar{a}_C + \bar{a}_{D_5C}^n + \bar{a}_{D_5C}^r, \quad \bar{a}_{D_5C}^n \parallel \overline{Cy}, \quad D_5 \rightarrow C, \quad \bar{a}_{D_5C}^r \perp \overline{Cy};$$

$$2) \quad \bar{a}_{D_5} = \bar{a}_D + \bar{a}_{D_5D}^{cor} + \bar{a}_{D_5D}^r, \quad \bar{a}_{D_5D}^{cor} \perp \overline{Cy}, \quad \bar{a}_{D_5D}^r \parallel \overline{Cy}.$$

Мұндағы:

\bar{a}_{D_5} 4-буынның D нүктесімен сәйкес келетін 5-буынының D_5 нүктесінің үдеуі;

\bar{a}_C 2-буынның C нүктесінің үдеуі (2 және 3 буындардан тұратын Ассур тобына тұрғызылған үдеулер жобасын тұрғызу кезінде анықталған, (πc) кесіндісі кескіндейді);

$\bar{a}_{D_5C}^n$ векторы C нүктесіне қатысты 5-буынның айнала қозғалғандағы D_5 нүктесінің нормаль құраушы үдеуі, шамасы

$$a_{D_5C}^n = \omega_5^2 \cdot l_{DC} = \left(\frac{v_{D_5C}}{l_{DC}}\right)^2 \cdot l_{DC} = \frac{v_{D_5C}^2}{l_{DC}} = \frac{(cd_5)^2 \cdot \mu_v^2}{(DC) \cdot \mu_l},$$

Бұл удеу бағыты $\overline{C_5}$ сызығына параллель бағытталады.

$\overline{a_{D_5C}^r}$ векторы D_5 нүктесінің жанама құрашы үдеуі шамасы $a_{D_5C}^r = \varepsilon \cdot l_{DC}$, бұл удеу $\overline{C_5}$ сызығына перпендикуляр;

$\overline{a_D}$ векторы D нүктесінің үдеуі;

$\overline{a_{D_5D}^{cor}}$ - D_5 нүктесінің 4-буынға қатысты *Кориолис үдеуі*, шамасы

$$a_{D_5D}^{cor} = 2\omega_4 \cdot v_{D_5D} = 2 \frac{v_{D_5C}}{l_{DC}} \cdot v_{D_5D}, \quad (\omega_4 = \omega_5 \quad \text{және} \quad \omega_5 = v_{D_3D} / l_{DC})$$

болғандықтан) және $\overline{v_{D_3C}}$ жылдамдық векторының бағытын, тасымал қозғалыс ω_5 бұрыштық жылдамдық бағытымен 90° бұрышқа бұрғандағы бағытты қабылдайды (5 – звеноның қозғалысы);

$\overline{a_{D_5D}^r}$ - D_5 нүктесінің D нүктесіне қатысты салыстырмалы үдеуі, $\overline{C_5}$ түзуіне параллель, шамасы белгісіз.

Жоғарыдағы бірінші векторлық теңдеудің шешімін тұрғызамыз. c нүктесінен $\overline{a_{D_5C}^n}$ үдеуін кескіндейтін (cn_{D_5C}) кесінді тұрғызамыз, шамасы

$$(cn_{D_5C}) = \frac{a_{D_5C}^n}{\mu_a} = \frac{\omega_5^2 \cdot l_{DC}}{\mu_a} = \frac{v_{D_5C}^2}{l_{DC} \cdot \mu_a} = \frac{(cd_5)^2 \cdot \mu_v^2}{(DC) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(cd_5)^2}{(DC)} \approx 12 \text{ мм},$$

n_{D_5C} нүктесінен $\overline{C_5}$ түзуіне перпендикуляр $\overline{a_{D_5C}^r}$ үдеу векторының бағытын тұрғызамыз.

Екінші теңдеудің шешімін тұрғызуға көшеміз. d нүктесінен (dk) кесіндісін тұрғызамыз, оның ұзындығы

$$(dk) = \frac{a_{D_5D}^{cor}}{\mu_a} = \frac{2\omega_5 \cdot v_{D_5D}}{\mu_a} = \frac{2(cd_5) \cdot (dd_5) \cdot \mu_v^2}{(DC) \cdot \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{2 \cdot 28.5 \cdot 15}{67} \approx 13 \text{ мм}.$$

k нүктесінен $\overline{C_5}$ түзуіне параллель $\overline{a_{D_5D}^r}$ - D_5 нүктесінің D нүктесіне қатысты салыстырмалы үдеуінің бағытын көрсететін $\overline{C_5}$ түзуіне перпендикуляр түзумен қиылысқанға дейін түзу тұрғызамыз. Қиылысатын d_5 нүктесі (pd_5) кесіндісінің соңы, осы кесінді $\overline{a_{D_5C}^r}$ үдеуін кескіндейді.

M нүктесінің соңы болатын m нүктесінің орнын ұқсастықтар ережесі бойынша анықтаймыз

$$\frac{(cm)}{(cd_5)} = \frac{(CM)}{(CD)} \Rightarrow (cm) = (cd_5) \cdot \frac{(CM)}{(CD)} = 163 \cdot \frac{180}{67} \approx 438 \text{ мм}.$$

Алынған m нүктесін полюспен қосамыз. (πm) сәулесі M нүктесінің абсолюттік үдеуін кескіндейді.

Абсолюттік үдеулерінің шамалары мынадай теңдіктер арқылы анықталады

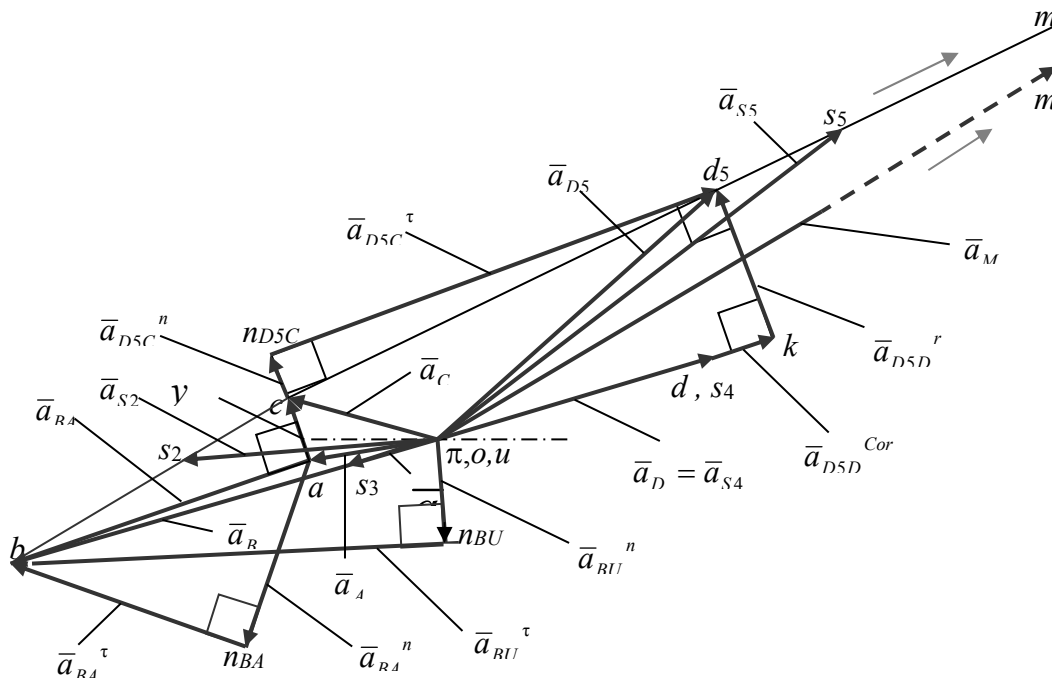
$$\begin{aligned} a_B &= (\pi b) \cdot \mu_a = 169 \cdot 0,225 \approx 38 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, & a_{D5} &= (\pi d_5) \cdot \mu_a \approx 29 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, \\ a_C &= (\pi c) \cdot \mu_a = 67 \cdot 0,225 \approx 15,1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, & a_M &= (\pi m) \cdot \mu_a \approx 89,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, \\ a_D &= (\pi d) \cdot \mu_a = 101,4 \cdot 0,225 \approx 22,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Қозғалмалы буындардың масса центрі үдеулерін ұқсастық ережесі бойынша анықтаймыз. Жобада бұл үдеулер мынадай векторлар: $\bar{\pi s}_1, \bar{\pi s}_2, \bar{\pi s}_3, \bar{\pi s}_5, \bar{\pi s}_4 = \bar{\pi d}$. Осы масса центрі үдеулерінің абсолюттік шамалары былай анықталады

$$\begin{aligned} a_{S1} &= (\pi s_1) \cdot \mu_a = 25 \cdot 0,225 \approx 5,6 \text{ м/с}^2; \\ a_{S2} &= (\pi s_2) \cdot \mu_a = 113 \cdot 0,225 \approx 25,4 \text{ м/с}^2; \\ a_{S3} &= (\pi s_3) \cdot \mu_a = 34 \cdot 0,225 = 7,65 \text{ м/с}^2; \\ a_{S4} &= (\pi s_4) \cdot \mu_a = (\pi d) \cdot \mu_a = 101 \cdot 0,225 \approx 22,7 \text{ м/с}^2; \\ a_{S5} &= (\pi s_5) \cdot \mu_a = 181 \cdot 0,225 \approx 40,7 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

AB буынының бұрыштық үдеу шамасы былай анықталады

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{AB}} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \mu_a}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(AB) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BA}b)}{(AB)} \cdot \omega_1^2 = \frac{72}{96} \cdot 15^2 \approx 169 \text{ с}^{-2}.$$



3.9.4–сурет. Механизмнің үдеулер жобасы

Буын AB –ның бұрыштық үдеуі ε_2 –нің бағытын былай анықтаймыз. \vec{a}_{BA}^τ векторын ойша B нүктесіне қоямыз, полюс ретінде қабылданған топса A өсін 2–буын сағат тіліне қарама қарсы айнала қозғалатынын көреміз. 2–буынның айналыс бағытын доға түрінде көрсетеміз.

BC буынының бұрыштық үдеу шамасы былай анықталады

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BU}^\tau}{l_{BU}} = \frac{(n_{BU}b) \cdot \mu_a}{(BU) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BU}b) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(BU) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{BU}b)}{(BU)} \cdot \omega_1^2 = \frac{161}{100} \cdot 15^2 \approx 362 \text{ с}^{-2}.$$

Буын BC –ның бұрыштық үдеуі ε_3 –тің бағыты ε_2 –нің бағыты анықталған жолмен анықталады.

CM буынының бұрыштық үдеу шамасы былай анықталады

$$\varepsilon_5 = \frac{a_{D5C}^\tau}{l_{DC}} = \frac{(n_{D5C}d_5) \cdot \mu_a}{(DC) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{D5C}d_5) \cdot \omega_1^2 \cdot \mu_l}{(DC) \cdot \mu_l} = \frac{(n_{D5C}d_5)}{(DC)} \cdot \omega_1^2 = \frac{163}{67} \cdot 15^2 \approx 547 \text{ с}^{-2}.$$

Буын CM –нің бұрыштық үдеуі ε_5 –тің бағыты ε_2 –нің бағыты анықталған жолмен анықталады.

Механизмнің күштік талдауы

Механизм буындарының салмағын анықтау

Буындардың m массасын ұзындықтары l және буынның бір метріне келетін меншікті массасы арқылы өрнектейміз

$$m_1 = 0,5 \text{ кг}, \quad m_3 = l_{BD} \cdot q = (l_{BU} + l_{DU}) \cdot q = (0,1 + 0,06) \cdot 0,5 = 0,08 \text{ кг},$$

$$m_5 = l_{CM} \cdot q = 0,18 \cdot 0,5 = 0,09 \text{ кг}.$$

Үшбұрыш буынның массасын ең ұзын l_{BC} қабырғасы, меншікті массасы және $k = 1,2$ коэффициент арқылы анықтаймыз

$$m_2 = m_\Delta = 1,2 l_{BC} \cdot q = 1,2 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 0,06 \text{ кг}.$$

4-буынның массасын $0,01 \text{ кг}$ деп қабылдаймыз.

Буындардың салмақ күштерін анықтаймыз. Еркін түсу үдеуі $g \approx 9,8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$.

$$G_1 = m_1 \cdot g = 0,25 \cdot 9,8 = 2,45 \text{ Н},$$

$$G_2 = m_2 \cdot g = 0,06 \cdot 9,8 = 0,59 \text{ Н},$$

$$G_3 = m_3 \cdot g = 0,08 \cdot 9,8 = 0,784 \text{ Н},$$

$$G_4 = m_4 \cdot g = 0,01 \cdot 9,8 = 0,098 \text{ Н},$$

$$G_5 = m_5 \cdot g = 0,09 \cdot 9,8 = 0,882 \text{ Н}.$$

Механизм буындарының инерция күштерін анықтау

Инерция күштер әсерін тұрғызылған үдеулер планын пайдаланып анықтаймыз. Инерция күші келесі формуламен анықталады

$$\bar{F}_u = -m \cdot \bar{a}_S H,$$

мұндағы:

m – буынының массасы ($кг$);

a_S – буынының масса центрінің үдеуі ($м/с^2$).

Инерция \bar{F}_u күшінің бағыты үдеу \bar{a}_S векторының бағытына қарама-қарсы. Қос күш инерция моменті келесі формуламен анықталады

$$M_u = -I_S \cdot \varepsilon \text{ Нм.}$$

Мұндағы:

I_S – буынның масса центрі арқылы өтетін және қозғалыс жазықтығына перпендикуляр өске қатысты инерция моменті, ($кг \cdot м^2$);

ε – буынның бұрыштық үдеуі, ($с^{-2}$).

Ол әсер ететін жазықтық, буынның қозғалыс жазықтығына параллель және ол буынның бұрыштық үдеуі бағытына қарсы бағытталады.

Иітіректің инерция күшінің шамасы

$$F_{u1} = m_1 \cdot a_{S1} \approx 0,25 \cdot 5,6 \approx 1,4 \text{ Н,}$$

иітіректің масса S_1 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S1} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

2 (бұлғақ)–буынның инерция күші

$$F_{u2} = m_2 \cdot a_{S2} \approx 0,06 \cdot 25,4 \approx 1,52 \text{ Н,}$$

бұлғақтың масса S_2 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S2} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

3 (күйенте)–буынның инерция күші

$$F_{u3} = m_3 \cdot a_{S3} = 0,08 \cdot 7,65 = 0,61 \text{ Н,}$$

күйентенің масса S_3 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S3} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

4 (жылжыма немесе кулиса тасы)-буынның инерция күші

$$F_{u4} = m_4 \cdot a_{S4} \approx 0,01 \cdot 22,7 = 0,23 \text{ Н,}$$

жылжыманың масса S_4 центріне түсіріледі және осы буынның масса центрінің a_{S4} үдеу векторының бағытына қарсы бағытталады.

5 (кулиса)-буынның инерция күші

$$F_{u5} = m_5 \cdot a_{S5} \approx 0,09 \cdot 40,7 = 3,66 \text{ Н.}$$

1–буын бірқалыпты айналмалы қозғалыста болғандықтан, қос күш моменті нөлге тең $M_{u1} = 0$.

2 (бұлғақ)–буынның қос күш инерция моменті

$$M_{u2} = I_{S2} \cdot \varepsilon_2 \approx 0,2m_2 \cdot l_{BC}^2 \cdot \varepsilon_2 \approx 0,2 \cdot 0,06 \cdot 0,1^2 \cdot 169 \approx 0,02 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

ε_2 бұрыштық жылдамдығының бағытына қарама қарсы бағытталады.

3 (күйенте)–буынның қос күш инерция моменті

$$M_{u3} = I_{S3} \cdot \varepsilon_3 \approx 0,1m_3 \cdot l_3^2 \cdot \varepsilon_3 \approx 0,1 \cdot 0,08 \cdot 0,16^2 \cdot 362 \approx 0,074 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

ε_3 бұрыштық жылдамдығының бағытына қарама қарсы бағытталады.

4–буынның қос күш моментін өлшемдері аз болғандықтан нөлге тең деп қабылдаймыз $M_{u4} \approx 0$.

3 (кулиса)– буынның қос күш инерция моменті

$$M_{u5} = I_{S5} \cdot \varepsilon_5 \approx 0,1m_5 \cdot l_5^2 \cdot \varepsilon_5 \approx 0,1 \cdot 0,09 \cdot 0,18^2 \cdot 547 \approx 0,16 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

4 және 5 буындары құрамындағы Ассур тобының күштік талдауы

Ассур тобы статикалық анықталады, сондықтан, тұтас топқа немесе оның жеке буындарына тепе–теңдік тендеулер жүйесін құрамыз

$$\sum \bar{F}_i = 0, \quad \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i) = 0.$$

Осы тендеулердің негізінде, күштер жобасы деп аталатын күштер көпбұрышын тұрғызамыз.

4 және 5 буындары құрамындағы Ассур тобының векторлық тепе-теңдік тендеуін құрамыз

$$\bar{R}_{25} + \bar{F}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{F}_{u4} + \bar{G}_4 + \bar{R}_{35} = 0.$$

Бұл тендеудің құрамында белгісіз мәндер: \bar{R}_{25} реакция күшінің шамасы және бағыты және \bar{R}_{35} реакция күшінің шамасы және бағыты. Оны шешу үшін, яғни векторлық қосындыны тұрғызу үшін, \bar{R}_{25} реакция күшін екі құраушыларға жіктейміз: біреуін буынның өсі бойымен, ал екіншісін буынның өсіне перпендикулярлы бағытта тұрғызамыз (3.8.5–сурет). Бірінші реакция құраушысын τ индекспен, ал екіншісін - n индекспен белгілейміз. Векторлық тепе-теңдік тендеу келесі түрде жазылады

$$\bar{R}_{25}^{\tau} + \bar{R}_{25}^n + \bar{F}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{F}_{u4} + \bar{G}_4 + \bar{R}_{35} = 0.$$

Күш \bar{R}_{25}^{τ} шамасын 5–буынның тепе–теңдігін қарастырып табамыз.

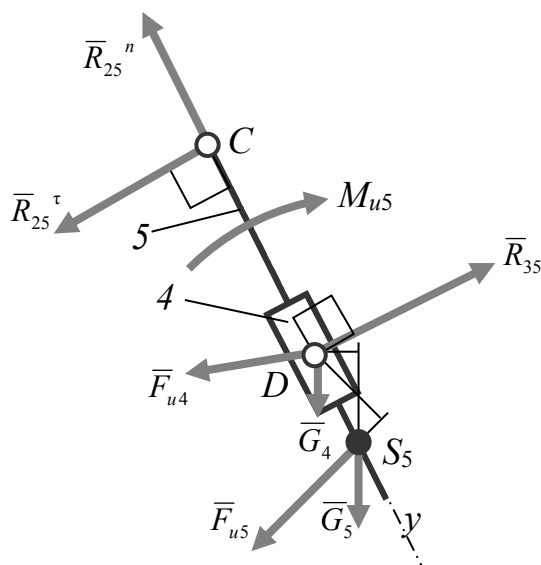
5–буынға түсірілген күштерге D нүктесіне қатысты моменттер тендеуін құрамыз

$$\sum M_D(\bar{F}_i) = 0, \quad R_{25}^{\tau} \cdot l_{DC} - F_{u5} \cdot h_{Fu5} - G_5 \cdot h_{D5} - M_{u5} = 0,$$

Осыдан

$$R_{25}^{\tau} = \frac{F_{u5} \cdot h_{Fu5} + G_5 \cdot h_{G5} + M_{u5}}{l_{DC}} = \frac{3,66 \cdot 0,021 + 0,88 \cdot 0,011 + 0,16}{0,067} \approx 3,69 \text{ Н},$$

мұндағы белгілі күштердің иіні сызбадан анықталады және метрмен өлшенеді.



3.9.5–сурет. 4 және 5 буындары құрамындағы Ассур тобының күштік талдауы

Қалған екі белгісіз күштерді екінші векторлық теңдеу арқылы анықтаймыз. Тепе–теңдік теңдеулер бойынша топтың күштер жобасын $\mu_F = 0,2 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ масштабы бойынша тұрғызамыз.

Ассур тобына қолдануға болатын келесі векторлық қосындыны тұрғызу реті ұсынылады: группа контуры үшін қандай да бір бағыт қабылдаймыз (мысалы, сағат тілінің бағытын) және қабылданған бағыт бойынша күштерді кескіндейтін кесінділерді қабылданған бағытымен өлшеп саламыз (3.9.5–сурет).

$$a \text{ нүктесінен } \bar{R}_{25}^{\tau} \text{ күшін кескіндейтін } (ab) = \frac{R_{25}^{\tau}}{\mu_F} = \frac{3,69}{0,02} \approx 184 \text{ мм},$$

$$b \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u5} \text{ күшін кескіндейтін } (bc) = \frac{F_{u5}}{\mu_F} = \frac{3,66}{0,02} = 183 \text{ мм},$$

$$c \text{ нүктесінен } \bar{G}_5 \text{ күшін кескіндейтін } (cd) = \frac{G_5}{\mu_F} = \frac{0,88}{0,02} = 44 \text{ мм.}$$

$$d \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u5} \text{ күшін кескіндейтін } (de) = \frac{F_{u4}}{\mu_F} = \frac{0,227}{0,02} \approx 11 \text{ мм,}$$

$$e \text{ нүктесінен } \bar{G}_4 \text{ күшін кескіндейтін } (ef) = \frac{G_4}{\mu_F} = \frac{0,098}{0,02} \approx 5 \text{ мм.}$$

кесінділерді өлшеп саламыз.

a нүктесінен CM буынына параллель түзу тұрғызамыз. Бұл сызық \bar{R}_{25}^n күшінің әсер етуші сызығы, ал f нүктесінен CM буынына перпендикуляр түзу тұрғызамыз. Соңғы сызық \bar{R}_{35} күшінің әсер етуші сызығы. Екі түзудің қиылысу g нүктесін анықтаймыз.

(ga) кесіндісі μ_F масштабта \bar{R}_{25}^n күшін, ал (fg) кесіндісі \bar{R}_{35} реакция күшін және (gb) кесіндісі \bar{R}_{25} реакция күшін, (fk) кесіндісі \bar{R}_{43} реакция күшін кескіндейді.

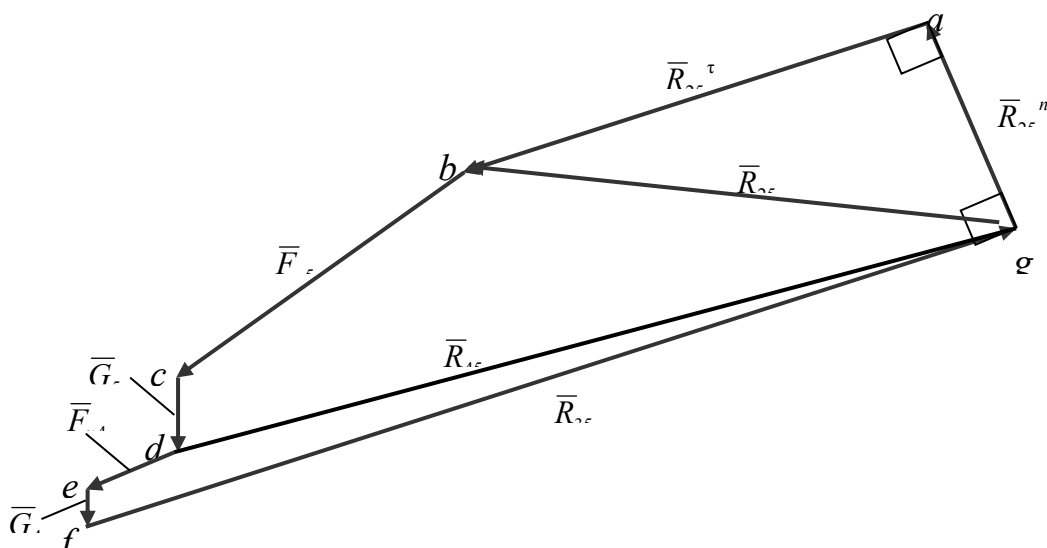
$$\text{Реакция күші } R_{25}^n = (ga) \cdot \mu_F = 391 \cdot 0,02 = 7,82 \text{ Н.}$$

$$\text{Толық реакция күші } \bar{R}_{25} = (gb) \cdot \mu_F = 103 \cdot 0,02 = 2,06 \text{ Н.}$$

$$\text{Реакция күші } \bar{R}_{35} = (fg) \cdot \mu_F = 212 \cdot 0,02 = 4,24 \text{ Н.}$$

\bar{R}_{45} реакция күшін анықтау үшін 5-буынға мынадай тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{25} + \bar{F}_{u5} + \bar{G}_5 + \bar{R}_{45} = 0.$$



3.9.6–сурет. 4 және 5 звенолары құрамындағы Ассур тобының күштік жобасы

Күштер жобасында (dg) кесіндісі μ_F масштабында \bar{R}_{45} күшін кескіндейді. Реакция күші $R_{45} = (dg) \cdot \mu_F = 378 \cdot 0,02 = 7,56 \text{ Н}$.

2 және 3 буындары құрамындағы Ассур тобының күштік талдауы

Берілген Ассур тобы звеноларының реакция және инерция күштерін көрсетеміз (3.8.6-сурет).

2 және 3 буындар Ассур тобына келесі күштер түсірілген:

\bar{R}_{12} (1-буынның 2-буынға әсер ететін A топсасындағы реакция күші), $\bar{R}_{52} = -\bar{R}_{25}$ (5-буынның 2-буынға әсер ететін C топсасындағы реакция күші)

\bar{F}_{u2} (2-буынның массалар центрінің инерция күші);

\bar{G}_2 (2-буынның ауырлық күші);

\bar{F}_{u3} (3-буынның массалар центрінің инерция күші);

\bar{G}_3 (3-буынның ауырлық күші);

\bar{R}_{63} (5-тіректің буынға әсер ететін U топсасындағы реакция күші);

$\bar{R}_{53} = -\bar{R}_{35}$ (5-буынның 3-буынға әсер ететін D топсасындағы реакция күші);

M_{u2} және M_{u3} қос инерция күш моменттері.

3 және 5 буындары құрамындағы Ассур тобына әсер етуші күштер векторлық тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{12}^r + \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{52} + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{u3} + \bar{G}_3 + \bar{R}_{53} + \bar{R}_{63}^r + \bar{R}_{63}^n = 0.$$

Күш \bar{R}_{12}^r шамасын, 2-буынның тепе-теңдігін қарастырып табамыз.

2-буынға түсірілген күштерге B нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad -R_{12}^r \cdot l_{AB} + F_{u2} \cdot h_{u2} + G_2 \cdot h_2 + R_{52} \cdot h_{52} - M_{u2} = 0.$$

Осыдан

$$R_{12}^r = \frac{F_{u2} \cdot h_{u2} + G_2 \cdot h_2 + R_{52} \cdot h_{52} - M_{u2}}{l_{AB}} \approx 4,96 \text{ Н}.$$

Мұндағы $h_{u2} = 0,047 \text{ м}$, $h_2 = 0,008 \text{ м}$, $h_{52} = 0,099 \text{ м}$ сызбадан анықталып және метрмен өлшенетін белгілі күштердің иіндері.

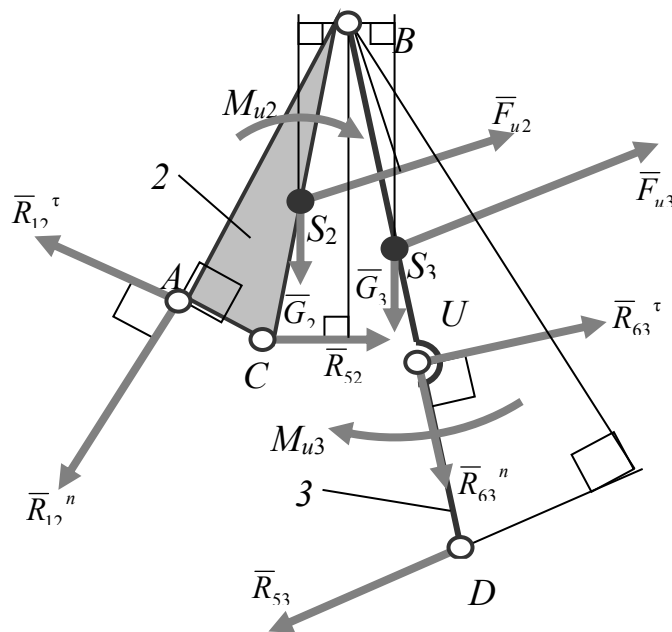
Күш \bar{R}_{63}^{τ} шамасын, 3-буынның тепе-теңдігін қарастырып табамыз.

3-буынға түсірілген күштерге B нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad R_{63}^{\tau} \cdot l_{BU} + F_{u3} \cdot h_{u3} - G_3 \cdot h_3 - R_{53} \cdot h_{53} - M_{u3} = 0,$$

осыдан

$$R_{63}^{\tau} = \frac{-F_{u3} \cdot h_{u3} + G_3 \cdot h_3 + R_{53} \cdot h_{53} + M_{u3}}{l_{BU}} \approx 11,9 \text{ Н}.$$



3.9.6-сурет. 2 және 3 звенолары құрамында болатын Ассур тобының күштік талдауы

Тепе-теңдік теңдеуі бойынша топтың күштер жобасын $\mu_F = 0,05 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$ масштабы бойынша тұрғызамыз (3.8.7-сурет):

$$a \text{ нүктесінен } \bar{R}_{12}^{\tau} \text{ күшін кескіндейтін } (ab) = \frac{R_{12}^{\tau}}{\mu_F} = \frac{4,96}{0,05} \approx 99 \text{ мм},$$

$$b \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u2} \text{ күшін кескіндейтін } (bc) = \frac{F_{u2}}{\mu_F} = \frac{1,52}{0,05} = 30,5 \text{ мм},$$

$$c \text{ нүктесінен } \bar{G}_2 \text{ күшін кескіндейтін } (cd) = \frac{G_2}{\mu_F} = \frac{0,59}{0,05} \approx 12 \text{ мм},$$

$$d \text{ нүктесінен } \bar{R}_{52} \text{ күшін кескіндейтін } (de) = \frac{R_{52}}{\mu_F} = \frac{4,24}{0,05} \approx 85 \text{ мм},$$

$$e \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u3} \text{ күшін кескіндейтін } (ef) = \frac{F_{u3}}{\mu_F} = \frac{0,612}{0,05} \approx 12 \text{ мм},$$

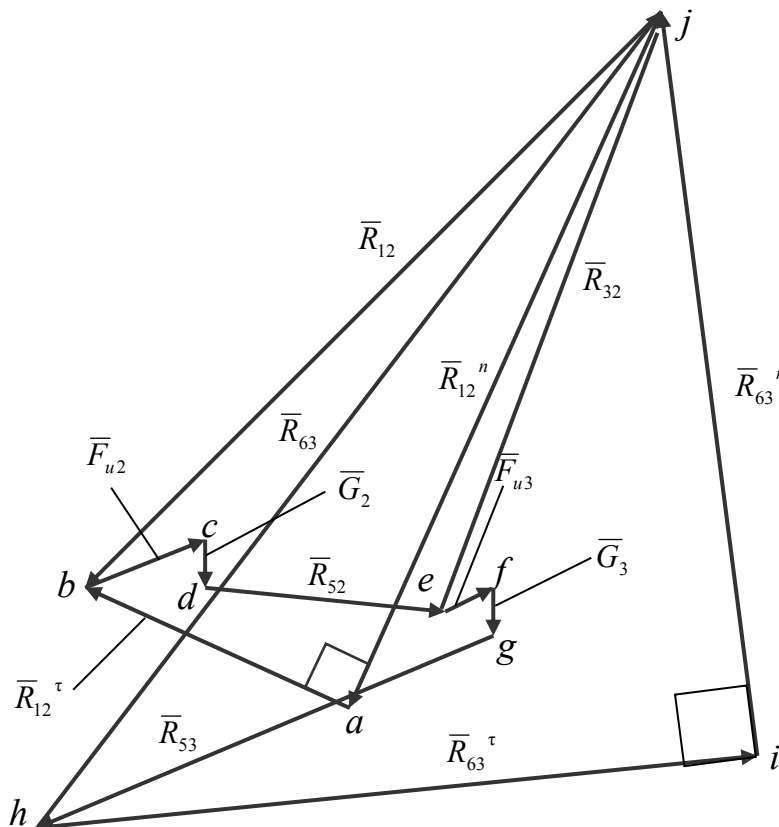
$$f \text{ нүктесінен } \bar{G}_3 \text{ күшін кескіндейтін } (fg) = \frac{G_3}{\mu_F} = \frac{0,784}{0,05} \approx 16 \text{ мм},$$

$$g \text{ нүктесінен } \bar{R}_{53} \text{ күшін кескіндейтін } (gh) = \frac{R_{53}}{\mu_F} = \frac{7,82}{0,05} \approx 156 \text{ мм},$$

$$h \text{ нүктесінен } \bar{R}_{63}^{\tau} \text{ күшін кескіндейтін } (hi) = \frac{R_{63}^{\tau}}{\mu_F} = \frac{11,9}{0,05} \approx 238 \text{ мм}$$

кесіндіні өлшеп саламыз.

a нүктесінен AB звеносына параллель түзу тұрғызамыз. Бұл сызық \bar{R}_{12}^n күшінің әсер етуші сызығы, ал i нүктесінен BD буынына параллель түзу тұрғызамыз. Соңғы сызық \bar{R}_{63}^n күшінің әсер етуші сызығы. Екі түзудің қиылысу j нүктесін анықтаймыз.



3.9.7-сурет. 2 және 3 звенолар құрамында болатын топтың күштер жобасы

(aj) кесіндісі μ_F масштабында \bar{R}_{12}^n күшін, ал (ij) кесіндісі \bar{R}_{63}^n реакция күшін және (jb) кесіндісі \bar{R}_{12} толық реакция күшін, (jh) кесіндісі \bar{R}_{63} толық реакция күшін кескіндейді.

$$\text{Реакция күші } R_{12}^n = (ja) \cdot \mu_F = 253 \cdot 0,05 = 12,7 \text{ Н.}$$

$$\text{Толық реакция күші } R_{12} = (jb) \cdot \mu_F = 271 \cdot 0,05 = 13,6 \text{ Н.}$$

$$\text{Реакция күші } R_{63}^n = (ij) \cdot \mu_F = 256 \cdot 0,05 = 12,8 \text{ Н.}$$

$$\text{Толық реакция күші } R_{63} = (hj) \cdot \mu_F = 349 \cdot 0,05 = 17,5 \text{ Н.}$$

\bar{R}_{32} реакция күшін анықтау үшін 2-буынға келесі тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{12} + \bar{F}_{u2} + \bar{G}_2 + \bar{R}_{52} + \bar{R}_{32} = 0.$$

Күштер жобасында (ej) кесіндісі μ_F масштабында \bar{R}_{32} реакция күшіне сәйкес келеді.

$$\text{Реакция күші } R_{32} = (ej) \cdot \mu_F = 211 \cdot 0,05 = 10,6 \text{ Н.}$$

Жетекші буынға күштік талдауы

1-буынға түсірілген күштер(3.9.8-сурет):

\bar{F}_{u1} (1-буын массалар центрінің инерция күші);

\bar{G}_1 (1-буынның ауырлық күші);

\bar{R}_{61} (6-тіректің 1-звеноға әсер ететін O топсасындағы реакция күші);

$\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ (2-буынның 1-буынға әсер ететін O топсасындағы реакция күші), \bar{F}_y (OA иінітірегіне перпендикуляр, A топсасына түсірілген теңгеретін күш)

1-буынға түсірілген күштерге, O нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құрып, теңгеруші күш шамасын анықтаймыз:

$$\sum M_O(\bar{F}_i) = 0, \quad -M_y + R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_1 = 0, \quad -F_y \cdot l_{OA} + R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_1 = 0,$$

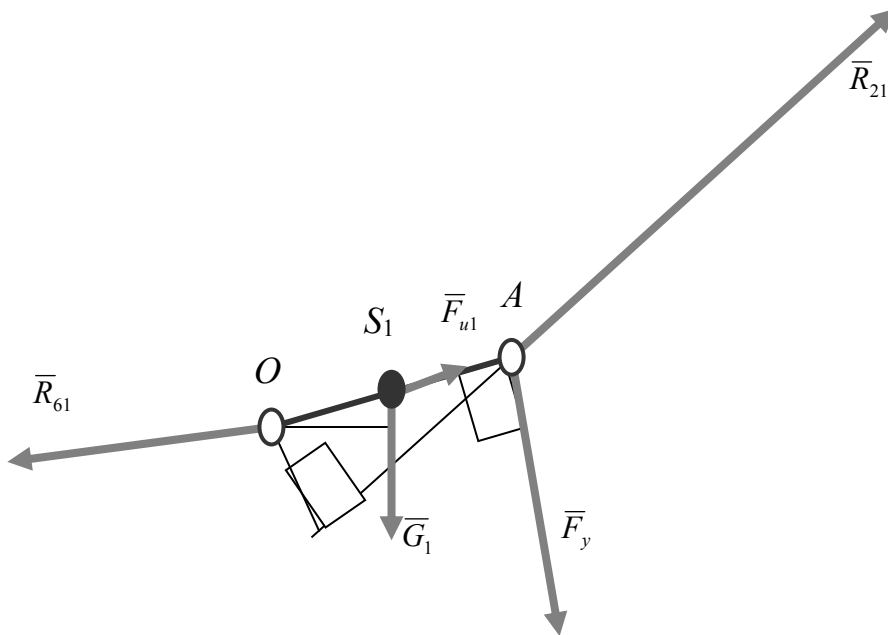
осыдан

$$F_y = \frac{R_{21} \cdot h_{21} - G_1 \cdot h_1}{l_{OA}} = \frac{13,6 \cdot 0,0234 - 2,45 \cdot 0,024}{0,05} \approx 5,18 \text{ Н.}$$

6-буынның \bar{R}_{61} реакция күшінің шамасын анықтау үшін, 1-буынға түсірілген күштердің тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_y + \bar{F}_{u1} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{61} = 0.$$

Күштердің тепе-теңдік теңдеуі бойынша $\mu_F = 0,05 \frac{H}{мм}$ масштабта күштер жобасын тұрғызамыз (28 сурет):



3.9.8–сурет. Жетекші буынға түсірілген күштер

6–буынның \bar{R}_{61} реакция күшінің шамасын анықтау үшін, 1–буынға түсірілген күштердің тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\bar{R}_{21} + \bar{F}_y + \bar{F}_{u1} + \bar{G}_1 + \bar{R}_{61} = 0.$$

Күштердің тепе-теңдік теңдеуі бойынша $\mu_F = 0,05 \frac{H}{мм}$ масштабта күштер жобасын тұрғызамыз (3.8.9-сурет):

$$a \text{ нүктесінен } \bar{R}_{21} \text{ күшін кескіндейтін } (ab) = \frac{R_{21}}{\mu_F} = \frac{13,6}{0,05} = 272 \text{ мм},$$

$$b \text{ нүктесінен } \bar{F}_y \text{ күшін кескіндейтін } (bc) = \frac{F_y}{\mu_F} = \frac{5,18}{0,05} \approx 104 \text{ мм},$$

$$c \text{ нүктесінен } \bar{F}_{u1} \text{ күшін кескіндейтін } (cd) = \frac{F_{u1}}{\mu_F} = \frac{1,4}{0,05} = 28 \text{ мм},$$

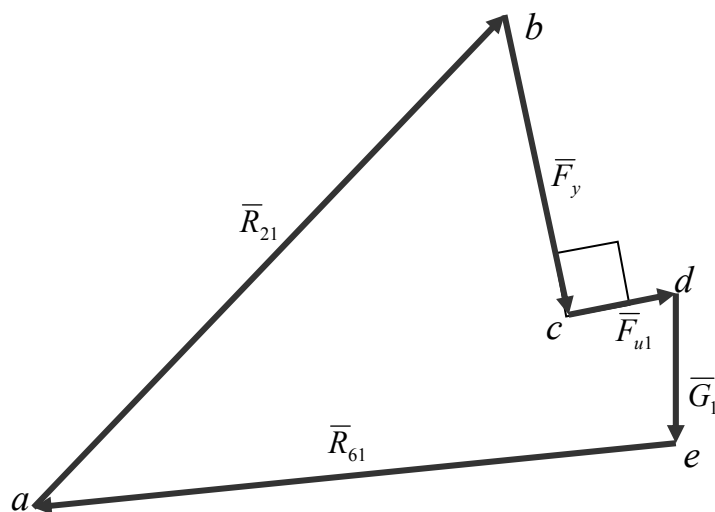
$$d \text{ нүктесінен } \bar{G}_1 \text{ күшін кескіндейтін } (de) = \frac{G_1}{\mu_F} = \frac{2,45}{0,05} = 49 \text{ мм}$$

кесінділерін өлшеп саламыз.

Осыдан \bar{R}_{41} реакция күшінің шамасын анықтаймыз

$$R_{61} = (ea) \cdot \mu_F = 254 \cdot 0,05 = 12,75 \text{ H.}$$

Осымен механизмді кинетостатикалық зерттеу аяқталады.



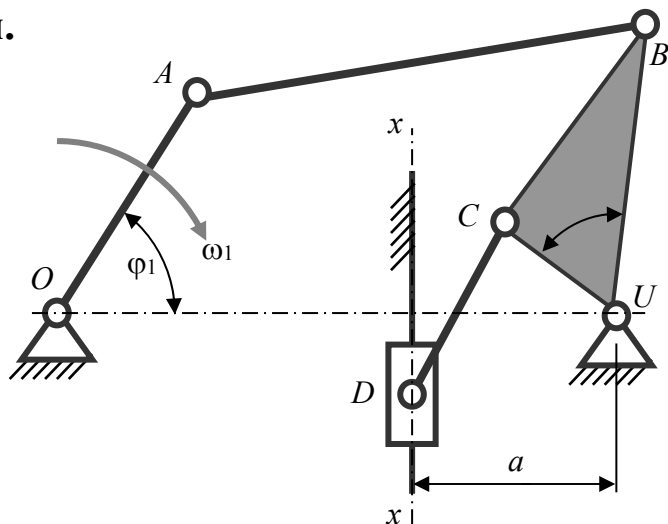
3.9.9–сурет. Жетекші буынның күштер жобасы

3.9 «Механизмдерді кинематикалық және кинетостатикалық талдаулар» тақырыбы бойынша есептер

Есептерді шығаруға қойлатын шарттар

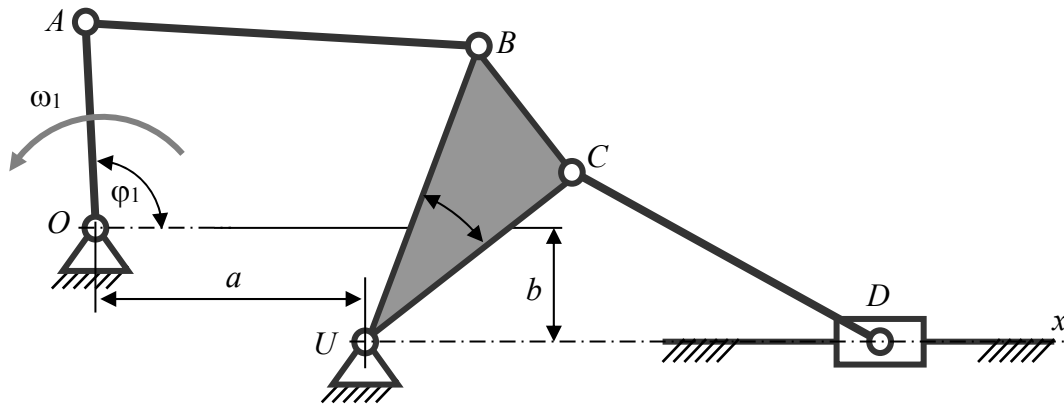
1. Механизмге құрылымдық талдау жүргізіңіз.
2. Механизмнің 12 орын жобасын тұрғызыңыз. Механизм сұлбасында нүктелермен көрсетілген буындарының бұрыштық жылдамдықтары және өлшем бірліктері кестеде берілген.
3. Механизмнің берілген орнына жылдамдықтар жобасын тұрғызыңыз.
4. Механизмнің берілген орнына үдеулер жобасын тұрғызыңыз.

3.9.1-есеп.



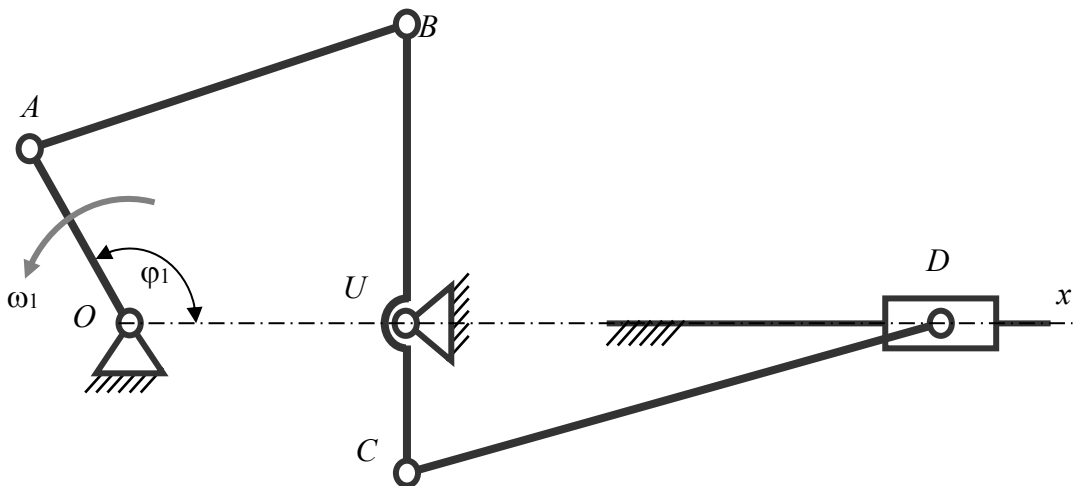
ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{CD}	l_{OU}	a	$\angle BUC$	φ_1
c^{-1}	M							°	
30	0,06	0,1	0,08	0,03	0,06	0,09	0,035	60	45

3.9.2-есеп.



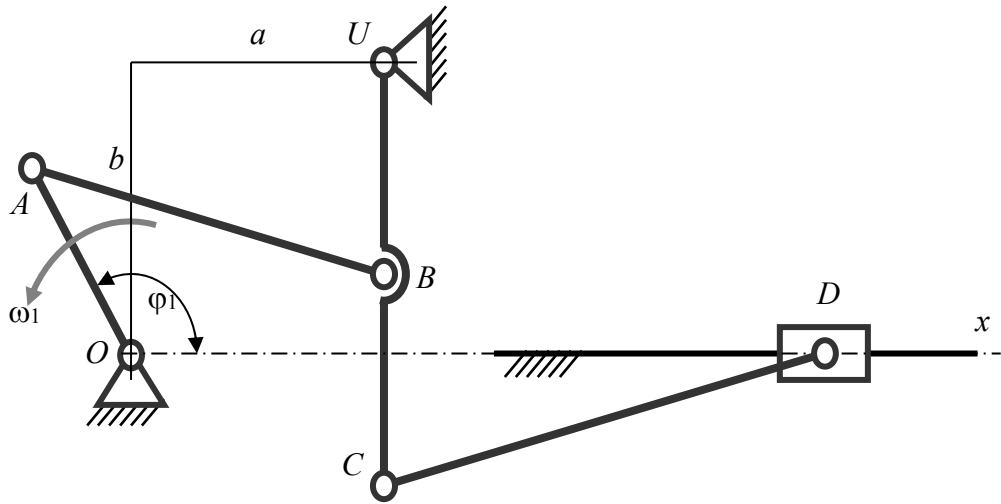
ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{CD}	a	b	$\angle BUC$	φ_1
c^{-1}	M							°	
20	0,05	0,1	0,08	0,07	0,08	0,06	0,025	30	120

3.9.3-есеп.



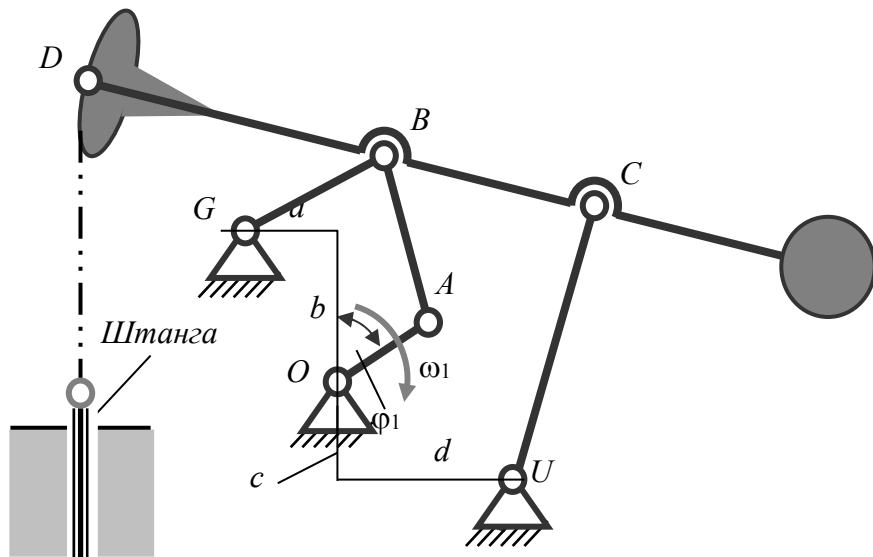
ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{CD}	l_{OU}	φ_1
c^{-1}	M						°
25	0,06	0,1	0,1	0,04	0,1	0,08	120

3.9.4-есеп.



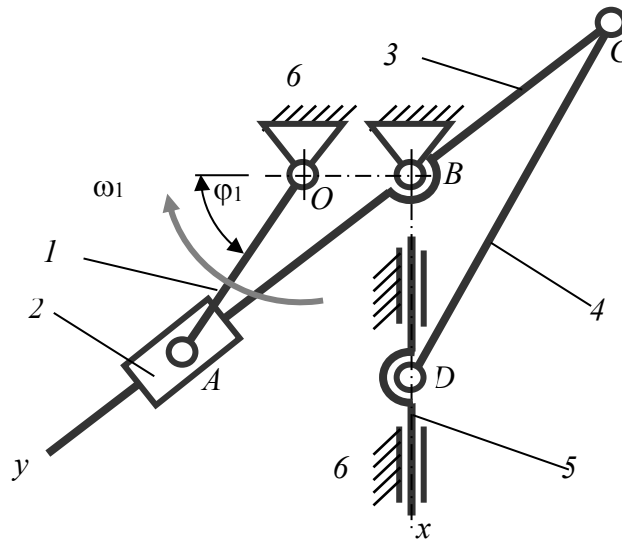
ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{CD}	a	b	φ_1	
c^{-1}	M								°
30	0,05	0,1	0,08	0,12	0,1	0,06	0,08	120	

3.9.5-есеп.



ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{GB}	l_{CB}	l_{CU}	l_{BD}	a	b	c	d	φ_1	
c^{-1}	M											°
5	0,03	0,125	0,056	0,107	0,13	0,08	0,075	0,11	0,04	0,05		

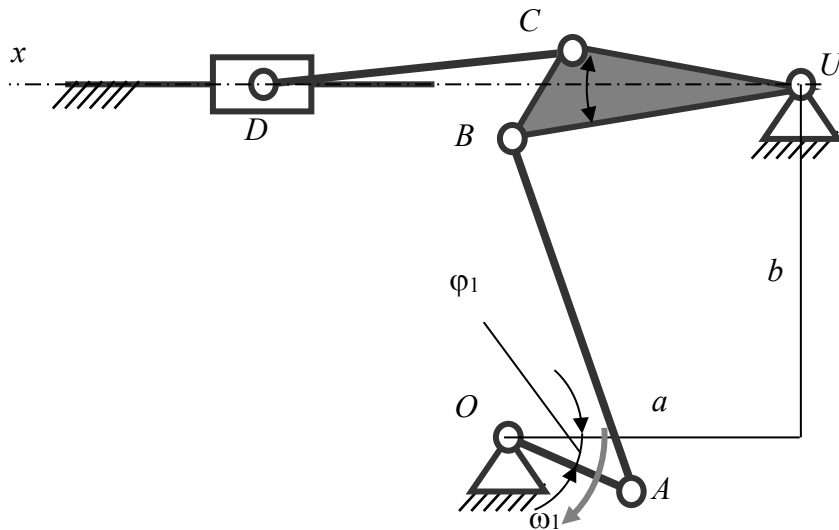
3.9.8-есеп.



ω_1	l_{OA}	l_{OB}	l_{BC}	l_{CD}	φ_1
c^{-1}	М				°
30	0,05	0,025	0,05	0,2	60

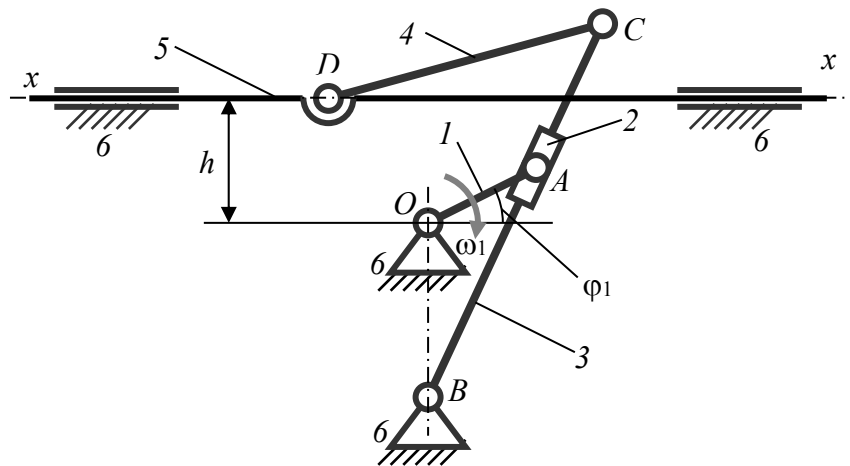
3.9.9-есеп.

Вариант RZ.



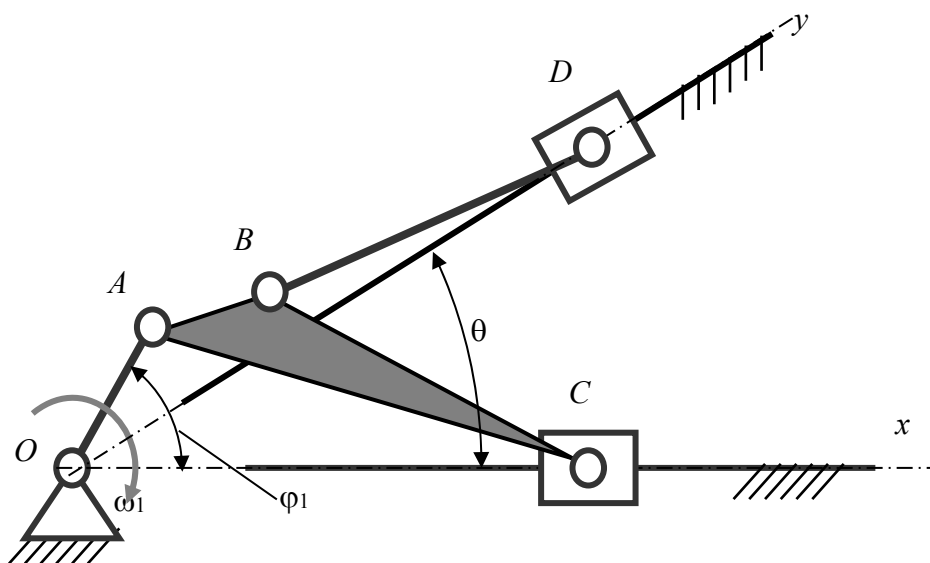
ω_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{CD}	a	b	$\angle BUC$	φ_1
c^{-1}	М							°	
15	0,04	0,18	0,1	0,08	0,15	0,08	0,15	15	30

3.9.10-есеп.



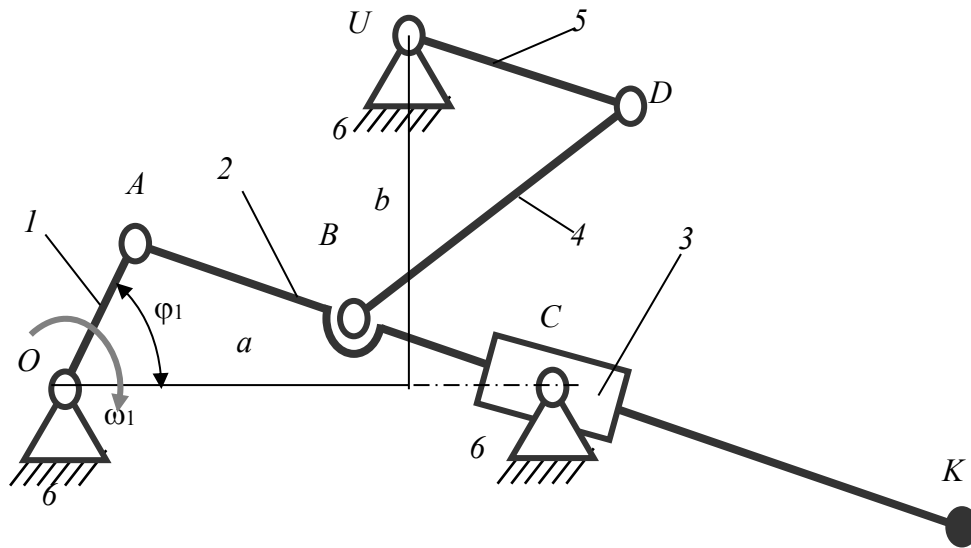
ω_1	l_{OA}	l_{OB}	l_{BC}	l_{CD}	h	φ_1
c^{-1}	M					$^\circ$
15	0,06	0,16	0,24	0,1	0,07	30

3.9.11-есеп.



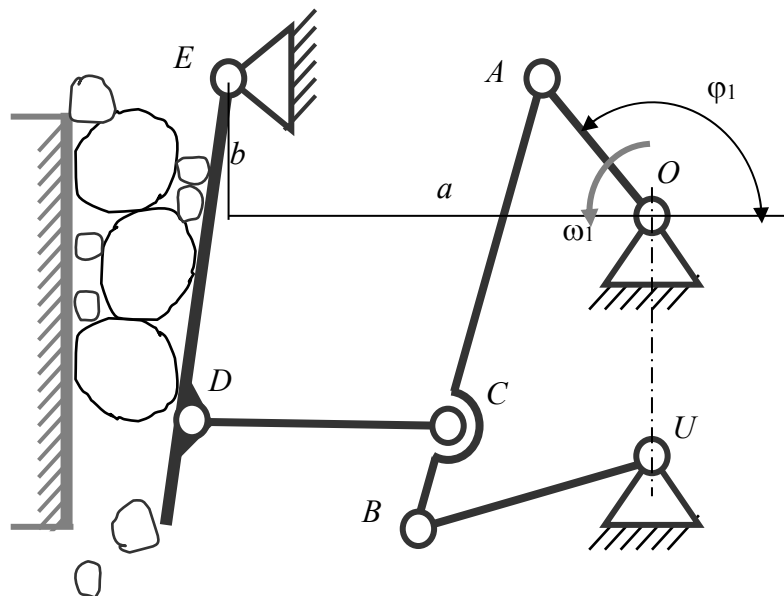
ω_1	φ_1	θ	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	$l_{AC} = l_{BD}$
c^{-1}	$^\circ$		M			
15	60	30	0,04	0,03	0,16	0,18

3.9.12-есеп.



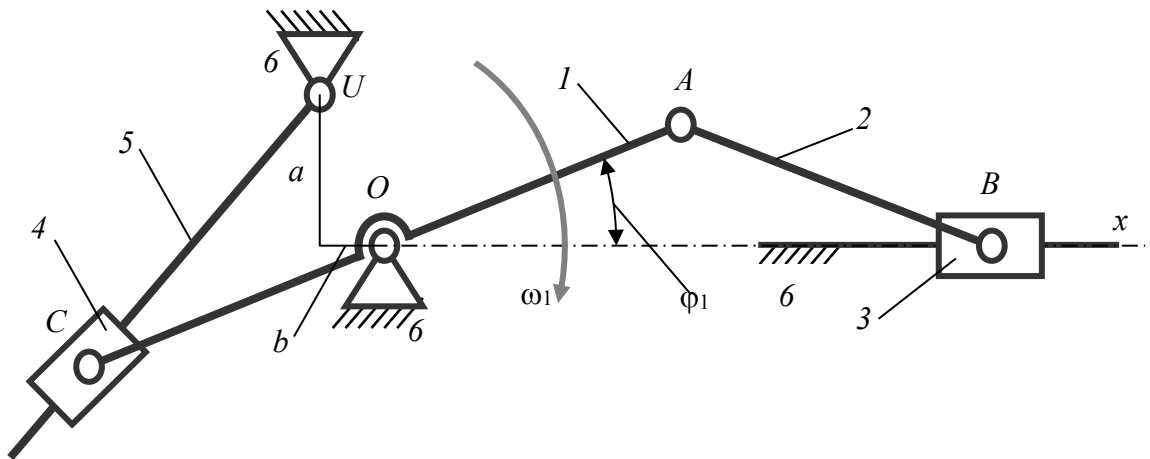
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{AK}	l_{BD}	l_{OC}	l_{UD}	a	b
c^{-1}	$^\circ$	M							
30	60	0,04	0,06	0,24	0,08	0,16	0,06	0,1	0,08

3.9.13-есеп.



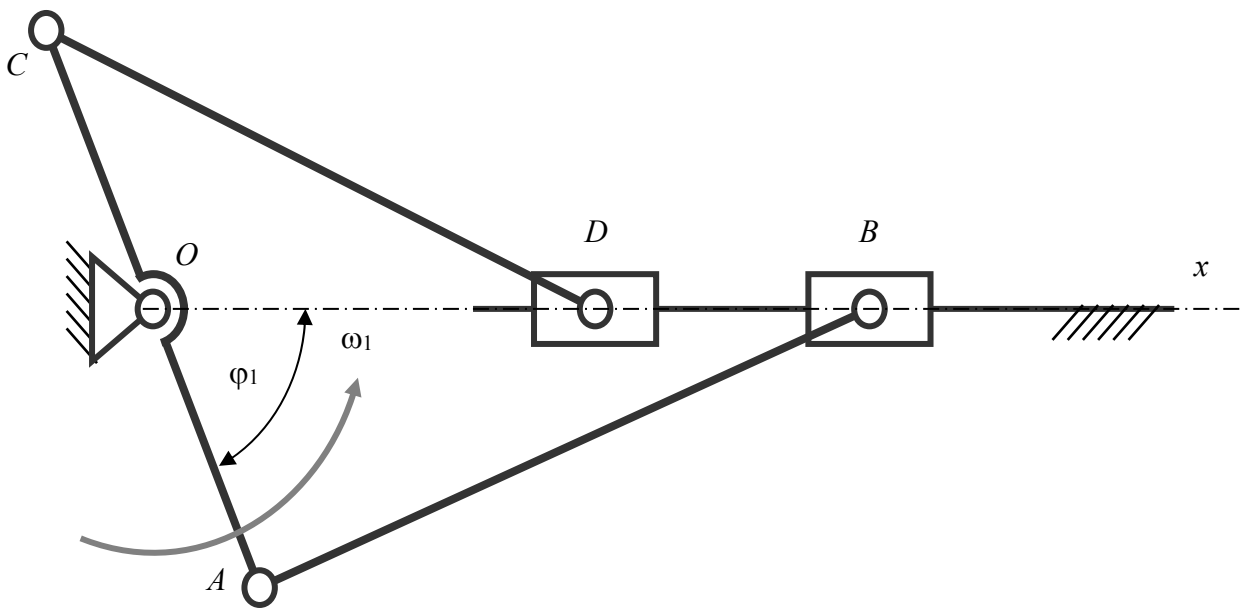
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{UB}	l_{AC}	l_{OU}	l_{CD}	l_{DE}	a	b
c^{-1}	$^\circ$	M								
30		0,05	0,12	0,07	0,1	0,08	0,08	0,1	0,126	0,032

3.9.14-есеп.



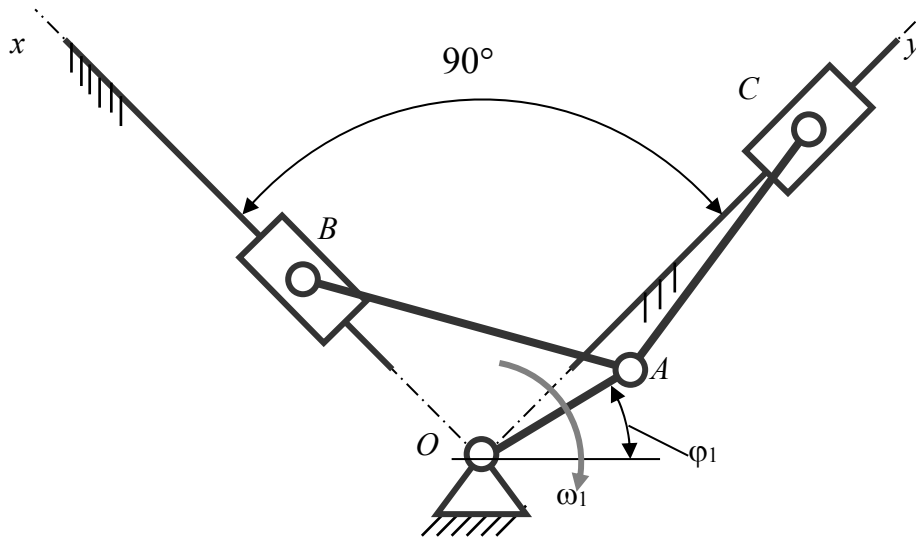
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AB}	l_{OC}	a	b
c^{-1}	$^\circ$	М				
30	30	0,06	0,12	0,05	0,08	0,018

3.9.15-есеп.



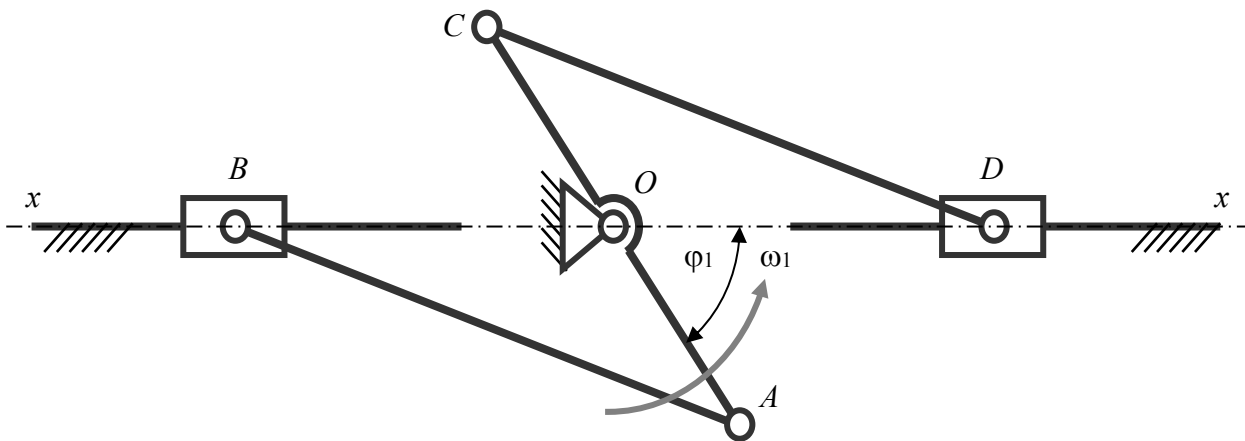
ω_1	φ_1	$l_{OA} = l_{OC}$	$l_{AB} = l_{CD}$
c^{-1}	$^\circ$	М	
30	60	0,07	0,24

3.9.16-есеп.



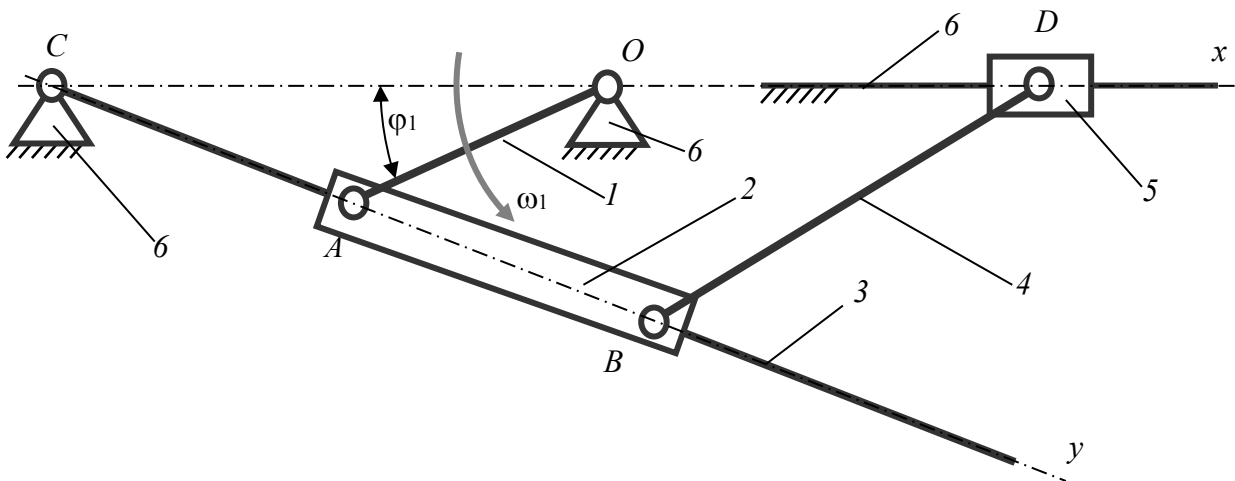
ω_1	φ_1	l_{OA}	$l_{AB} = l_{CD}$
c^{-1}	$^\circ$	M	
120	30	0,07	0,16

3.9.17-есеп.



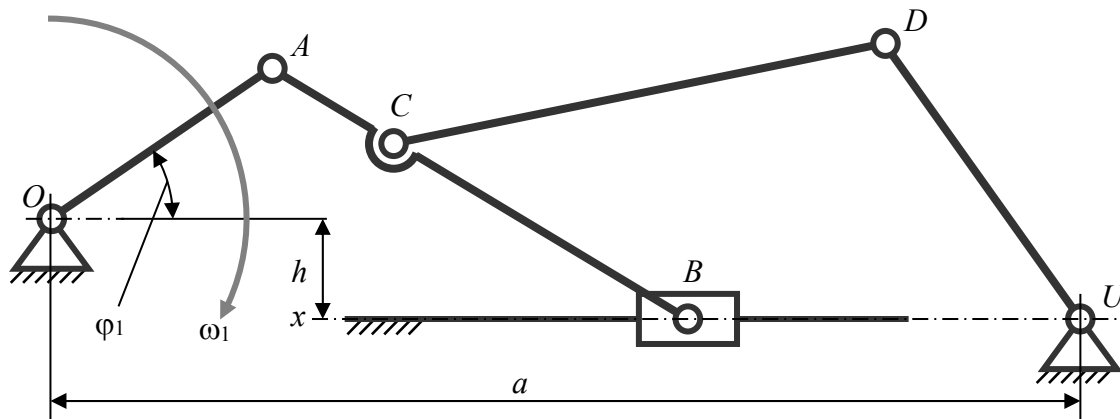
ω_1	φ_1	$l_{OA} = l_{OC}$	$l_{AB} = l_{CD}$
c^{-1}	$^\circ$	M	
150	60	0,06	0,15

3.9.18-есеп.



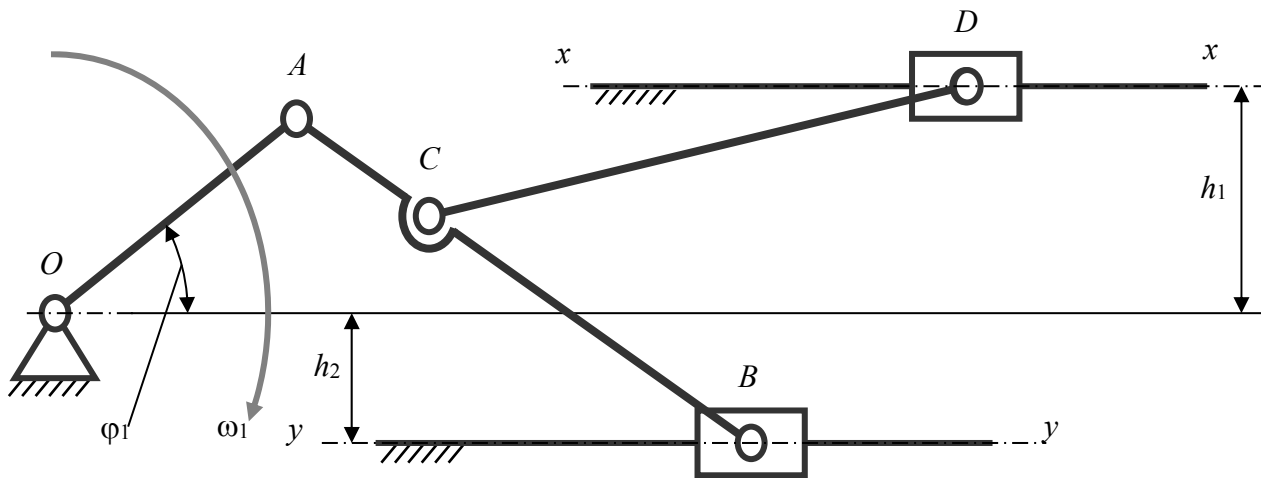
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{OC}	l_{AB}	l_{BD}
c^{-1}	$^\circ$	M			
25	30	0,05	0,14	0,08	0,12

3.9.19-есеп.



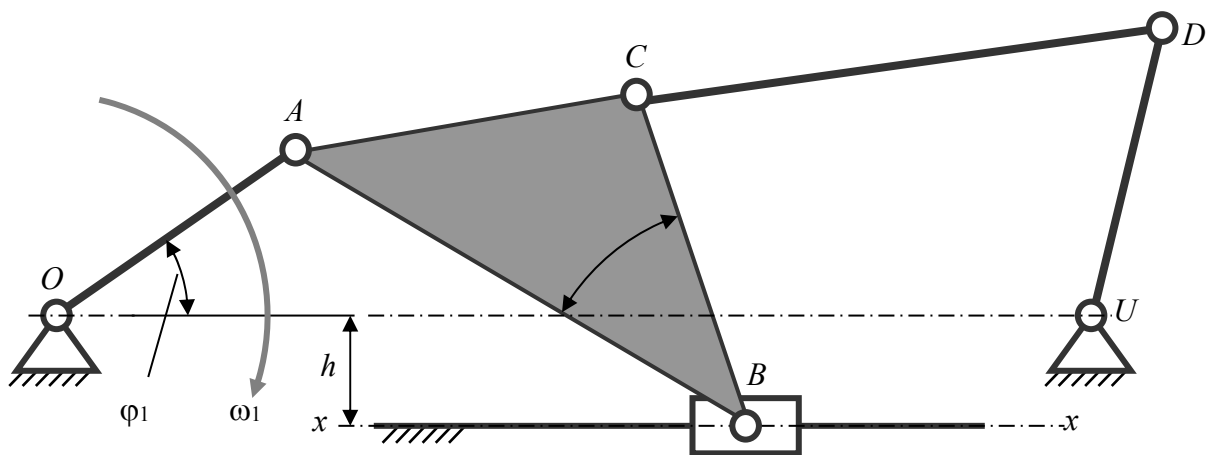
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AC}	l_{AB}	l_{CD}	l_{DU}	a	h
c^{-1}	$^\circ$	M						
25	30	0,05	0,04	0,12	0,12	0,08	0,18	0,02

3.9.20-есеп.



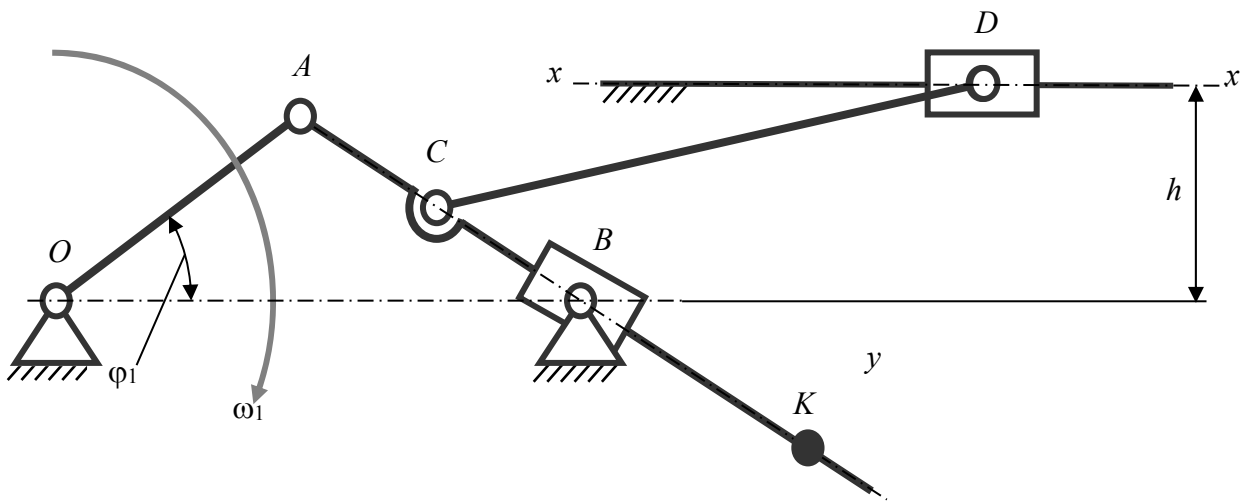
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{AC}	l_{AB}	l_{CD}	h_1	h_2
c^{-1}	$^\circ$	M					
25	45	0,05	0,04	0,12	0,12	0,03	0,02

3.9.21-есеп.



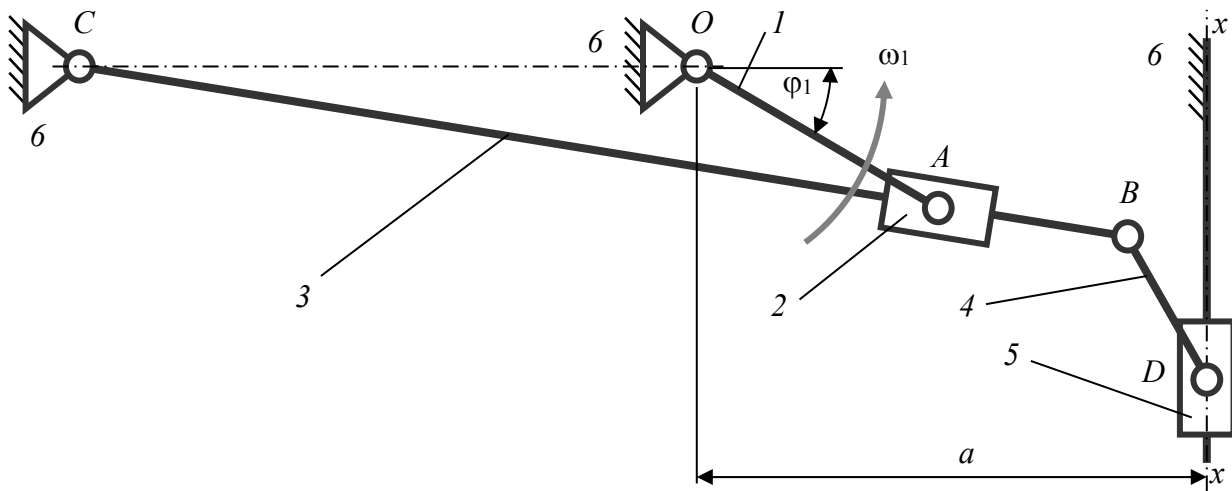
ω_1	φ_1	$\angle ABC$	l_{OA}	l_{OU}	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	l_{UD}	h
c^{-1}	$^\circ$	M							
25	30	45	0,05	0,18	0,12	0,08	0,15	0,08	0,02

3.9.22-есеп.



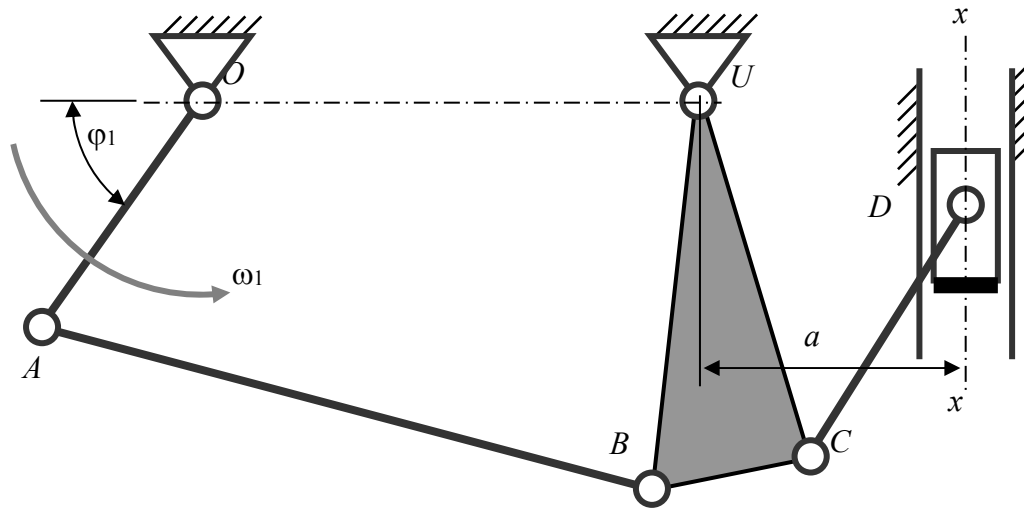
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{OB}	l_{AC}	l_{CD}	l_{AK}	h
c^{-1}	$^\circ$	M					
30	45	0,05	0,12	0,04	0,12	0,18	0,03

3.9.23-есеп.



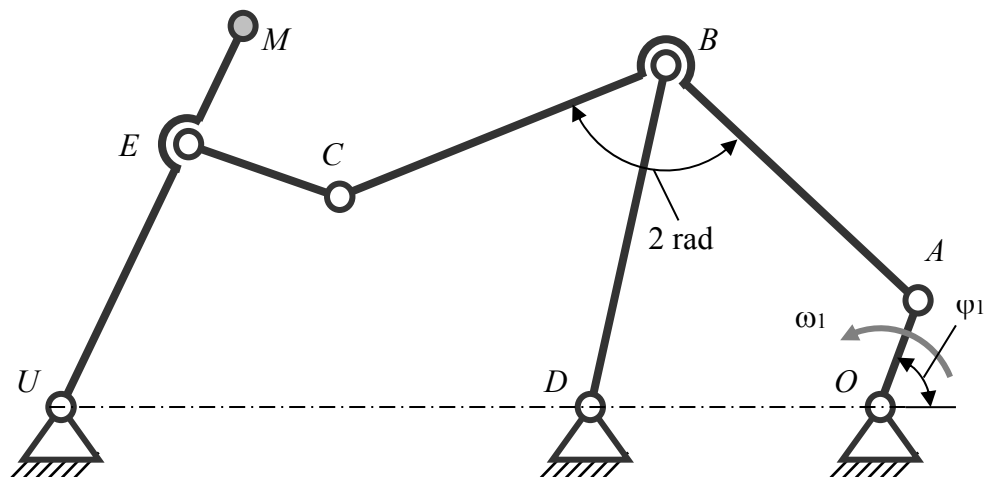
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{OC}	l_{CB}	l_{BD}	a
c^{-1}	$^\circ$	M				
25	30	0,05	0,15	0,2	0,03	0,044

3.9.24-есеп.



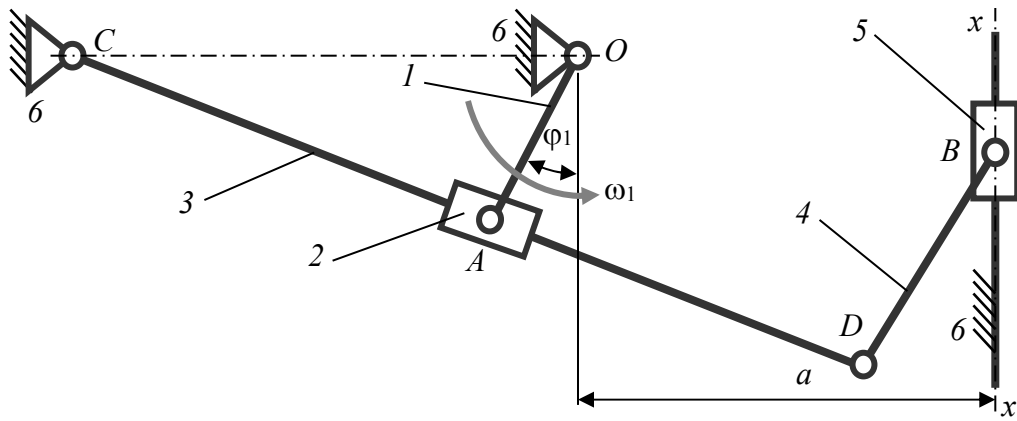
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{OU}	l_{AB}	l_{UB}	l_{UC}	l_{BC}	l_{CD}	a
c^{-1}	$^\circ$	М							
20	60	0,07	0,1	0,12	0,1	0,096	0,028	0,1	0,02

3.9.25-есеп.



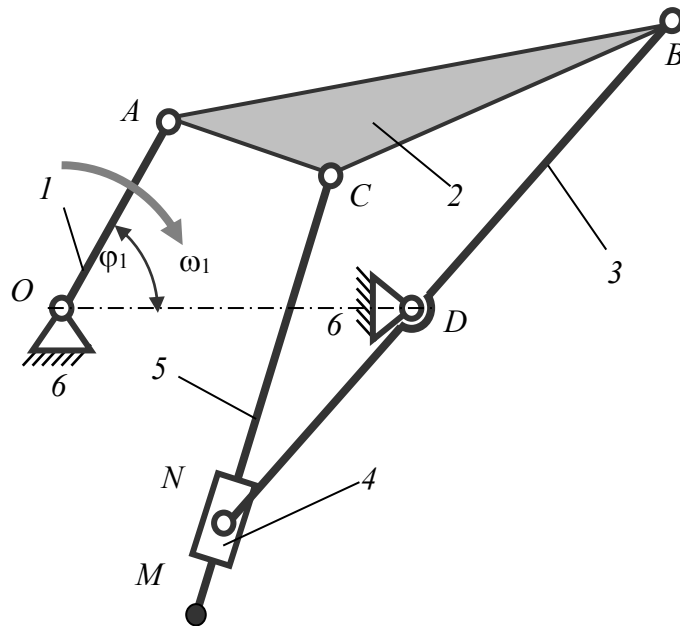
ω_1	φ_1	$\angle ABC$	$l_{OA} = l_{EM}$	$l_{AB} = l_{BC} = l_{BD}$	l_{CE}	l_{UE}	l_{UD}	l_{OD}
c^{-1}	$^\circ$	рад.	М					
30	60	2	0,03	0,1	0,053	0,125	0,12	0,076

3.9.26-есеп.



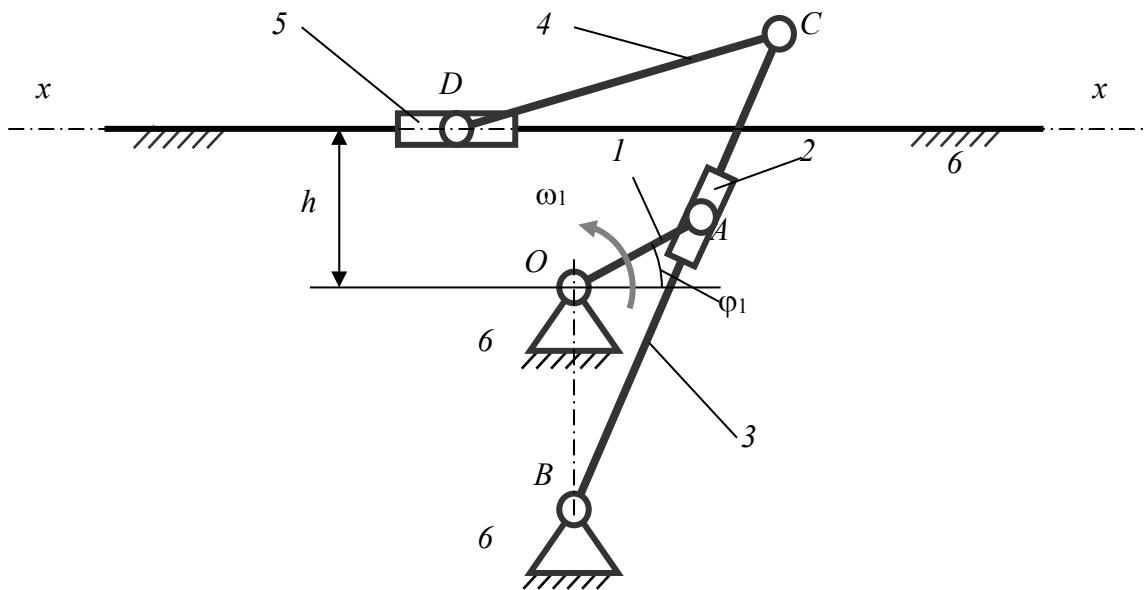
ω_1	φ_1	l_{OA}	l_{OC}	l_{CD}	l_{BD}	a
c^{-1}	$^\circ$	M				
25	30	0,05	0,15	0,2	0,03	0,04

3.9.27-есеп.



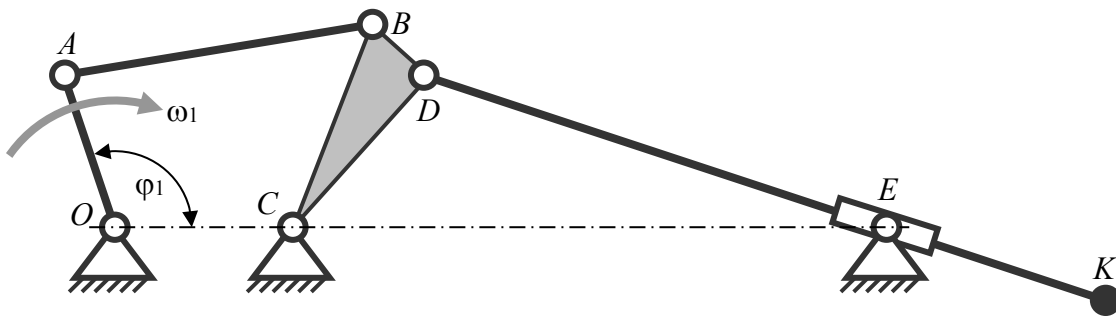
ω_1	φ_1	l_{OA}	$l_{AB} = l_{BD} = l_{OD}$	l_{AC}	l_{BC}	l_{ND}	l_{CM}
c^{-1}	$^\circ$	M					
25	60	0,05	0,1	0,03	0,08	0,06	0,15

3.9.28-есеп.



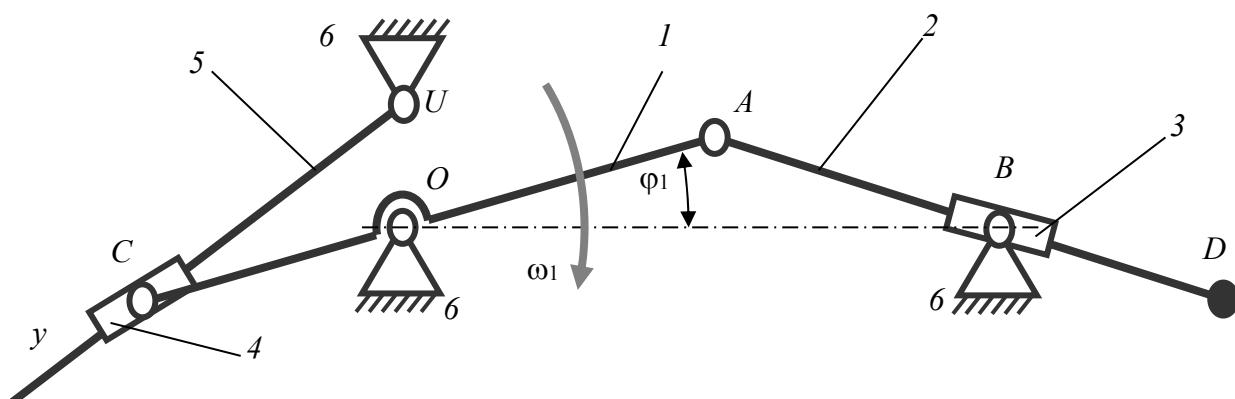
ω_1	l_{OA}	l_{OB}	l_{BC}	l_{CD}	h	φ_1
c^{-1}	M					$^\circ$
15	0,06	0,16	0,24	0,05	0,07	30

3.9.29-есеп.



ω_1	l_{OA}	l_{OC}	l_{AB}	l_{BC}	l_{BD}	l_{CD}	l_{DK}	l_{CE}	φ_1
c^{-1}	M								$^\circ$
10	0,05	0,07	0,1	0,075	0,021	0,072	0,25	0,2	120

3.9.30-есеп.



ω_1	$l_{OA} = l_{OC}$	l_{OB}	l_{AD}	l_{OU}	φ_1
c^{-1}	M				$^\circ$
8	0,05	0,12	0,2	0,03	30

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. - 736 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник для машиностр. и приборостроит. спец. вузов - М.: Высш. шк., 1990.-607с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для студентов технических вузов - М.: Высш. шк., 2007. – 416 с.
4. С.Н. Тойбаев. Теориялық механика. – Алматы: Бастау, 2006.
5. Нұғыман А.М. Теориялық механика негіздері. – Семей: СМУ, 2002.
6. М.Шыныбаев. Теориялық механика. – Алматы: РБК, 1994.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для технических вузов/Под общей ред. А.А.Яблонского. - М.: Интеграл-Пресс, 2006.
8. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб.пособие. - СПб.: Изд-во "Лань", 2010.
9. Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов. - М.: Высш. шк., 2003. – 352 с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 592 с.
11. Степин П.А. Сопротивление материалов: Учебник для немашиностроит. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 367 с.
12. Зозуля В.В., Мартыненко А.В., Лукин А.Н. Механика материалов. – Харьков: Изд-во Нац. ун-та внутр. дел, 2001, 404 с.
13. Горшков А. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. Сопротивление материалов: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 544 с.
14. Агамиров Л.В. Сопротивление материалов: Краткий курс. Для

студентов вузов. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2003. – 256 с.

15. Олофинская В.П. Техническая механика. Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий. – М.: Форум: Инфра-М, 2007. - 349 с.
16. Иосилевич Г.Б., Строганов Г.Б., Маслов Г.М. Прикладная механика. - М.: Высш.шк.,1989. – 352 с.
17. М.Ф.Үркімбаев, С.Жүнісбеков. Материалдар кедергісі теорияларының негіздері – Алматы: Мектеп, 1986.
18. С.Д.Тәжібаев. Қолданбалы механика. - Алматы: Білім, 1974.
19. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. М.: «Наука», 1993.
20. Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. М., 1978.
21. Ө.А. Жолдасбеков. Машиналар мен механизмдер теориясы .– Алматы: Мектеп, 1979.
22. Кореняко А.С. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 1970.

МАЗМҰНЫ

1 ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА	3
1.1 Статиканың негізгі ұғымдары мен аксиомалары	3
1.2 Байланыстар. Байланыстар реакциялары. Байланыстар аксиомасы	5
1.3 Жинақталатын күштер жүйесі. Күштерді қосудың геометриялық әдісі. Жинақталатын күштер жүйесінің геометриялық тепе-теңдік шарты	6
1.4 Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін аналитикалық әдіспен табу. Жинақталатын күштер жүйесінің аналитикалық тепе-теңдік шарты	7
1.5 Күштің нүктеге және өске қатысты моменті	11
1.6 Қос күш. Қос күш моменті	12
1.7 Күшті параллель орын ауыстыру туралы теорема. Кез келген күштер жүйесін бір центрге келтіру	14
1.8 Күштер жүйелерінің тепе-теңдік шарттары	14
1.9 Сырғанау үйкелісі.	24
1.10 Домалау үйкелісі	26
1.11 Қатты дененің ауырлық центрі	27
1.12 «Статика» тақырыбы бойынша есептер	29
1.13 Кинематика. Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері	35
1.14 Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі	36
1.15 Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі	37
1.16 Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы және үдеуі	38
1.17 Қатты дененің қарапайым қозғалыстары	42
1.18 Қатты дененің жазық параллель қозғалысының теңдеулері	46
1.19 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене (жазық фигураның) нүктелерінің жылдамдықтары	47

1.20 Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану арқылы есептеу	48
1.21 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері	49
1.22 Нүктенің күрделі қозғалысы	53
1.23 «Кинематика» тақырыбы бойынша есептер	58
1.24 Динамикаға кіріспе. Динамиканың негізгі заңдары. Динамиканың бірінші және екінші есептері	63
1.25 Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері	65
1.26 Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы	73
1.27 Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема	78
1.28 Материялық нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема	81
1.29 Күш жұмысы. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема	82
1.30 Механикалық жүйе. Жүйенің массалар центрі және инерция моменттері	86
1.31 Механикалық жүйенің массалары центрінің қозғалысы туралы теорема	88
1.32 Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема	92
1.33 Механикалық жүйенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема	96
1.34 Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема	102
1.35 Даламбер принципі	108
1.36 «Динамика» тақырыбы бойынша есептер	110
2 МАТЕРИАЛДАР КЕДЕРГІСІ	118
2.1 Жалпы мағлұматтар	118
2.2 Созылу және сығылу. Бойлық күштердің эпюрлері	120
2.3 Созылу және сығылу кезіндегі негізгі арақатынастар	126

2.4 Созылу және сығылу кезіндегі беріктікке және қатаңдыққа есептеу	131
2.5 Элементтері созылу-сығылу жағдайындағы статикалық түрде анықталмайтын жүйелерді есептеу	137
2.6 «Созылу және сығылу» тақырыбы бойынша есептер	144
2.7 Бұралу. Бұраушы моменттердің эпюрлері	149
2.8 Бұралу кезіндегі кернеулер. Бұралу бұрышы және деформацияның потенциалық энергиясы	151
2.9 Бұралу кезіндегі қауіпсіз кернеулер әдісі бойынша беріктік пен қатаңдыққа есептеу	155
2.10 Элементтері бұралу жағдайындағы статикалық түрде анықталмайтын жүйелер	158
2.11 «Бұралу» тақырыбы бойынша есептер	159
2.12 Ығысу кезіндегі беріктікке есептеу	161
2.13 «Ығысу» тақырыбы бойынша есептер	165
2.14 Сырық көлденең қималарының геометриялық сипаттамалары	166
2.15 «Сырық көлденең қималарының геометриялық сипаттамалары» тақырыбы бойынша есептер	175
2.16 Тік иілу. Көлденең күштер мен июші моменттердің эпюрлері	177
2.17 Жазық иілу жағдайындағы арқалықтарды қауіпсіз кернеулер бойынша беріктікке есептеу	191
2.18 Иілу кезіндегі орын ауыстырулар және қатаңдыққа есептеу	200
2.19 «Иілу» тақырыбы бойынша есептер	206
2.20 Күрделі қарсыласу. Қиғаш иілу	210
2.21 Күрделі қарсыласу. Центрден тыс созылу (сығылу)	216
2.22 Күрделі қарсыласу. Иілу мен созылудың (сығылудың) біріккен әсері	222
2.23 Күрделі қарсыласу. Иілу мен бұралудың біріккен әсері	225

2.24 «Күрделі қарсыласу» тақырыбы бойынша есептер	231
2.25 Сығылған сырықтардың орнықтылығы. Эйлердің және Ясинскийдің формулаларымен сығылған сырықтарды есептеу	235
2.26 Сығылған сырықтардың орнықтылығы. Бойлық иілу коэффициенті бойынша сығылған сырықтарды есептеу	238
2.27 «Сығылған сырықтардың орнықтылығы» тақырыбы бойынша есептер	243
3 МЕХАНИЗМДЕР ЖӘНЕ МАШИНАЛАР ТЕОРИЯСЫ	246
3.1 Механизмді құрылымдық талдау. Негізгі түсініктер және анықтамалар. Кинематикалық жұп. Байланыстар берілуі. Кинематикалық жұптар классификациясы.	246
3.2 Кинематикалық жұп белгілеу бейнесі. Кинематикалық тізбек жалпы көрінісінің құрылымдық формуласы. Еркіндік дәреже саны	252
3.4 Ассур тобы бойынша механизмдердің классификациясы. Механизм пайда болу тәсілдері. Жазық механизмдердің құрылым классификациясы	256
3.5 Графикалық тәсілмен иін тіректі механизмді кинематикалық талдау	266
3.5.1 Масштаб коэффициенті. Топтар буындарының орнын және нүктелерінің траекториясын тұрғызу	273
3.5.2 1–түрдегі 2–класс Ассур тобымен құрылатын механизм үшін жылдамдық және үдеу жобаларын тұрғызу	277
3.5.3 2 және 3–түрдегі 2–класс Ассур тобымен құрылатын механизм үшін жылдамдық және үдеу жобаларын тұрғызу. Кориолис үдеуі	283
3.6 Графикалық тәсілмен иін тіректі механизмді күштік талдау	293
3.6.1 Механизм буындарының инерция күштерін анықтау. Кинематикалық тізбектердің статикалық анықталуы	293
3.6.2 Келтірілген күшті және келтірілген күш моментін анықтау. Жуковскийдің теоремасы. Механизмнің кинетикалық энергиясы. Механизмнің кинетикалық энергиясы. Механизмнің келтірілген массасы және келтірілген инерция моменті	304

3.7 Жұдырықша механизмдері және олардың негізгі түрлері. Цикл диаграммалар. Жұдырықшаның профилін есептеу	310
3.8 Беріліс механизмдері. Механикалық беріліс. Цилиндрлі тісті беріліс. Беріліс қатынастары. Планетарлық және дифференциалдық беріліс	316
3.9 «Механизмдерді кинематикалық және кинетостатикалық талдаулар» тақырыбы бойынша мысал есеп	323
ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	362

Тойбаев С.Н.

**ТЕОРИЯЛЫҚ
ЖӘНЕ ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКА**

Практикум

*Өзіндік жұмыс орындауға
арналған мысалдар және тапсырмалар*

Технический редактор *Клышбаева Н.С.*

Мұқабә дизайны *Тукенова Ж.Е.*

Беттеу *Тукенова Ж.Е.*

Басылуға 14.06.2016 қол қойылды.

Пішімі 60x84 1/16 . Көлемі 17 б.т.

Таралымы 500 дана. Тапсырыс № 119

ЖШС «Альманах» баспа үйі»

г.Алматы, мкр.Алатау, ул. Наурыз, 74-а

e-mail: almanah_id@mail.ru

«Нур-Принт» баспаханасы.

Тел: 8 (727) 308-25-46, 298-64-02

e-mail: nur-print@mail.ru

www.nur-print.kz