УДК 664.66

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОЙ ТЕПЛОТЕХНИКИ

МЕТАЛЛУРГИЯЛЫҚ ЖЫЛУ ТЕХНИКАСЫНЫҢ ШАРТТЫ ДҰРЫС ҚОЙЫЛМАҒАН ЕСЕБІНІҢ ӘДІСІ

METHODS OF DECISION OF GREY TASK OF METALLURGICAL HEATING ENGINEERING

С.А. АТАНБАЕВ, Г.О. СЕЙТБЕКОВА
S.A. ATANBAYEV, G.O. SEITBEKOVA

(Алматинский технологический университет)
(Алматы технологиялық университеті)
(Almaty Technological University)
E-mail:sgulzhan25@mail.ru

В данной статье предлагается использование метода квазиобращения (МКО) для решения обратной задачи теплопроводности металлургической теплотехники путем преобразования к начально-краевой задачи для эволюционного уравнения второго порядка. В связи с этим особую актуальность приобретают дистанционные методы определения температур, основанные на математической обработке результатов измерения температуры и теплового потока. Применение алгоритма МКО является эффективным средством сглаживания результатов термометрирования.

Бұл мақалада металлургиялық жылутехниканың жылу өткізгіштік теңдеуіне қойылған кері есепті екінші ретті эволюциялық теңдеуге қойылған бастапқы – шекаралық есепке келтіру арқылы квази-керілендіру әдісін пайдаланып шешу әдісі қарастырылған. Математикалық өңдеуге негізделген жылу ағыны мен қызуы өлшемінің нәтижелерін қашықтықтан анықтау әдістері негізгі өзектілігі болып табылады. Квази-керілендіру әдісінің алгоритмі қызу өлшемінің нәтижелерін реттейтін тиімді құрал болып табылады.

The method of the use of method of quasiinversion (QIM) for the decision of reverse task of heat conductivity is offered in this article, by transformation to initial-regional task for evolutional equalization the second order.In this regard, particular relevance remote methods for determining the temperature based on a mathematical analysis of the results of measurement of temperature and heat flux. Algorithm QIM is an effective means of smoothing results termometrirovaniya.

Ключевые слова: эволюционные уравнения, некорректные задачи, уравнение теплопроводности.

Негізгі сөздер: эволюциялық теңдеулер, дұрыс қойылмаған есептер, жылу өткізгіштік теңдеу.

Key words: evolutional equalizations, ill-conditioned problems, equalization of heat conductivity.

Введение

Температура печного пространства является одним из важнейших технологических параметров, от правильного задания которого в существенной степени зависит качественное осуществление технологического процесса. Вместе с ним непосредственное измерение температуры внутри печи наталкивается на трудности, связынные с наличием высоких температур.

Объекты и методы исследований

В связи с этим особую актуальность приобретают дистанционные методы определения температур, основанные на математической обработке результатов измерения температуры и теплового потока. При этом, как правило, решаются обратные задачи теплопроводности (ОВТ), путем применения эффективного метода квазиобращения [1,2,3].

Соответствующая рассматриваемой ОЗТ прямая задача теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t < 1, \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = -1, x = 1, 0 < t < 1, \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = 0, x = 0, 0 < t < 1, \qquad (3)$$

$$T(x, 0) = 0, 0 < x < 1, t = 0, \qquad (4)$$

где $T(x, t)$ - температура пластины.

В качестве дополнительного условия однозначности (модель результата термометрирования внешней поверхности пластины) может быть взято, например, уравнение:

$$T(0, t) = t, \qquad (5)$$

или

$$T(0, t) = t - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{1}{i^2\pi^2} exp(-\pi^2 i^2 t). \qquad (6)$$

Таким образом, целью проводимого в настоящей работе исследования является определение путем решения уравнения (1) с заданными условиями однозначности (2), (3), (6) (или(5)) искомой температуры на внутренней поверхности пластины. Предполагаем, что температура известна на термометрируемой внешней поверхности в любой точке заданного временного интервала.

Прежде чем перейти к решению поставленной задачи, переформируем ее в терминах начально-краевой задачи для эволюционного уравнения второго порядка и поменяем название координатных осей. Имеем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = AT, 0 < t < 1, 0 < x < 1, \qquad (7)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} = q_0(x) = 0, t = 0, 0 < x < 1, \qquad (8)$$

$$T(0, x) = T_0(x), 0 < x < 1, t = 0, \qquad (9)$$

$$T(t, 0) = 0, 0 < t < 1, x = 0. \qquad (10)$$

Здесь оператор $A = \frac{\partial}{\partial x}$. В силу спектральной структуры оператора A задача (7)-(10) в общем случае не обладает свойством устойчивости и является некорректной задачей математической физики. Поэтому для ее решения необходимо построение какого-либо регуляризующего алгоритма. Для построения одного из таких алгоритмов воспользуемся методам квазиобращения, предложенным в [1] и развитым в [2,3].

Алгоритм метода квазиобращения.

На первом шаге решения поставленной задачи перейдем от функции $T(t, x)$, являющейся решением задачи (7)-(10), к отысканию семейства $T_\alpha(t, x)$ решений регуляризованной задачи:

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} = AT_\alpha - \alpha A^* A T_\alpha, 0 < t < 1, 0 < x < 1, \qquad (11)$$

$$-\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = q_0(x) = 0, t = 0, 0 < x < 1, \qquad (12)$$

$$T_\alpha(0, x) = T_0(x), 0 < x < 1, t = 0, \qquad (13)$$

$$T_\alpha(t, 0) = 0, 0 < t < 1, x = 0, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial x} = 0, x = 0, 0 < t < 1, \qquad (15)$$

где, $A^* = -\frac{\partial}{\partial x}, \alpha$ - параметр регулярузации. В рассматриваемом случае функция $q_0(x) = 0$. Однако, в реальных условиях при наличии шума в измерениях она может принимать значения, отличные от нуля.

Заметим, что задание дополнительного условия (15) является необходимым, поскольку уравнение (11) имеет второй порядок по переменной x. Оно непосредственно вытекает из уравнения теплопроводности (7).

В развернутой форме начально-краевая задача (11)-(15) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}, 0 < t < 1, 0 < x < 1, \qquad (16)$$

$$-\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = q_0(x) = 0, t = 0, 0 < x < 1, \qquad (17)$$

$$T_\alpha(0, x) = T_0(x), 0 < x < 1, t = 0, \qquad (18)$$

$$T_\alpha(t, 0) = 0, 0 < t < 1, x = 0, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial x} = 0, x = 0, 0 < t < 1, \qquad (20)$$

На втором шаге решения поставленной задачи рассматривается вычислительный алгоритм, постренный на основе метода конечных разностей. Для численного решения задачи (16)-(20) в области изменения непрерывного аргумента $G = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ построим прямоугольную сетку с параметрами h иτ: $\varpi_h^\tau = \{t_k = k\tau, k = 0,1,2, \dots K - 1;\ x_i = ih, i = 0,1,2, \dots n - 1\}$. Тогда значения искомой функции T_i^k(индекс α для упрощения записи опускаем), определенной в узлах сеточной области ϖ_h^τ, будут являться решениями системы разностных уравнений, полученных из (16)-(20) путем замены производных конечно-разностными соотношениями. Конечно-разностная схема решения задачи имеет вид:

$$\frac{T_i^{k+1}-2T_i^k+T_i^{k-1}}{\tau^2}-\alpha\frac{T_{i+1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i-1}^{k+1}}{h^2}-\frac{T_{i+1}^{k+1}-T_{i-1}^{k+1}}{2h}=0 \quad (21)$$

$$(i=1,2,\ldots,N-2;k=1,2,\ldots K-2)$$

$$T_0^k=0,k=0,1,2,\ldots K-1;i=0, \quad (22)$$

$$T_i^k=T_0^k,k=0,1,2,\ldots K-1;i=0, \quad (23)$$

$$T_1^0=T_{0.i},i=0,1,2,\ldots N-1;k=0, \quad (24)$$

$$T_i^1=T_i^0,k=0,1,2,\ldots N-1;k=0. \quad (25)$$

Задание условий однозначности (22)-(25) позволяет выявить в каждом уравнении разностной системы (21) одно неизвестное $T_{i+1}^{\kappa+1}$ при фиксированных значениях и к. Разрешая (21) относительно $T_{i+1}^{\kappa+1}$, получаем

$$T_{i+1}^{\kappa+1}=\left[2T_i^k-(k_1-k_2)T_{i-1}^{\kappa+1}+(2k_1-1)T_i^{\kappa+1}-T_i^{\kappa-1}\right](k_1+k_2)^{-1}, \quad (26)$$

где $k_1=\frac{\alpha\tau^2}{h^2}$, $k_2=\frac{\tau^2}{2h}$.

Выполняя вычисления по формуле (26) для всех значений i и k (i=1,2,…..,N-1; k=1,2,…..,K-1), можно вычислить последовательно все значения искомой сеточной функции T_i^κ.

Численный эксперимент.

Численный эксперимент проводился в следующем порядке. По заданному начальному распределению поля температур (6) и нулевому начальному тепловому потоку при t=0 по ал-горитму (21)-(25) рассчитывалась температура при t=1. Параметр регуляризациипри этом по-лагался равным нулю, т.е. осуществлялись вы-числения поля температур без регуляризации.

Далее исходные данные (6) зашумлялись синусоидальной помехой вида αsinωt с частотой ω=50.0 и амплитудой a=0.1. После этого осуществлялась регуляризация решения при различных значениях параметра регуляризации α с использованием метода квазиобращения.

Исследовалось также влияние на результат решения регуляризованной задачи предварительного сглаживания зашумленных данных.

Результаты и их обсуждение

Исходная кривая зашумлялась синусоидальной помехой с амплитудой a=0.1 и с частотами ω=66000 и ω=50 и на один шаг по переменной t решалась начально-краевая задача (16)-(20) с параметром α=0. На следующем шаге эксперимента осуществлялась регуляризация с использованием МКО, т.е. решалась задача (16)-(20) с параметром α=10^{-2}, α=10^{-1},α=10^{-2}.

Заключение

Анализ результатов численного эксперимента, проведенного в широком диапозоне амплитуд и частот синусоидальной помехи, а также при различных значениях параметра регуляризации α позволяет сделать следующие выводы:

1) метод квазиобращения является эффективным при решении задачи восстановления температуры печного пространства, по результатам измерения температуры и теплового потока на внешней поверхности футеровки и металлургической печи, представленной в форме начально-краевой задачи для эволюционного уравнения второго порядка;

2) применение алгоритма МКО является эффективным средством сглаживания результатов термометрирования, содержащих как высокочастотные, так и низкочастотные помехи при высоком уровне отношения шум/сигнал и может быть рекомендовано к использованию при решении широкого круга различных задач практической теплотехники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М: Наука, 1986. - 280 с.

2. Вабищевич П.Н. Метод квазиобращения для приближенного решения задач теплообмена/Предпринт ИБРАЭ АН СССР, 1991. Журнал №11. – С.55.

3. Атанбаев С.А. Об одном разностном аналоге метода квазиобращения для эволюционных уравнений // Вестник КазГУ. - Сер.мат. - 1998. - №11. – С.28.