ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК № 1, Т. 1, 2014 г.

УДК 550.3 + 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ БИФУРКАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИЛАТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

А.К. Егоров, А.А. Баймухаметов, М.А. Баймухаметов

Институт механики и машиноведения МОН РК,
E-mail: abayab@mail.ru, *ул. Курмангазы, 29, 050010, г. Алматы, Казахстан*

Исследованы динамические формы потери устойчивости колебаний дилатационной модели Земли, вращающейся в силовом поле, обусловленном Луной и Солнцем. Найдено основное предкритическое напряжённо-деформированное состояние модели Земли. Определены возмущения, связанные с бифуркационными колебаниями модели Земли. Выведены граничные условия устойчивости колебаний. Получено характеристическое уравнение для определения частот бифуркационных колебаний дилатационной модели Земли.

Колебание, устойчивость, деформация, дилатация, Земля, Луна, Солнце

ANALYSIS OF BIFURCATION FREQUENCIES IN THE EARTH’S DILATATION MODEL

A.K. Egorov, A.A. Baimukhametov, M.A. Baimukhametov

Institute of Mechanics and Engineering, Ministry of Education and Science, Republic of Kazakhstan,
E-mail: abayab@mail.ru, *29 Kurmangazy St, 050010 Almaty, Kazakhstan*

The analysis covers dynamic forms of oscillatory stability loss in the dilatation model of the Earth rotating in the force field conditioned by the Moon and Sun. The basic pre-limit stress–strain state of the Earth’s model is found. The perturbations caused by bifurcation of the Earth’s model are determined. The boundary conditions for the oscillatory stability are derived. The authors have obtained characteristic equation for finding frequencies of bifurcation of the Earth’s dilatation model.

Oscillation, stability, deformation, dilatation, Earth, Moon, Sun

Компоненты перемещений в основном предкритическом состоянии имеют вид [1]:

$$u_{1k}^0 = u_{1k0}^0(r)U_k^*(\theta,\lambda),$$

$$u_{2k}^0 = u_{2k0}^0(r)\frac{\partial U_k^*(\theta,\lambda)}{\partial\theta},$$

$$u_{3k}^0 = u_{3k0}^0(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_k^*(\theta,\lambda)}{\partial\lambda}. \tag{1}$$

Дилатация

$$\Theta_{k0}^0(r)U_k^*(\theta,\lambda),(k=1,2). \tag{2}$$

Величины u_{1k}^0, u_{2k}^0 удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$r^2\frac{d^2u_{1k0}^0(r)}{dr^2}+4r\frac{du_{1k0}^0(r)}{dr}+[\frac{\rho r^2\sigma_k^2}{G}-4]u_{1k0}^0(r)=(2r-\frac{r^2}{1-2\nu}\frac{d}{dr})\Theta_{k0}^0(r)-2\gamma\frac{\rho r^3}{G}, \tag{3}$$

$$r^2\frac{d^2u_{2k0}^0(r)}{dr^2}+2r\frac{du_{2k0}^0(r)}{dr}+\frac{\rho r^2\sigma_k^2}{G}u_{2k0}^0(r)=r[\frac{du_{1k0}^0}{dr}-2\Theta_{k0}^0(r)\frac{1-\nu}{1-2\nu}]-\gamma\frac{\rho r^3}{G}, \tag{4}$$

$$u_{2k0}^0(r)=u_{3k0}^0(r). \tag{5}$$

Радиальная компонента ротора вектора перемещений равна нулю [2]:

$$\chi^0=\frac{\partial u_3^0}{\partial\theta}+u_3^0\mathrm{ctg}\theta-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_2^0}{\partial\lambda}\equiv 0\ . \tag{6}$$

Здесь использовано выражение оператора Бельтрами:

$$\nabla_0^2=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}, \tag{7}$$

для которого справедливо тождество [3]:

$$\nabla_0^2U_k^*(\theta,\lambda)=-6U_k^*(\theta,\lambda). \tag{8}$$

К уравнениям (3), (4) присоединяется уравнение для дилатации:

$$\nabla^2\Theta\ \ +\frac{\rho}{2G}\frac{1-2\nu}{1-\nu}(\sigma_k^2\Theta+div\overline{K})=0, \tag{9}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\sigma_k(k=1,2)$ – частоты колебаний в основном предкритическом состоянии, причём σ_1 – суточная, σ_2 – полусуточная частоты.

На Землю помимо инерционных слагаемых действуют также массовые силы ρK_r, ρK_θ, ρK_λ. Величина $div\overline{K}=0$, так как действующие массовые силы консервативны, причём

$$K_{rk}=-\frac{\partial U_k}{\partial r},\ K_{\theta k}=-\frac{1}{r}\frac{\partial U_k}{\partial\theta},\ K_{\lambda k}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_k}{\partial\lambda}. \tag{10}$$

Потенциал U_k для значения k, т.е. соответствующего периода колебаний T_k, представляется следующим образом [4–6]:

$$U_k=-fr^2\mathrm{P}_2^{(k)}(\cos\theta)[A_{2k}\cos(k\lambda-\sigma_kt+\Psi_j)+B_{2k}\sin(k\lambda-\sigma_{kt}+\Psi_j). \tag{11}$$

Суточный период $T_1=\dfrac{2\pi}{\sigma_1}$, полусуточный период $T_2=\dfrac{2\pi}{\sigma_2}$, Ψ_j – фаза, связанная с j–м притягивающим центром [7].

Величины

$$\begin{aligned}A_{2k}&=\frac{2(2-k)!}{(2+k)!}\sum_{j=1}^{m_0}\frac{m_jD_{kj}}{r_j'^3}\mathrm{P}_2^{(k)}(\cos\theta_j')\cos k\lambda_j',\\ B_{2k}&=\frac{2(2-k)!}{(2+k)!}\sum_{j=1}^{m_0}\frac{m_jD_{kj}}{r_j'^3}\mathrm{P}_2^{(k)}(\cos\theta_j')\sin k\lambda_j',\end{aligned} \tag{12}$$

где m_j – масса j-го притягивающего центра; D_{kj} – произвольная постоянная интегрирования по времени.

Потенциал (11) представляет собой гармоническую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа. Его можно записать в виде:

$$U_k=-\gamma r^2U_k^*(\theta,\lambda). \tag{13}$$

Приведём сначала уравнение для дилатации (9). Так как Θ_k^0 определяется формулой (2), а $U_k^*(\theta,\lambda)$ – формулой (8), то уравнение (9) приобретает следующий вид:

$$r^2\frac{d^2\Theta_{k0}^0(r)}{dr^2}+2r\frac{d\Theta_{k0}^0(r)}{dr}+(\frac{\rho}{G}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\sigma_k^2r^2-6)\Theta_{k0}^0(r)=0. \tag{14}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с регулярной особой точкой $r=0$, решаемое в обобщённых степенных рядах [8]:

$$\Theta_{k0}^0(r)=r^{\rho_0}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s r^s . \tag{15}$$

Решая уравнения (3), (4), (14), определяем функции $\Theta_{k0}^0(r)$, $U_{1k0}^0(r)$, $U_{2k0}^0(r)$, зависящие от произвольных постоянных интегрирования по координатам.

Эти решения имеют следующий вид:

$$\Theta_{k0}^0=C_{1k}(r^2-\frac{\rho}{28G}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\sigma_k^2r^4+\frac{\rho^2}{2016G^2}\frac{(1-2\nu)^2}{(1-\nu)^2}\sigma_k^4r^6-...), \tag{16}$$

$$u_{1k0}^0(r)=C_{1k}f_{1k}(r)+C_{2k}f_{2k}(r)+f_{3k}(r), \tag{17}$$

где

$$f_{1k}(r)=\frac{2\nu r^3}{7(1-2\nu)}+\frac{\rho\sigma_k^2r^5(1+4\nu-8\nu^2)}{504G(1-\nu)(1-2\nu)}-\frac{\rho^2\sigma_k^2r^7(2-12\nu^2+12\nu^3)}{33264G^2(1-\nu)^2(1-2\nu)}+...), \tag{18}$$

$$f_{2k}(r)=r-\frac{\rho\sigma_k^2r^3}{14G}+\frac{\rho^2\sigma_k^4r^5}{504G^2}-\frac{\rho^3\sigma_k^6r^7}{33264G^3}+(...), \tag{19}$$

$$f_{3k}(r)=-\frac{\gamma\rho r^3}{7G}+\frac{\gamma\rho^2\sigma_k^2r^5}{252G^2}-\frac{\gamma\rho^3\sigma_k^4r^7}{16632G^3}+(...), \tag{20}$$

$$u_{2k0}^0=C_{1k}\varphi_{1k}(r)+C_{2k}\varphi_{2k}(r)+C_{3k}\varphi_{3k}(r)+\varphi_{4k}(r). \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\varphi_{1k}(r)=\frac{r^3(7-4\nu)}{42(1-2\nu)}+\frac{r\rho\sigma_k^2(125-220\nu+80\nu^2)}{15120G(1-\nu)(1-2\nu)}-\\ -\frac{\rho^2\sigma_k^2r^7(161-462\nu+420\nu^2-112\nu^3)}{931392G^2(1-\nu)^2(1-2\nu)}+(...),\end{gathered} \tag{22}$$

$$\varphi_{2k}(r)=0{,}5r-\frac{5\rho\sigma_k^2r^3}{84G}+\frac{\rho^2\sigma_k^4r^5}{432G^2}-\frac{\rho^3\sigma_k^6r^7}{22176G^3}+(...), \tag{23}$$

$$\varphi_{3k}(r)=1-\frac{\rho\sigma_k^2r^2}{6G}+\frac{\rho^2\sigma_k^4r^4}{120G^2}-\frac{\rho^3\sigma_k^6r^6}{5040G^3}+(...), \tag{24}$$

$$\varphi_{4k}(r)=-\frac{5\gamma\rho r^3}{42G}+\frac{\gamma\rho^2\sigma_k^2r^5}{216G^2}-\frac{\gamma\rho^3\sigma_k^4r^7}{11088G^3}+(...). \tag{25}$$

В случае свободных колебаний здесь необходимо удержать лишь слагаемые, содержащие произвольные постоянные интегрирования по координатам, заменив частоту σ_k на частоту f свободных колебаний. Это находится в соответствии с методом исследования устойчивости деформируемых систем Лейбензона-Ишлинского [8].

Имеет место зависимость

$$\Theta_{k0}^{0}(r)=\frac{du_{1k0}^{0}(r)}{dr}+\frac{2}{r}u_{1k0}^{0}(r)-\frac{6}{r}u_{2k0}^{0}(r). \qquad (26)$$

К этой зависимости следует присоединить два граничных условия при $r=r_0$, где r_0 – радиус дневной поверхности Земли:

$$\frac{\nu}{1-2\nu}\Theta_{k0}^{0}(r_0)+\frac{du_{1k0}^{0}(r)}{dr}+\frac{2}{2G}u_{1k0}^{0}(r)-\frac{\rho g}{r}u_{1k0}^{0}(r_0)=0, \qquad (27)$$

$$\frac{du_{2k0}^{0}(r)}{dr}+\frac{u_{1k0}^{0}(r)-u_{2k0}^{0}(r_0)}{r_0}=0. \qquad (28)$$

Подставляя в соотношения (26)–(28) выражения (16)–(24), получаем систему трёх алгебраических уравнений с тремя неизвестными – произвольными постоянными интегрирования C_{1k}, C_{2k}, C_{3k}. Индекс $k=1,2$. Тогда число произвольных постоянных будет равно шести. Соответственно, число уравнений будет равно шести. Решая эту систему алгебраических уравнений, определяем произвольные постоянные интегрирования по координатам. При счёте следует использовать данные из модели A' Буллена [2]: плотность $\rho=4.605\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, модуль сдвига $G=1.843\cdot10^{12}\,\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$, коэффициент Пуассона $\nu=0.28$, ускорение силы тяжести $g=997\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, обеспечивающие в случае свободных колебаний наблюдаемую с помощью геофизических приборов частоту колебаний с периодом 53.4 мин.

При этом в основном предкритическом состоянии частоты $\sigma_1=0.000073c^{-1}$, $\sigma_2=0.000145c^{-1}$.

Радиальное перемещение от Луны, например, будет:

$$u_1^0=\sum_{k=1}^{2}u_{1k0}^{0}(r_0)U_{k1}^{*}(\theta,\lambda)=u_{110}^{0}(r_0)U_{11}^{*}(\theta,\lambda)+u_{120}^{0}(r_0)U_{21}^{*}(\theta,\lambda), \qquad (29)$$

где

$$u_{110}^{0}(r_0)=C_{11}f_{11}(r_0)+C_{21}f_{21}(r_0)+\gamma f_{31}(r_0), \qquad (30)$$

$$u_{120}^{0}(r_0)=C_{12}f_{12}(r_0)+C_{22}f_{22}(r_0)+\gamma f_{32}(r_0)\ . \qquad (31)$$

Величины

$$U_{11}^{*}(\theta,\lambda)=\frac{1}{3}\mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta)D_{11}\frac{m_1}{r_1'^3}\mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta_1')\cos(\lambda_1'-\lambda+\sigma_1t_1-\Psi_1), \qquad (32)$$

$$U_{21}^{*}(\theta,\lambda)=\frac{1}{12}\mathrm{P}_2^{(2)}(\cos\theta)D_{21}\frac{m_1}{r_1'^3}\mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta_1')\cos(2\lambda_1'-2\lambda+\sigma_1t_1-\Psi_1). \qquad (33)$$

Значения произвольных постоянных интегрирования по времени определяются формулами:

$$D_{11}=\frac{4ar_1'^3}{3u_{110}^{0}(r_0)m_1\sin^2 2\theta_1'\cos(\sigma_1t_1-\psi_1)}, \qquad (34)$$

$$D_{12}=\frac{4br_2'^3}{3u_{110}^{0}(r_0)m_2\sin^2 2\theta_2'\cos(\sigma_1t_1-\psi_2)}, \qquad (35)$$

$$D_{21} = \frac{4br_2'^3}{3u_{120}^0(r_0)m_2 \sin^4 2\theta_2' \cos(\sigma_2 t_1 - \psi_2)}, \tag{36}$$

$$D_{22} = \frac{4ar_1'^3}{3u_{120}^0(r_0)m_1 \sin^4 2\theta_1' \cos(\sigma_2 t_1 - \psi_1)}, \tag{37}$$

где $\Psi_1 = 2°$, $\Psi_2 = 0°$, $a = 36$ см, $b = 16$ см.

По компьютерной программе определяем для времени t_1 полнолуния сферические координаты Луны и Солнца. Деформации основного состояния определяем по формулам Коши, а напряжения – по формулам обобщённого закона Гука [9, 10].

В случае суточного приливного периода для Луны сферическая функция:

$$U_{11}^* = \frac{1}{3} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta) D_{11} \frac{m_1}{r_1'^3} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta_1') \cos(\lambda_1' - \lambda + \sigma_1 t \ - \Psi_1), \tag{38}$$

а полусуточного –

$$U_{21}^* = \frac{1}{12} \mathrm{P}_2^{(2)}(\cos\theta) D_{21} \frac{m_1}{r_1'^3} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta_1') \cos(2\lambda_1' - 2\lambda + \sigma_2 t \ - \Psi_1), \tag{39}$$

для Солнца в случае суточного периода:

$$U_{12}^* = \frac{1}{3} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta) D_{12} \frac{m_1}{r_1'^3} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta_2') \cos(\lambda_2' - \lambda + \sigma_1 t \ - \Psi_2), \tag{40}$$

$$U_{22}^* = \frac{1}{12} \mathrm{P}_2^{(1)}(\cos\theta) D_{22} \frac{m_{21}}{r_2'^3} \mathrm{P}_2^{(2)}(\cos\theta_2') \cos(2\lambda_2' - 2\lambda + \sigma_2 t \ - \Psi_2). \tag{41}$$

Находим постоянные D_{11}, D_{21}, D_{12}, D_{22}. Перемещение определяем, просуммировав по k от 1 до 2.

По соотношениям Коши определяем компоненты тензора деформаций, по обобщённому закону Гука находим компоненты тензора напряжений.

Для проведения расчётов бифуркационных частот сфероидальных колебаний модели Земли в соответствии с методом Лейбензона-Ишлинского [11, 12] пользуются выведенными нами граничными условиями устойчивости колебаний:

$$\sigma_{11} + (\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial r} + \rho g) u_1 = 0, \tag{42}$$

$$\sigma_{12} + \frac{\sigma_{22}^0}{r_0}(u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial \theta}) = 0, \tag{43}$$

$$\sigma_{13} + \frac{\sigma_{33}^0}{r_0}(u_3 - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda}) = 0, \text{ при } \ r = r_0, \tag{44}$$

где σ_{11}^0, σ_{22}^0, σ_{331}^0 – напряжения базисного состояния.

Компоненты возмущений определяются так же, как и для свободных колебаний, согласно методу Лейбензона-Ишлинского [11, 12]. Только здесь в качестве частот выступают бифуркационные частоты f_1, отличные от частоты свободных колебаний в связи с отличием граничных условий для бифуркационных и свободных колебаний.

Граничные условия устойчивости колебаний (42)–(44) приводят к системе трёх линейных однородных алгебраических уравнений с тремя неизвестными C_1', C_2', C_3' – произвольными постоянными интегрирования. Условия нетривиальности (ненулевого) решения этой системы уравнений заключается в равенстве нулю её определителя, называемого характеристическим. Из характеристического уравнения находим бифуркационные частоты f_1.

Характеристическое уравнение для определения частот бифуркационных колебаний Земли:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{, при } r = r_0 , \tag{45}$$

где

$$a_{11} = \frac{\nu}{1-2\nu}(1 - \frac{x}{28}\frac{1-2\nu}{1-\nu} + x^2 \frac{(1-2\nu)^2}{2016(1-\nu)^2}) - \frac{6\nu}{7(1-2\nu)} + x\frac{5(1+4\nu-8\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(2-12\nu^2+12\nu^3)}{4752(1-\nu)^2(1-2\nu)} + \frac{1}{2G}(r_0\frac{\partial\sigma_{11}^0}{\partial r} + \rho g r_0)(-\frac{2\nu}{7(1-2\nu)} + \frac{x(1+4\nu-8\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(2-12\nu^2+12\nu^3)}{33264(1-\nu)^2(1-2\nu)}), \tag{46}$$

$$a_{12} = (1 + \frac{1}{2G}(r_0\frac{\partial\sigma_{11}^0}{\partial r} + \rho g r_0)(1 - \frac{x}{14} + \frac{x^2}{504} - \frac{x^3}{33264}), \tag{47}$$

$$a_{21} = -\frac{7-4\nu}{14(1-2\nu)} + \frac{x(125-220\nu-80\nu^2)}{3024(1-\nu)(1-2\nu)} - \frac{x^2(161-462\nu+420\nu^2-112\nu^3)}{133056(1-\nu)^2(1-2\nu)} + \\ + (1 - \frac{\sigma_{22}^0}{G})(-\frac{2\nu}{7(1-2\nu)} + \frac{x(1+4\nu-8\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(2-12\nu^2+12\nu^3)}{33264(1-\nu)^2(1-2\nu)} - \frac{7-4\nu}{42(1-2\nu)} + \frac{x(125-220\nu-80\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(161-462\nu+420\nu^2-112\nu^3)}{931392(1-\nu)^2(1-2\nu)}), \tag{48}$$

$$a_{22} = 0.5 - \frac{5x}{28} + \frac{5x^2}{432} - \frac{x^3}{3168} + (1 - \frac{\sigma_{22}^0}{G})(1 - \frac{x}{14} + \frac{x^2}{504} - \frac{x^3}{33264} - 0{,}5 + \frac{5x}{84} - \frac{x^2}{432} + \frac{x^3}{22176}), \tag{49}$$

$$a_{23} = (-\frac{x}{3} + \frac{2x^2}{15} - \frac{x^3}{840}) - (1 - \frac{\sigma_{22}^0}{G})(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^3}{5040}), \tag{50}$$

$$a_{31} = -\frac{7-4\nu}{14(1-2\nu)} + \frac{x(125-220\nu-80\nu^2)}{3024(1-\nu)(1-2\nu)} - \frac{x^2(161-462\nu+420\nu^2-112\nu^3)}{133056(1-\nu)^2(1-2\nu)} + \\ + (1 - \frac{\sigma_{33}^0}{G})(-\frac{2\nu}{7(1-2\nu)} + \frac{x(1+4\nu-8\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(2-12\nu^2+12\nu^3)}{33264(1-\nu)^2(1-2\nu)} - \frac{7-4\nu}{42(1-2\nu)} + \frac{x(125-220\nu-80\nu^2)}{504(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{x^2(161-462\nu+420\nu^2-112\nu^3)}{931392(1-\nu)^2(1-2\nu)}), \tag{51}$$

$$a_{32} = 0.5 - \frac{5x}{28} + \frac{5x^2}{432} - \frac{x^3}{3168} + (1 - \frac{\sigma_{33}^0}{G})(1 - \frac{x}{14} + \frac{x^2}{504} - \frac{x^3}{33264} - 0.5 + \frac{5x}{84} - \frac{x^2}{432} + \frac{x^3}{22176}), \tag{52}$$

$$a_{33} = (-\frac{x}{3} + \frac{2x^2}{15} - \frac{x^3}{840}) - (1 - \frac{\sigma_{33}^0}{G})(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^3}{5040}), \;\; x = \frac{\rho f_1^2 r_0^2}{G}. \qquad (53)$$

ВЫВОДЫ

Исследованы частоты бифуркационных колебаний дилатационной модели Земли.

Мера динамической восприимчивости, зависящая от частот бифуркационных колебаний и наблюдаемой частоты свободных колебаний, обеспечивает явления резонансов, служащих спусковым механизмом для землетрясений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Егоров А.К., Баймухаметов М.А.** Упругие деформации дилатационной модели Земли, вызываемые притягивающими центрами // Геодинамика и напряжённое состояние недр Земли. – 2013.
2. **Буллен К.Е.** Введение в теоретическую сейсмологию. – М.: Мир, 1966. – 460 с.
3. **Власов В.Э.** Избранные труды. Том 1. – М.: Наука, 1970. – 241 с.
4. **Егоров А.К., Баймухаметов М.А.** Резонансные явления в Земле, вращающейся в ньютоновом силовом поле Луны и Солнца // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Т. 2, № 4. – С. 425–426.
5. **Egorov A., Baimukhametov M.** Mathematical modeling of georesonance phenomena as a trigger of earthquakes // Journal of Mathematics and Technology. – 2010. – Vol. 1, No 1.
6. **Егоров А.К., Ершибаев У.Д.** Бифуркационные колебания Земли и явления георезонанса как «спускового механизма» будущих землетрясений // Новости науки Казахстана. – 2004. – Т. 81, № 2. – С. 6–8.
7. **Молоденский М.С., Крамер М.В.** Земные приливы и нутации Земли // Изв. АН СССР. – 1961. – 41 с.
8. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Том 2. – М.: Л., 1952. – 656 с.
9. **Лурье А.И.** Теория упругости. – М.: Наука, 1970.
10. **Новожилов В.В.** Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 456 с.
11. **Лейбензон Л.С.** О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочки // Собр. трудов. Том 1. – М.: АН СССР, 1951. – С. 50–85.
12. **Ишлинский А.Ю.** Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. – 1954. – Т. 4, № 2. – С. 140–146.