



УДК 551.24

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ АСТЕНОСФЕРНОГО ДИАПИРИЗМА**

**А. А. Баймухаметов, Н. И. Мартынов,  
А. Г. Танирбергенов**

*Институт механики и машиноведения МОН РК,  
E-mail: abayab@mail.ru, ул. Курмангазы, 29, 050010, г. Алматы, Казахстан*

В приближении Буссинеска рассмотрены три математические модели формирования астеносферного диапиризма: упрощенная модель Ia, учитывающая зависимость вязкости от температуры; общая модель Ib, учитывающая зависимость вязкости от температуры и давления; модель II, учитывающая фазовые переходы, основанные на экспериментальной кривой плавления в верхней мантии. Приведены результаты расчетов. Оценены основные параметры, закономерности и особенности процесса. Показано, что общая модель II наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров. Количественно подтверждена теория Ботта блокового формирования земной коры.

*Астеносфера, диапир, земная кора, эффективная вязкость*

**MATHEMATICAL MODELS OF DIAPIRISM IN ASTENOSPHERE**

**A. A. Baimukhametov, N. I. Martynov, A. G. Tanirbergenov**

*Institute of Mechanics and Machine Engineering, RK Ministry of Education and Science,  
E-mail: abayab@mail.ru, 29 Kurmangazy St, 050010 Almaty, Republic of Kazakhstan*

The authors consider three mathematical models of diapirism in astenosphere using the Boussinesq approximation: simplified model Ia taking into account viscosity and temperature relation; general model Ib accounting for viscosity versus temperature and pressure; model II including phase transformations based on experimental curve of melting in the upper mantle. The paper reports the calculation results. The main parameters, patterns and features of diapirism are estimated. It is shown that general model II offers an exhaustive description of the physics of the phenomenon represented as formation of diapirs in the melt astenosphere. The Bott theory about the structure of the earth crust is quantitatively confirmed.

*Astenosphere, diapir, Earth's crust, apparent viscosity*

Одной из наиболее важных задач геофизики является задача формирования астеносферного диапиризма в верхней мантии. Она органически связана с проблемами выноса тепла с глубинных недр Земли, распределением полезных ископаемых, вулканической деятельностью и землетрясениями, образованием рифтовых зон, движением континентов и с многими другими проблемами [1]. Отметим, что подробная библиография по формированию астеносферного диапиризма в верхней мантии Земли и проблемные вопросы в этой области приведены в работах [1, 2].

При исследовании формирования астеносферного диапиризма в верхней мантии обычно используют три наиболее признанные в настоящее время физические модели [2–8]. В упрощенной модели I (модель Ia) реология верхней мантии и литосферы с достаточной степенью точности аппроксимируется ньютоновской вязкой несжимаемой жидкостью с плотностью и вязкостью, зависящими от температуры [2, 3, 6]. В общей модели I (модель Ib), кроме того, вязкость зависит еще от гидростатического давления [2, 7]. При этом теплопоглощением за счет фазовых перехо-

дов в астеносфере пренебрегают по сравнению с тепловым потоком, идущим с нижних слоев астеносферы. В модели II непосредственно учитываются фазовые переходы, основанные на экспериментальной кривой плавления в верхней мантии [2, 4, 5, 8]. Земная кора и астеносфера на больших отрезках времени представляют собой ньютоновскую вязкую несжимаемую жидкостью с плотностью, зависящей от температуры и доли подплавленной фазы.

Отметим, что проблема астеносферного диапиризма, органически связанная с другими не менее важными проблемами геофизики, далека от своего завершения [1]. Не обсуждая достоинства и недостатки численных методов, применяемых в этой области, отметим, что численные исследования немногочисленны (особенно трехмерных течений) и существуют определенные трудности в описании границы раздела сред.

В настоящей работе обсуждаются результаты расчетов формирования соляного диапиризма, проведенных на основе математических моделей I а, I б и II. Для простоты ограничимся рассмотрением двумерной модели и прямоугольной области  $\Omega$ . Высота прямоугольной области полагается  $H_0 = 250$  км (в начальный момент времени на земную кору приходится 40 км мощности, на мощность верхней мантии — 210 км).

Система уравнений, описывающая формирование астеносферного диапиризма в поле силы тяжести с переносом тепла, представляет собой квазистационарную систему уравнений несжимаемой сильно вязкой ньютоновской жидкости в приближении Буссинеска.

Для модели Ia в координатах  $Ox_1x_2$  (ось  $Ox_2$  направлена вертикально вверх) система уравнений имеет следующий вид [2,6]:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \left( \frac{\partial V_k}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \right) - \rho g \delta_{2i}, \quad \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2), \quad (1)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_* V_k) = 0, \quad (3)$$

$$\rho = \rho_* (1 - \alpha(T - T_*)), \quad \nu = \nu_0 \exp\left(\frac{\beta}{T} - \frac{\beta}{T_0}\right), \quad \mu = \rho \nu. \quad (4)$$

Здесь по неммым индексам производится суммирование;  $\delta_{2i}$  — символ Кронекера;  $p$  — давление;  $V_k$  — компоненты скорости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\rho$  — плотность;  $\rho_*$  — невозмущенная плотность, зависящая от химического состава материала, или плотность при абсолютной температуре  $T_*$ ;  $T$  — абсолютная температура;  $\alpha$  — коэффициент теплового объемного расширения;  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $\mu, \nu$  — коэффициенты динамической и кинематической вязкостей соответственно. Коэффициент  $\beta$  выбирается из условия  $\nu(T_0) = \nu_0$ ,  $\nu(T_2 = 1073 K^0) = \nu_2$ . Индексом «0» обозначены характерные значения параметров процесса.

Радиогенные источники тепла в данной работе не учитываются, поэтому отсутствуют соответствующие им члены в уравнении (2). Отметим, что в соответствующих уравнениях импульса (1) опущены инерциальные члены ввиду того, что число Прандтля велико, а в уравнении (2) отсутствует диссипативная функция, характеризующая генерацию тепла за счет внутреннего трения из-за больших значений динамической вязкости [2, 6]. За характерные скорость и время принимались величины  $u_0 = k/H_0 \rho_0 C_p$ ,  $t_0 = H_0/u_0$ . Давление относилось к  $p_0 = \rho_0 g H_0$ , а температура к  $T_0 = 1773$  К. Средняя плотность верхней мантии полагалась  $\rho_0 = \rho_* = 3.4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,

плотность земной коры  $\rho_* = 2.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , ускорение силы тяжести  $g = 9.9 \text{ м/с}^2$ ,  $T_* = 273 \text{ К}$ . Значения  $k, C_p, \alpha$  выбирались равными средним значениям для верхней мантии:  $k = 4.0 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ;  $C_p = 1.2 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$ ;  $\alpha = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}$ .

К системе уравнений (1)–(4) добавляются начальные и граничные условия. При  $t = 0$  задаются распределения  $\rho_*, T$ . Граничные условия могут быть разнообразными. В данном исследовании (для всех моделей) на боковых стенках ставились условия симметрии, а на верхней и нижней стенках — условия прилипания. Кроме того, на нижней стенке задавалась температура  $T(x)$ , а на верхней стенке температура поддерживалась равной нулю по Цельсию.

Для модели Iб справедливы уравнения (1)–(3), а соотношения (4) заменяются на следующие [2, 7]:

$$\mu(t, x) = \mu_*(t, x) \exp\left(\frac{E + pV}{RT} - \frac{E_0 + p_0V_0}{RT_0}\right), \quad \rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_*)), \quad \frac{\partial \mu_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\mu_* V_k) = 0, \quad (5)$$

где  $\mu_* = \mu_*(t, x)$  — температурно-невозмущенная динамическая вязкость;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $E, V$  — энергия и объем активации ( $E = E_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ Дж/моль}$ ,  $V = V_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$ ). Так как процессы формирования астеносферного диапиризма медленные, то гидростатическое давление как минимум на порядок больше соответствующего динамического давления. Поэтому в первом соотношении (5) давление заменяется гидростатическим давлением. При  $t = 0$  задаются распределения  $\rho_*, \mu_*, T$ .

Для модели II справедливы уравнения (1), (3), а уравнения (2), (4) заменяются на следующие [2, 8]:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} + \rho Q, \quad (k=1,2), \quad Q = -L \frac{d\varphi}{dt}, \quad (6)$$

$$\rho = \rho_*(1 - \alpha(T - T_\Phi) - \gamma\varphi), \quad \varphi(p, T) = 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctg(\varepsilon(T - T_\Phi(p))^{-1}), \quad (7)$$

$$T_\Phi(p) = 1,09x_2^2 - 1,254x_2 + 1,0. \quad (8)$$

Здесь учтено частичное плавление астеносферы, которое приводит к ее разуплотнению и, как следствие, к гравитационной неустойчивости, когда более тяжелая астеносфера покоится на более легких расплавленных слоях астеносферы. В качестве функции, учитывающей фазовый переход, выбирается массовая доля подплавленной фазы  $\varphi$  [2, 4, 8] так, что  $\varphi = 1$  для астеносферы и  $\varphi = 0$  для литосферы, а в переходной области  $\varphi$  изменяется от 1 до 0.

В первом соотношении (7)  $\gamma$  — скорость нарастания фазового перехода. Отметим, что фазовый переход происходит быстро относительно характерного времени развития неустойчивости. Тогда  $\varphi$  есть функция температуры и давления. Она непрерывным образом приближает скачок через кривую плавления и может быть выбрана, например [4, 8], в виде второго соотношения (7).  $T_\Phi(p)$  — известное уравнение кривой плавления, а  $\varepsilon$  определяет скорость изменения фазового состава (находится из экспериментального графика плавления [4, 8]). При этом кинематическая вязкость подплавленной фазы выбиралась равной  $\nu = 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}$ , а твердой фазы  $\nu = 10^{20} \text{ м}^2/\text{с}$  [8]. Соотношение (8) представляет собой безразмерную форму экспериментальной кривой плавления, полученную методом наименьших квадратов [8]. Для существования частично расплавленного слоя необходимо, чтобы геотерма пересекалась с кривой плавления. Удельная мощность тепла  $Q$  [2, 4, 8] была выбрана в виде третьего соотношения (6), где  $L$  — скрытая теплота плавления. Знак минус указывает на то, что при плавлении теплота поглощается. При расчетах полагалось:  $\gamma = 0.04$ , а  $L = 3.35 \cdot 10^4 \text{ Дж/кг}$  [2, 4, 8].

Таким образом, модель II описывается системой уравнений (1), (3), (6)–(8). К ним добавляются соответствующие начальные и краевые условия [8].

Для реализации приведенных математических моделей было разработано и обосновано несколько численных методов дивергентного типа, основанных на схеме расщепления по физическим процессам с использованием монотонных разностных схем [2, 6–8]. Отметим, что выделение вероятных зон разрушения земной коры в [6–8] базируется на упрощенном критерии прочности горных пород с использованием максимальных значений девиатора касательных напряжений.

На рис. 1а–г (модель I а) приведены профили изотерм и поля скоростей для двух моментов времени формирования астеносферного диапиризма. На нижней границе области задавалась температура 1773 К, а в двух центральных соседних точках нижней границы области температура задана на 20% выше, что моделирует неоднородность теплового потока с нижних слоев верхней мантии. Кинематическая вязкость изменялась в пределах  $v_1 = 1.8 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с} \leq v \leq v_2 = 1.8 \cdot 10^{20} \text{ м}^2/\text{с}$ .

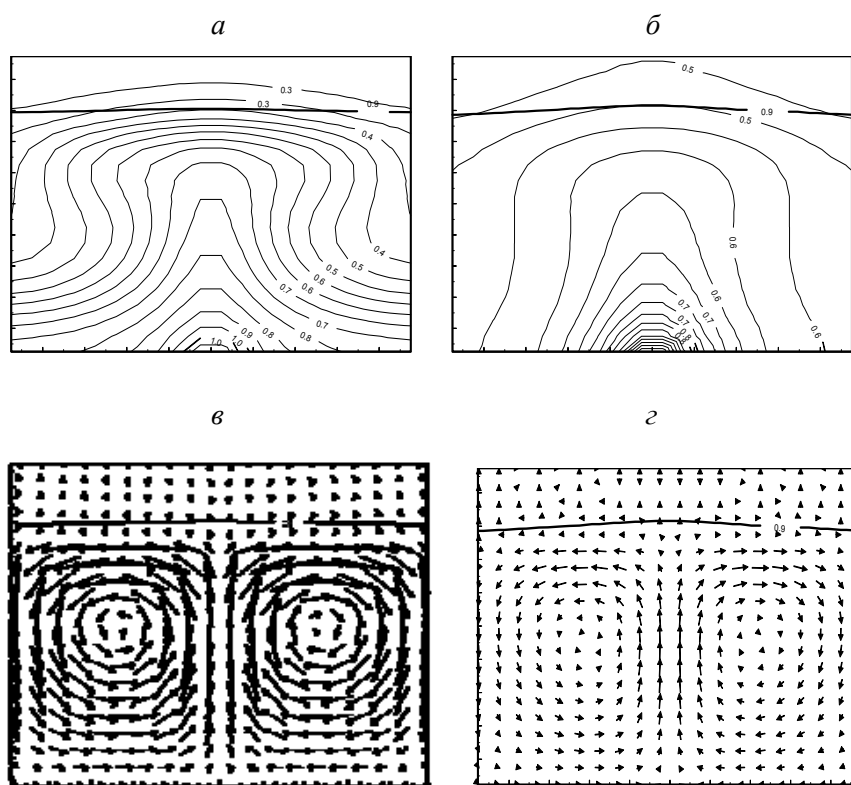


Рис. 1. Модель I а. Распределение изотерм (а, б) и поля скоростей (в, г) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t = 11.5$  млн лет (а, в) и  $t = 34$  млн лет (б, г)

Процесс формирования астеносферного диапира протекает неравномерно. Сначала процесс формирования астеносферного диапира со временем ускоряется, а затем замедляется и примерно через 36 млн лет выходит на стационарный режим. Так, значение максимальной скорости меняется от 1 до 12.4 км/млн лет, достигая максимума при  $t = 12.6$  млн лет, с постепенным выходом на стационарное значение 2.8 км/млн лет. На рис. 1в, г отчетливо видны две конвективные ячейки в верхней мантии. Интенсивность поля скоростей существенно выше на более раннем этапе (рис. 1в) развития процесса, чем на более позднем (рис. 1г), рис. 1а, б свидетельствуют о том, что изотермы высоких температур изогнуты сильнее, чем изотермы низких температур. Этот факт указывает на более интенсивные движения и в областях с большей температурой, что подтверждается рис. 1в, г. При этом тепловой поток в центральной части расчетной области повышается, а на периферии падает, что связано с опусканием вещества в этой об-

ласти. Значения основных параметров, характеризующих формирование астеносферного диапира численно близки к значениям характерных параметров работы [3].

На рис. 1а–г в процессе формирования астеносферного диапира отчетливо просматривается утонение земной коры в центральной части области и практически незаметное опускание ее на периферии. Этап медленного утонения земной коры сменяется этапом относительно быстрого утонения. Через 36 млн лет утонение земной коры в центральной части составляет 5.3 км, а в ее периферийной части опускание составляет 0.4 км. Наибольшие значения девиатора касательных напряжений достигаются в областях земной коры, непосредственно примыкающих в области утонения к астеносфере. В этих областях происходит хрупкое разрушение земной коры с образованием трещин и подъем магмы по этим трещинам.

В работе [6] детально исследована механика прогиба земной коры. Неравномерность теплового потока с нижних слоев астеносферы существенно влияет на геометрию прогиба земной коры. Расчеты [7], проведенные для модели Ib (при прочих равных условиях, что и для модели Ia) показали, что процесс формирования астеносферного диапиризма замедляется, но качественно имеет те же тенденции, что и в модели Ia. Значения основных параметров, характеризующих формирование астеносферного диапира в 1.5–2.5 раза меньше соответствующих параметров модели Ia, а модули скоростей больше в верхней части конвективных ячеек, чем в нижней, что связано с влиянием давления на динамическую вязкость.

Установлено [6, 7], что использование упрощенной модели Ia и общей модели Ib для описания астеносферного диапиризма ограничено относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости и относительно умеренным тепловым потоком с нижних слоев верхней мантии.

Наиболее полно отражает физику формирования астеносферного диапиризма, как показали расчеты [8], общая модель II, учитывающая фазовые переходы. На рис. 2а–г приведены профили изотерм и распределения расплавленной фазы астеносферы для различных моментов времени формирования астеносферного диапиризма [8]. Граничные значения для температуры на верхней и нижней границах области такие же, как и в модели Ia. Граница расплавленной фазы астеносферы, в соответствии с теорией однородных разностных схем, определялась местоположением точек, где  $\varphi = 0.5$ .

Расчеты [8] показали, что процесс формирования астеносферного диапиризма замедляется по отношению к модели Ia и ускоряется по отношению к более общей модели Ib. Это связано с тем, что часть энергии расходуется на фазовые переходы, а в общей модели Ib экспоненциальная зависимость динамической вязкости от гидростатического давления сильно замедляет процесс. Сначала процесс формирования астеносферного диапира со временем ускоряется, а затем замедляется и примерно через 38 млн лет начинает выходить на стационарный режим. Значение максимальной скорости меняется от 0.8 до 10.6 км/млн лет, достигая максимума при  $t = 17.4$  млн лет. На рис. 2а–г изотермы высоких температур изогнуты сильнее, чем изотермы низких температур. Более интенсивны движения в областях с большей температурой. Тепловой поток в центральной части расчетной области повышается, а на периферии падает, что связано с опусканием вещества в этой области.

На раннем этапе формирования астеносферного диапиризма подплавленная фаза астеносферы представляет собой прямоугольную область [8], которая за счет повышенного теплового потока в центральной части области со временем начинает выпучиваться (рис. 2а, б).

Со временем происходит опускание холодного нерасплавленного вещества астеносферы, а подплавленная часть астеносферы вытесняется в центральную часть области (рис. 2б, в). Фазовый переход в этих областях прекращается, а присутствующий ранее расплав астеносферы вытесняется в центральную часть области (рис. 2в). Затем происходит всплывание расплава астеносферы, в результате чего образуется грибовидная структура, похожая на соляной купол —

астеносферный диапир (рис. 2з). Через определенное время [8] происходит отрыв подплавленного вещества астеносферы и образуется астеносферная линза.

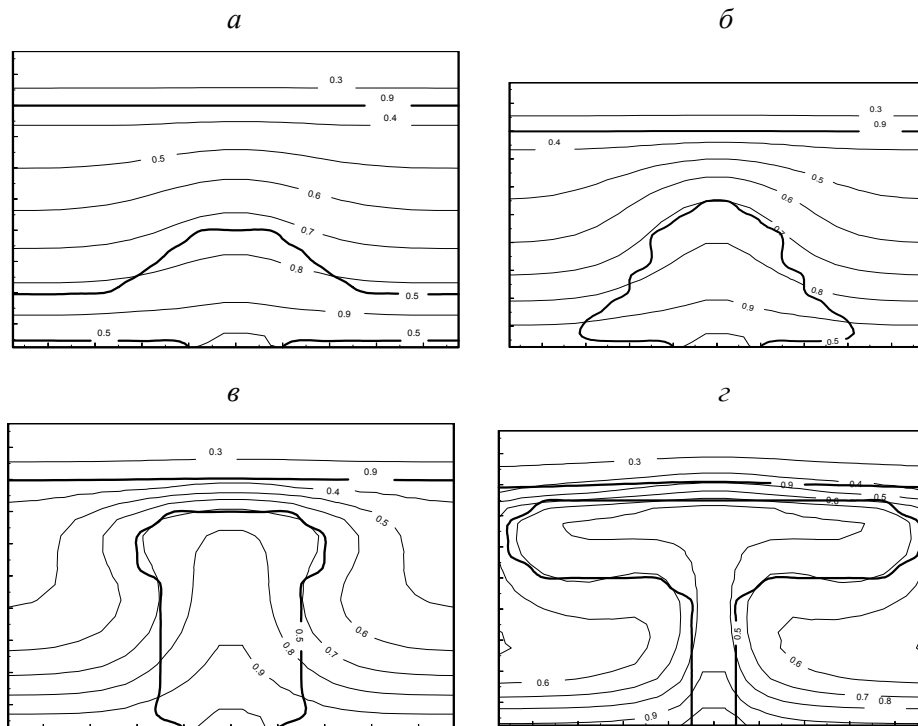


Рис. 2. Модель II. Распределение изотерм и подплавленной фазы астеносферы (а, б, в, з) формирования астеносферного диапиризма в моменты времени  $t$ , млн лет: 13.5 (а), 16.2 (б), 21.6 (в), 38 (з)

На рис. 2в, з в процессе формирования астеносферного диапира отчетливо просматривается утонение земной коры (широкого сводного поднятия) в центральной части области и практически незаметное опускание земной коры на периферии. Через 38 млн лет утонение земной коры (сводного поднятия) в центральной части составляет 4.4 км, а в ее периферийной части опускание равно 0.5 км [8].

Согласно Ботту [9], по обе стороны от вершины широкого сводного поднятия образуются два наклонных разлома, после чего блок земной коры, ограниченный этими разломами, начинает погружаться вследствие растекания нижнего пластичного слоя под действием растягивающих напряжений.

Как показали расчеты [2, 6–8], развитие гравитационной неустойчивости на границе земной коры и астеносферы приводит к росту и перераспределению напряжений в среде. В области над диапиром действуют растягивающие напряжения, а по его сторонам — сжимающие. Наибольшие значения девиатора касательных напряжений достигаются в областях земной коры (симметричных относительно вертикальной оси, проходящей через центр области), непосредственно примыкающих к области утонения. В результате в этих областях происходит хрупкое разрушение земной коры с образованием трещин–разломов. Далее отмечается подъем магмы по этим трещинам–разломам, а также погружение образовавшегося блока земной коры в центральной части области. Таким образом, расчеты количественно подтверждают теорию Ботта [9].

## ВЫВОДЫ

Рассмотрены три модели формирования астеносферного диапиризма. Применение моделей Ia, Ib для описания астеносферного диапиризма ограничены относительно небольшим диапазоном изменения эффективной вязкости. Выявлено утонение и опускание земной коры в резуль-

тате конвекции в верхней мантии, а также зоны разрушения в земной коре. Учет влияния давления на динамическую вязкость в модели Iб существенно замедляет процесс развития астеносферного диапиризма. Общая модель II, учитывающая фазовые переходы, наиболее полно отражает физику явления и описывает формирование расплавленной астеносферы в виде диапиров. Количественно подтверждена теория Ботта блокового формирования земной коры.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Foulger G. B.** Plates vs. plumes: a geological controversy. — New-York: Willey–Blackwell, 2010.
2. **Баймухаметов А. А., Мартынов Н. И., Танирбергенов А. Г.** Механика магматического диапиризма с фазовыми переходами. — Алматы: ИММаш МОН РК, 2014.
3. **Малевский А. В.** Численная модель астеносферного диапиризма // Физика Земли. — 1986. — № 9.
4. **Малевский А. В.** Механика процесса образования астеносферного диапира // Вычисл. сейсмология. — 1987. — Вып. 20.
5. **Jörg Hasenclever et al.** 2D and 3D numerical models on compositionally buoyant diapirs in the mantle wedge // Earth and Planetary Science Letters, 2011, vol. 311.
6. **Баймухаметов А. А., Мартынов Н. И., Танирбергенов А. Г.** Численное моделирование астеносферного диапиризма // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2014. — № 2.
7. **Баймухаметов А. А., Мартынов Н. И., Танирбергенов А. Г.** Механика формирования астеносферного диапиризма // Актуальные проблемы механики и машиностроения: материалы Междунар. науч. конф., посвященной 80-летию академика А. Н. Тюреходжаева: — Алматы, 2014. — Т. 2.
8. **Vaimukhametov A. A., Martynov N. I., Tanirbergenov A. G.** Numerical design of asthenospheric diapirism with phase transitions // Science and world. — 2014. — № 9(13).
9. **Bott M. H. P.** Crustal doming and mechanisms of continental rifting // Tectonophysics. — 1981. — Vol. 73.