матизированной контурной обработки при сборке деталей обуви //Journal of Advanced Researchin Technical Science, ISSN 2474-5901, г. Норт-Чарлстон, США. 2016, №3.- С.38-45.
7. Баубеков С.Д., Таукебаева К. С., С.С. Баубеков. Моделирование процесса ориентирования деталей при автоматизированной контурной обработке // Современные наукоемкие технологии М.: РАЕ, ВАК РФ, 2017. – С.13-17.
8. Баубеков С.Д., Баубеков С.С., Таукебаева К.С. К определению оптимальных параметров автоматизированной машины для контурной обработки деталей// Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, № 11, М.: РАЕ -2015.- С.68-72.

УДК 531: 622.233: 622.235
МРНТИ 27.35.31

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТЕРЖНЯ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДОЙ

С.Н. ТОЙБАЕВ[1], А.А. АКИМХАНОВА[1]

([1]Алматинский технологический университет, Алматы, Казахстан)
E-mail: Abzala4@mail.ru, aigera__81@mail.ru

В данной статье развиваемый подход применяется для вывода уравнений колебания круглых стержней с учетом вязкости материала стержня, влияние окружающей среды и температуры. Получены точное и приближенное уравнения крутильного и продольного колебаний круглого стержня. При описании стержня, находящегося в деформируемой среде, рассматриваются три условия контакта: отсутствие трения (гладкий контакт), трение между стержнем и средой по закону Кулона и жесткий контакт.

Ключевые слова: динамическое взаимодействие, колебания, стержень, окружающая среда, трение, жесткий контакт.

СЫРЫҚТЫҢ ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН ОРТАМЕН ДИНАМИКАЛЫҚ ӘСЕРЛЕСУІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУІ

С.Н. ТОЙБАЕВ[1], А.А. АКИМХАНОВА[1]

([1]Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан)
E-mail: Abzala4@mail.ru, aigera__81@mail.ru

Мақалада қимасы дөңгелек тұтқыр сырықтың сипаттамасын, қоршаған ортаны және температураны есепке алғандағы тербелмелі қозғалысының теңдеуін құрастыру тәсілі қарастырылған. Дөңгелек тұтқыр сырықтың бұралу тербелістерінің нақты және жуықтау теңдеулері алынған. Өзгерту ортада сырықтың қандай күйде болатынын білу үшін келесі үш шарт қарастырылған: үйкеліс жоқ (жылтыр жанаспа), сырықпен ортаның үйкелісі, сырықтың ортамен әсерінде Кулон заңы орындалатын және сырық пен оның қатаң жанаспасы.

Негізгі сөздер: динамикалық әсерлесуі, тербеліс, сырық, қоршаған орта, үйкеліс, қатаң жанаспа.

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC INTERACTION OF A ROD WITH A DEFORMABLE MEDIUM

S.N. TOYBAEV[1], A.A. AKIMKHANOVA[1]

([1]Almaty Technologicial University, Kazakhstan, Almaty)
E-mail: Abzala4@mail.ru, aigera__81@mail.ru

In this article, the developed approach is used to derive the equations of oscillations of round rods, taking into account the viscosity of the rod material, the influence of the environment and

temperature. The exact and approximate equations of torsional and longitudinal vibrations of a round rod are obtained. When describing a rod in a deformable medium, three contact conditions are considered: the absence of friction (smooth contact), the friction between the rod and the medium according to Coulomb's law, and the hard contact.

Key words: dynamic interaction, oscillations, rod, environment, friction, hard contact.

Введение

Теория продольного колебания стержней впервые была разработана Похгамером и Кри. В этой же работе достаточно полно отражены и ее дальнейшие исследования. Для вывода классического уравнения колебания стержня использовались гипотезы плоского сечения при продольном колебании и гипотеза Кирхгофа для поперечного колебания. Подходом, развитым С.П. Тимошенко и другими, получены гиперболические уравнения для поперечного колебания стержня.

Однако очень мало работ посвящено изучению колебания круглого стержня, находящегося в деформируемой среде, особенно при наличии трения по границе контакта стержень – окружающая среда. Наиболее интересны результаты в работах [1,2,3]. В частности, в работе [3] окружающая среда рассматривалась как винклеровская. Для нее выведено уравнение продольного колебания упругого стержня при наличии трения по границе контакта.

При исследовании колебания стержень будем рассматривать как трехмерное вязкоупругое изотропное тело с постоянными характеристиками, т.е. считаем, что материал стержня и среды однороден.

Современный этап развития строительной механики, в том числе при определении НДС строительных конструкций, связан с широким использованием численных методов. Практика выдвигает на передний план задачи многовариантных исследований двумерных и трехмерных систем, адекватное решение которых иногда возможно только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются трудоемкими процессами. Этим, в частности, и объясняется превалирование численных методов, имеющих место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Поэтому фундаментально-прикладное исследование данной проблемы, несомненно, является актуальной задачей.

Объекты и методы исследований

Объектом исследования является динамическое взаимодействие стержней с деформируемой средой. При исследовании волновых полей в линейных деформируемых средах или при решении задач колебания стержней используются математические методы интегральные преобразования Фурье и Лапласа.

Результаты и их обсуждение

Зависимость между напряжениями σ_{ij}, деформациями E_{ij} и температурой в общем случае зададим в виде

$$\vec{U}_m = grad\Phi_m + rot\left[\Psi_{1m}\vec{e}_z + rot\left(\Psi_{2m}\vec{e}_z\right)\right],$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = M_m(\varepsilon_{ij}^{(m)}),\ i \neq j,\ i,j = r,\theta,z, \tag{1}$$

где вязкоупругие операторы L_m, M_m, K_m. Индекс «0» относится к стержню, а «1» - к окружающей среде.

Вводя потенциалы продольных и поперечных волн по формуле [8]

$$\vec{U}_m = grad\Phi_m + rot\left[\Psi_{1m}\vec{e}_z + rot\left(\Psi_{2m}\vec{e}_z\right)\right], \tag{2}$$

уравнения движения сред материала стержня и окружающей среды приводим к виду

$$N_m\left(\Delta\Phi_m\right) = p_m\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial t^2},\ N_m = L_m + 2M_m,$$
$$M_m\left(\Delta\Psi_{jm}\right) = p_m\frac{\partial^2\Psi_{jm}}{\partial t^2},\ j = 0,1. \tag{3}$$

При исследовании крутильных колебаний стержня граничные условия при $r = r_0$

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} + F_{r\theta}, \quad U_{\theta}^{(0)} = U_{\theta}^{(1)}. \tag{4}$$

Здесь r_0 - радиус круглого стержня.

При рассмотрении продольного колебания стержня будем использовать различные виды граничных условий. При отсутствии трения

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(1)} + f_r(z,t), \ \sigma_{rz}^{(0)} = \sigma_{rz}^{(1)} + f_{rz}(z,t) = 0, \\ U_r^{(0)} = U_r^{(1)}, \ r = r_0, \end{gathered} \tag{5}$$

при наличии сухого трения Кулона

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(1)} + f_r(z,t), \ \sigma_{rz}^{(0)} = -\eta_0 \sigma_{rr}^{(0)}, \\ \sigma_{rz}^{(1)} = -\eta_0 \sigma_{rr}^{(0)} + f_{rz}(z,t), \ U_r^{(0)} = U_r^{(1)}, \ r = r_0, \end{gathered} \tag{6}$$

где η_0 - коэффициент трения, и при жестком контакте

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(1)} + f_r(z,t), \ \sigma_{rz}^{(0)} = \sigma_{rz}^{(1)} + f_{rz}(z,t), \\ U_r^{(0)} = U_r^{(1)}, \ U_z^{(0)} = U_z^{(1)}, \ r = r_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Во всех четырех граничных условиях (4) - (7) искомые функции от угла θ не зависят.

Для поперечных колебаний возьмем лишь условия гладкого контакта

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}^{(0)} = \sigma_{rr}^{(1)} + f_r(z,\theta,t), \ \sigma_{r\theta}^{(0)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{rz}^{(0)} = \sigma_{rz}^{(1)} = 0, \ U_r^{(0)} = U_r^{(1)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Начальные условия для всех описываемых задач будем считать нулевыми.

Уравнения крутильного колебания круглого стержня, находящегося в деформируемой среде.

Крутильное колебание описывается лишь потенциалами

$$\Psi_{1m} = \int_0^{\infty} \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int_i \Psi_{1m}^{(0)} \exp(pt) dp \, (m = 0,1), \tag{9}$$

при этом функция, входящая в граничные условия (4),

$$F_{r\theta} = \int_0^{\infty} \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int_i f_{r\theta} \exp(pt) dp. \tag{10}$$

Для потенциала $\Psi_{1m}^{(0)}$ решения, ограниченные при $r = 0$ и ∞, соответственно будут

$$\Psi_{10}^{(0)} = B_{10} I_0(\beta_0 r), \quad \Psi_{11}^{(0)} = B_{11} K_0(\beta_1 r). \tag{11}$$

Здесь $\beta_m^2 = \rho_m p^2 M_{m0}^{-1} + k^2$.

Граничные условия (4) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} \beta_0^2 \left[\frac{2}{\beta_0 r_0} I_1(\beta_0 r_0) - I_0(\beta_0 r_0) \right] B_{10} + \frac{M_{10}}{M_{00}} \beta_1^2 \left[\frac{2}{\beta_1 r_0} K_1(\beta_1 r_0) + K_0(\beta_1 r_0) \right] B_{11} = M_{00}^{-1} f_{rz}, \\ B_{10} \beta_0 I_1(\beta_0 r_0) + B_{11} \beta_1 K_1(\beta_1 r_0) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Исключая из (12) постоянную интегрирования B_{11}, получаем

$$\beta_0^2\left[\frac{2}{\beta_0 r_0}I_1(\beta_0 r_0)-I_0(\beta_0 r_0)\right]B_{10}-\frac{M_{10}}{M_{00}}\beta_0 I_1(\beta_0 r_0)\left[\frac{2}{r_0}+\beta_1\frac{K_0(\beta_1 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)}\right]B_{10}=M_{00}^{-1}f_{r\theta},\quad \text{где}$$

$$B_{11}=-\frac{\beta_0}{\beta_1}\frac{I_1(\beta_0 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)}. \tag{13}$$

При исследовании волновых процессов при крутильных колебаниях аргументы функций $K_\nu(\beta_1 r_0)$ велики (большие значе-ния P), и тогда с большей степенью точности

$$\frac{K_0(\beta_1 r_0)}{K_1(\beta_1 r_0)}\cong 1.$$

Преобразованное перемещение точек стержня

$$U_{\theta 0}^{(0)}=-\beta_0 I_1(\beta_0 r)B_{10}. \tag{14}$$

Разложим правую часть в (14) в степенной ряд по r

$$U_{\theta,0}^{(0)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta_0^2 B_{10}\right)\beta_0^{2n}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \tag{15}$$

и введем главную часть $V_{\theta,0}=-\left(\beta_0^2 B_{10}\right)$. Тогда вместо (15) получим представление

$$U_{\theta,0}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}V_{\theta,0}\beta_0^{2n}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \tag{16}$$

Обращая (16) по k и p, имеем

$$U_\theta^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^{(n)}V_\theta\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},\quad \lambda_2^{(n)}=\left[\rho_0 M_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]. \tag{17}$$

Таким образом, главная часть смеще-ния V_θ однозначно определяет распределе-ние перемещения U_θ и напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$ по сечению стержня. Для нахождения V_θ имеем граничное условие (14), откуда получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\lambda_2^{(n)}+M_1M_0^{-1}\left[1+\frac{r_0}{2}R_\theta\right]\frac{1}{n+1}\lambda_2^{(n)}\right\}V_\theta\frac{(r_0/2)^{2n}}{(n!)^2}=-M_0^{-1}\left[F_{r\theta}(z,t)\right], \tag{18}$$

которое является точным уравнением крутильного колебания вязкоупругого круг-лого стержня в деформируемой среде. При $M_1=0$ выводим уравнение крутильного ко-лебания стержня при отсутствии среды. Опе-ратор R_θ в (18) в общем случае сложен. Од-нако для волновых процессов приближенно

$$R(z)\,\square\, p_1^{1/2}M_1^{1/2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right). \tag{19}$$

Ограничиваясь в (23) производными по z и по t не выше второго порядка, для V_θ получаем приближенное уравнение

$$\lambda_2^{(1)}V_\theta+\frac{8}{r_0^2}M_1M_0^{-1}\left(1+\frac{r_0}{2}\rho_1^{1/2}M_1^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}\right)V_\theta=-\frac{8}{r_0^2}M_0^{-1}\left[F_{r\theta}\right], \tag{20}$$

Которое для упругого стержня и при $M_m=\mu_m$, $F_{r\theta}=0$ переходит в классическое

$$\frac{1}{b_0^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}=0.$$

Как видно из (20), для упругих стержня и среды окружающая среда влияет на колебание стержня не как винклеровская, а как среда с вязкой моделью. Напряжения в стержне

$$\sigma_{r\theta}^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} M_0 \left\{ \frac{n}{n+1} \lambda_2^{(n)} \left(V_\theta\right) \right\} \frac{\left(r/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2}; \quad (21)$$

$$\sigma_{z\theta}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} M_0 \left\{ \lambda_2^{(n)} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \right\} \frac{\left(r/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}.$$

Аналогично можно вывести приближенные уравнения более высокого порядка по производным.

Уравнения продольного колебания стержня. Гладкий контакт.

Продольные колебания круглого стержня, находящегося в деформируемой среде, описываются потенциалами Φ_m, Ψ_{2m}, при этом граничные условия имеют вид (5). Данные потенциалы положим равными

$$\Phi_m = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix} \right\} dk \int_t \Phi_m^{(0)} \exp\left(pt\right) dp; \quad (22)$$

$$\Psi_{2m} = \int_0^{\infty} \left. \begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix} \right\} dk \int_t \Psi_{2m}^{(0)} \exp\left(pt\right) dp.$$

Для $\Phi_m^{(0)}$, $\Psi_{2m}^{(0)}$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2\Phi_m^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi_m^{(0)}}{dr} - \alpha_m^2 \Phi_{m,0} = 0; \frac{d^2\Psi_{2m}^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_{2m}^{(0)}}{dr} - \beta_m^2 \Psi_{2m}^{(0)} = 0,$$

решения которых, ограниченные при $r = 0$ и ∞, соответственно имеют вид

$$\Phi_0^{(0)} = A_0 I_0\left(\alpha_0, r\right); \Phi_1^{(0)} = A_1 K_0\left(\alpha_1, r\right); \Psi_{2,0}^{(0)} = B_0 I_0\left(\beta_0 r\right); \quad (23)$$

$$\Psi_{2,1}^{(0)} = B_1 K_0\left(\beta_1 r\right); \alpha_m^2 = \rho_m p^2 N_{m0}^{-1} + K^2.$$

Преобразованные величины перемещений $U_{r,m}^{(0)}; U_{z,0}^{(0)}$ через постоянные интегрирования A_j, B_j представляются как

$$U_{r,0}^{(0)} = \alpha_0 A_0 I_1\left(\alpha_0 r\right) - k\beta_0 B_0 I_1\left(\beta_0 r\right);$$

$$U_{z,0}^{(0)} = kA_0 I_0\left(\alpha_0 r\right) - \beta_0^2 B_0 I_0\left(\beta_0 r\right);$$

$$U_{r,1}^{(0)} = -\alpha_1 A_1 K_1\left(\alpha_1 r\right) + k\beta_1 B_1 K_1\left(\beta_1 r\right);$$

$$U_{z,1}^{(0)} = kA_1 K_0\left(\alpha_1 r\right) - \beta_1^2 B_1 K_0\left(\beta_1 r\right).$$

Разложим $U_{r,0}^{(0)}$; $U_{z,0}^{(0)}$ в степенные ряды

$$U_{r,0}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_0 \alpha_0^{2n+2} - kB_0 \beta_0^{2n+2} \right) \frac{\left(r/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}; \quad (24)$$

$$U_{z,0}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(kA_0 \alpha_0^{2n} - B_0 \beta_0^{2n+2} \right) \frac{\left(r/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2}.$$

Введем главные части выражений (24)

$$U_0 = \alpha_0^2 A_0 - k\beta_0^2 B_0, \quad W_0 = kA_0 - \beta_0^2 B_{0,} \quad (25)$$

которые определяют смещения при $r = 0$, и тогда (24) через (25) запишутся как

$$U_{r,0}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\alpha_0^2 c_0 Q_n^{(0)} + \beta_0^2 \right) U_0 - k\alpha_0^2 c_0 Q_n^{(0)} W_0 \right] \frac{\left(r/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}; \quad (26)$$

$$U_{z,0}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[kc_0 Q_n^{(0)} U_0 - \left(k^2 c_0 Q_n^{(0)} - \beta_0^{2n} \right) W_0 \right] \frac{\left(r/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2}.$$

Для определения A_0, B_0, A_1, B_1 имеем граничные условия (5), которые принимают вид

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\beta_0^2+k^2\right)c_0Q_n^{(0)}+\left(1-c_0\right)\beta_0^{2n}-\frac{1}{n+1}\left(\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\beta_0^{2n}\right)\right]U_0-\right.\\ \left.-k\left[\left(\beta_0^2+k^2\right)c_0Q_n^{(0)}-\left(1+c_0\right)\beta_0^{2n}\frac{\alpha_0^2}{n+1}c_0Q_n^{(0)}\right]W_0\right\}\frac{\left(r_0/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2}=\\ =\frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}\left\{\left[\left(\beta_1^2+k^2\right)K_0\left(\alpha_1r_0\right)+\frac{2\alpha_1}{r_0}K_1\left(\alpha_1r_0\right)\right]A_1-\right.\\ \left.-2k\left[\beta_1^2K_0\left(\beta_1r_0\right)+\frac{\beta_1}{r_0}K_1\left(\beta_1r_0\right)\right]B_1\right\}+M_{0,0}^{-1}f_r^{(0)},\end{gathered}\qquad(27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{k\left[2\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\left(1+c_0\right)\beta_0^{2n}\right]U_0-\alpha_0^2\left[2k^2c_0Q_n^{(0)}-\left(1-c_0\right)\beta_0^{2n}\right]W_0\right\}\frac{\left(r_0/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}=0,$$

$$2\alpha_1kk_1\left(\alpha_1r_0\right)A_1-\beta_1\left(\beta_1^2+k^2\right)K_1\left(\beta_1r_0\right)B_1=M_{1,0}^{-1}f_{rz}^{(0)},$$

$$\alpha_1K_1\left(\alpha_1r_0\right)A_1-k\beta_1K_1\left(\beta_1r_0\right)B_1=-u_{r,0}^{(0)}.$$

Исключая из (27) A_1, B_1, для U_0, W_0 получим уравнения

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(\beta_0^2+k^2\right)c_0Q_n^{(0)}+\left(1-c_0\right)\beta_0^{2n}-\frac{1}{n+1}\left(\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\beta_0^{2n}\right)+\right.\right.\\ \left.+\frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}\left(\frac{2}{r_0}+R_0\right)\frac{r_0}{2\left(n+1\right)}\left(\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\beta_0^{2n}\right)\right]U_0-\\ -k\left[\left(\beta_0^2+k^2\right)c_0Q_n^{(0)}-\left(1+c_0\right)\beta_0^{2n}-\frac{\alpha_0^2}{n+1}c_0Q_n^{(0)}+\right.\\ \left.\left.+\frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}\left(\frac{2}{r_0}+R_0\right)\frac{r_0}{2\left(n+1\right)}\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\beta_0^{2n}\right]W_0\right\}\frac{\left(r_0/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2}=M_{1,0}^{-1}F_r^{(0)},\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{k\left[2\alpha_0^2c_0Q_n^{(0)}+\left(1+c_0\right)\beta_0^{2n}\right]U_0-\right.\\ \left.-\alpha_0^2\left[2k^2c_0Q_n^{(0)}-\left(1-c_0\right)\beta_0^{2n}\right]W_0\right\}\frac{\left(r_0/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}=0,\\ F_r^{(0)}=f_r^{(0)}-M_{1,0}\left[k\frac{\left(\beta_1^2+k^2+2\alpha_1\beta_1\right)}{\alpha_1\left(\beta_1^2-k^2\right)}+\frac{4k}{r_0\left(\beta_1^2-k^2\right)}\right]f_{rz}^{(0)}.\end{gathered}\qquad(28)$$

Из (28) для W_0 выводим

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\left(1-c_0\right)^2\alpha_0^2+\left(1+c_0\right)^2k^2\right]\beta_0^{2(n+m)}-\right.\\ -4k^2\alpha_0^2c_0Q_m^{(0)}\beta_0^{2n}+c_0\left(\beta_0^2+k^2\right)^2\beta_0^{2m}Q_n^{(0)}-\\ -\frac{1}{n+1}c_0\alpha_0^2\left(\beta_0^2+k^2\right)\beta_0^{2m}Q_n^{(0)}+\frac{\alpha_0^2\beta_0^{2n}}{n+1}\left[2k^2c_0Q_m^{(0)}-\right.\\ \left.-\left(1-c_0\right)\beta_0^{2m}\right]+\frac{1}{n+1}\frac{M_{1,0}}{M_{0,0}}\left(1+\frac{r_0}{2}R_0\right)\left[\left(1-c_0\right)\alpha_0^2\beta_0^{2(n+m)}+\right.\\ \left.\left.+c_0\alpha_0^2\left(\beta_0^2+k^2\right)Q_n^{(0)}\beta_0^{2m}-2k^2c_0\alpha_0^2Q_m^{(0)}\beta_0^{2n}\right]\right\}W_0\frac{\left(r_0/2\right)^{2(n+m)+1}}{\left(n!\right)^2m!\left(m+1\right)!}=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}M_{0,0}^{-1}\alpha_0^2\left[\left(1-c_0\right)\beta_0^{2n}-2k^2c_0Q_n^{(0)}\right]F_r^{(0)}\frac{\left(r_0/2\right)^{2n+1}}{n!\left(n+1\right)!}.\end{gathered}\qquad(29)$$

После обращения по k и p имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\left[(1-c_t)^2\lambda_1^{(1)}+(1+c_t)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{n+1}(1-c_t)\lambda_1^{(1)}\right]\lambda_2^{(n+m)}+\right.\right.$$
$$+2\frac{n+2}{n+1}c_t\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1^{(1)}Q_m\lambda_2^{(n)}+c_t\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Q_n\lambda_2^{(m)}\times$$
$$\times\left[\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{n+1}\lambda_1^{(1)}\right]+\frac{1}{n+1}M_1M_0^{-1}\left(1+\frac{r_0}{2}R\right)\times$$
$$\times\left[(1-c_t)\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(n+m)}+c_t\lambda_1^{(1)}\left(\lambda_2^{(1)}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Q_n\lambda_2^{(m)}+\right.$$
$$\left.\left.+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}c_t\lambda_1^{(1)}Q_m\lambda_2^{(n)}\right]\right]\right\}W\frac{(r_0/2)^{2(n+m)+1}}{(n!)^2m!(m+1)!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}M_0^{-1}\lambda_1^{(1)}\left[(1-c_t)\lambda_2^{(n)}+2c_t\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q_n\right]F_r\frac{(r_0/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}. \qquad (30)$$

Оператор R, входящий в (35), является обращением выражения

$$R_0=\frac{\left(\beta_1^2+k^2\right)-4k^2\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\left(\beta_1^2-k^2\right)}.$$

В общем случае вид оператора R сложен. Однако для волновых процессов приближенно

$$R(\tau)=\sqrt{p_1}M_1^{-1}N_1^{1/2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right), \qquad (31)$$

а операторы

$$c_t=\left(1-N_0M_0^{-1}\right),\quad Q_n=\sum_{t=0}^{n-1}\lambda_1^{(n-t-1)}\lambda_2^{(0)};$$
$$\lambda_1^{(n)}=\left[\rho_0N_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n,\quad \lambda_2^{(n)}=\left[\rho_2M_0^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n.$$

Ограничиваясь в (30) производными от W не выше второго порядка, для W в случае упругого стержня и упругой окружающей среды получаем приближенное уравнение

$$\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2W}{\partial z^2}=D_0M_0^{-1}\lambda_1^{(1)}\left(1-c_t\right)F_r, \qquad (32)$$

$$D_0=\left[\frac{3a_0^2-4b_0^2}{b_0^2}\left(1+\frac{M_1}{M_0}\frac{a_0^2}{3a_0^2-4b_0^2}\right)\right]^{-1},$$

которое по виду напоминает классическое уравнение продольного колебания круглого упругого стержня. Однако в (31) скорость распространения c_1 волн сжатия в таком стержне иная:

$$c_1^2=c_0^2\left[\frac{1+k_0\left(\dfrac{a_0^2}{3a_0^2-4b_0^2}\right)}{1+k_0\left(\dfrac{b_0^2}{3a_0^2-4b_0^2}\right)}\right],\quad k_0=\frac{M_1}{M_0}. \qquad (33)$$

Здесь c_0 - скорость волн сжатия в стержне при отсутствии окружающей среды, т.е. $c_0=b_0\sqrt{\left(3a_0^2-4b_0^2\right)/\left(a_0^2-b_0^2\right)}$. Как видно из (33), скорость c_1 зависит от параметров самого стержня и окружающей среды. При отсутствии окружающей среды $c_1 = c_0$, а для абсолютно жесткой окружающей среды c_1 совпадает со скоростью продольной волны в соответствующей упругой среде, что и должно быть исходя из физических соображений.

Если в уравнении (30) ограничиться производными порядка не выше четвертого, то для W имеем приближенное уравнение

$$\left(\frac{1}{c_1^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)+\frac{r_0}{2}\frac{M_1}{M_0}\frac{a_1 a_0^2 D_0}{b_1^2\left(3a_0^2-4b_0^2\right)}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)+\frac{r_0^2}{8}D_0\left(\frac{a_0^4+a_0^2b_0^2-b_0^4}{a_0^2b_0^6}\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{6a_0^4-3a_0^2b_0^2-4b_0^4}{a_0^2b_0^4}\frac{\partial^4 W}{\partial t^2\partial z^2}+2\frac{3a_0^2-4b_0^2}{b_0^2}\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}\right)= \tag{34}$$
$$=D_0M_0^{-1}\left(1-c_t\right)\lambda_1^{(1)}F_r.$$

Влияние окружающей среды сказывается не только на величине скорости волны сжатия, но и на появлении нечетных производных от W, т.е. окружающая среда ведет себя как амортизатор, что приводит к затуханию напряжений в стержне.

Величины перемещений в стержне

$$U_r^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\lambda_1^{(1)}c_tQ_n+\lambda_2^{(n)}\right)U-c_tQ_n\lambda_1^{(1)}\frac{\partial W}{\partial z}\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$
$$U_z^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-c_tQ_n\frac{\partial U}{\partial z}+\left(\lambda_2^{(n)}+c_tQ_n\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)W\right]\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}. \tag{35}$$

Аналогично выписываются формулы для напряжений в точках стержня через главные части U, W. Как видно, выражения (35) не зависят от условий контакта при $r = r_0$, а уравнения для определения U, W существенно зависят от граничных условий.

Как видно из формулы (20), для упругого стержня окружающая среда влияет на колебание стержня не как винклеровская, а как среда с вязкой моделью. Влияние окружающей среды сказывается не только на величине скорости волны сжатия, но и на появлении нечетных производных от W, т.е. окружающая среда ведет себя как амортизатор, что приводит к затуханию напряжений в стержне.

Выводы

Получены точные и на основании точных, приближенные уравнения крутильных и продольных колебаний стержня. На основании полученных уравнений можно провести расчет на прочность элемента конструкции с учетом вязкого свойства материала численным методом на персональном компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин Л. В. Продольные колебания упругих стержней при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. Сер. МТТ, 1978. № 6. С. 137 – 145.

2. Сахарова А. С. Продольные волны в вязкоупругом стержне с сухим трением на границе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. -1984. -№ 5. С. 53-57.

3. Филиппов А. Н. Рапространение волн в упругом стержне, окруженном средой типа Винклера // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика, -1983. -№ 1. С. 74-78.

4. Моделирование взаимодействия балки (пластин, плит, полос) переменной толщины, лежащей на неоднородном основании. Общие уравнения. ВестникКазНУ им. Аль-Фараби, №1 (60), Алматы: 2009. – С. 48 — 53.

5. Моделирование взаимодействия балки (пластин, плит, полос) переменной толщины, лежащей на неоднородном основании. Приближенное уравнение. ВестникКазНУ им. Аль-Фараби, №2 (61), Алматы: 2009. – С. 51 — 55.