

УДК 667.01

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

**DETERMINATION OF DISPLACEMENTS
DURING THE DEFORMATION OF TEXTILE MATERIALS**

В.З. КРУЧЕНЕЦКИЙ, Р.О. ЖИЛИСБАЕВА, А.А. КАЛАБИНА, А.М. МУХАНОВА, У.У. СМАЙЛОВА
V.Z. KRUCHENITSKII, R.O. ZHILISBAEVA, A.A. KALABINA, A.M. MUKHANOVA, U.U. SMAILOVA

(Алматинский технологический университет)

(Almaty Technological University)

E-mail: anesti-an@mail.ru

В работе рассматривается определение начальных и текущих координат при деформации текстильных материалов, их имитационные математические модели. Последние найдены в сопоставлении с концепциями Лагранжа, Эйлера. Результаты их экспериментальной проверки получены с использованием цифровых технологий.

This work deals with the determination of the initial and current position during deformation of the textile materials, their simulation mathematical model. The latter was found in comparison with the concepts of Lagrange, Euler. The results of experimental verification obtained by using digital technologies.

Ключевые слова: деформации, изделия, кручение, нагрузка, размеры, растяжение, сдвиг, одежда, тензоры ткани, форма.

Keywords: deformation, products, torsion, load, dimensions, tension, shear, clothing, fabric tensors, form.

Если материальная точка движется относительно системы координат, то ее координаты меняются в зависимости от времени. При этом движущаяся точка в разные моменты времени отождествляется с разными точками пространства. Поскольку деформируемый материал представляет собой непрерывную совокупность точек, то, чтобы знать его движение, необходимо знать движение всех его точек. В частности, движение сплошной среды относительно декартовой системы координат будет известно, если известны три функции (1), выражающие в каждый момент времени t текущие координаты x, y, z , находящиеся в движении той точки континуума M , занимавшей в начальный момент времени $t = t_0$ положение $M_0 (X, Y, Z)$:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(X, Y, Z, t); \\ y &= y(X, Y, Z, t); \\ z &= z(X, Y, Z, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если начальные координаты точки X, Y, Z являются фиксированными, а t – переменное, то формулы (1) дают закон движения одной выбранной точки среды. Если же X, Y, Z – переменные, а время t – фиксированное, то это соотношение дает распределение точек континуума в пространстве в данный момент времени. Использование в качестве независимых переменных начальных координат точек X, Y, Z в момент t составляет точку зрения Лагранжа на изучение движения сплошной среды [1]. В механике деформированного тела обычно предполагают, что функции, входящие в закон движения континуума (1), являющиеся искомыми, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Физически это означает, что в каждый фиксированный момент времени функции (1) являются взаимно однозначными, так как в противном случае две материальные точки могли бы оказаться в одной и той же точке пространства одновременно. Следовательно, существует единственное решение системы уравнений (1), определяющее X, Y, Z , как функции координат x, y, z и t (2а), где J – функциональный определитель (2б). Можно показать, что функцио-

нальный определитель этого преобразования всегда положителен и не может быть равен нулю, то есть

$$\left. \begin{aligned} X &= X(x, y, z, t); \\ Y &= Y(x, y, z, t); \\ Z &= Z(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial X & \partial x / \partial Y & \partial x / \partial Z \\ \partial y / \partial X & \partial y / \partial Y & \partial y / \partial Z \\ \partial z / \partial X & \partial z / \partial Y & \partial z / \partial Z \end{vmatrix} > 0. \quad (2б)$$

Возможен и другой подход, очевидно, не менее удобный, когда за текущие координаты принимаются независимые переменные x, y, z и время t , что составляет сущность точки зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды. В этом случае выделяется некоторая область или точка пространства и анализируется движение различных частиц сплошной среды, проходящих в рассматриваемую область. Геометрические координаты x, y, z и время t носят название переменных Эйлера [1]. Вектор, начало которого совпадает с началом положения некоторой точки M при $t = t_0$, а конец – с положением этой же точки в некоторый фиксированный момент времени t , является вектором полного перемещения точки M . Составляющие его по координатным осям x, y, z служат компонентами перемещения соответственно u, v, W (рис. 1 – вектор полного перемещения MM_0 точки M_0 и его компоненты u, v, W вдоль координатных осей x, y, z).

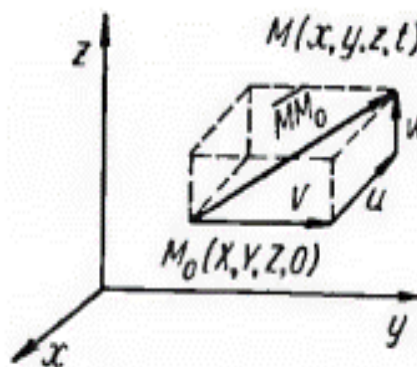


Рис. 1

Если в качестве независимых переменных принимаются переменные Лагранжа X, Y, Z и t , то имеем: (3а), для Эйлера – (3б):

$$\left. \begin{aligned} u(X, Y, Z, t) &= x(X, Y, Z, t) - X; \\ v(X, Y, Z, t) &= y(X, Y, Z, t) - Y; \\ \omega(X, Y, Z, t) &= z(X, Y, Z, t) - Z. \end{aligned} \right\} (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= x - (X, Y, Z, t); \\ v(x, y, z, t) &= y - (X, Y, Z, t); \\ \omega(x, y, z, t) &= z - (X, Y, Z, t). \end{aligned} \right\} (3б)$$

Различие между двумя способами, выраженными в формулах (3), наглядно следует из рис. 2. На нем изображен случай изгиба материала в недеформированном и деформированном состояниях, соответственно: по Лагранжу (а), по Эйлеру (б).

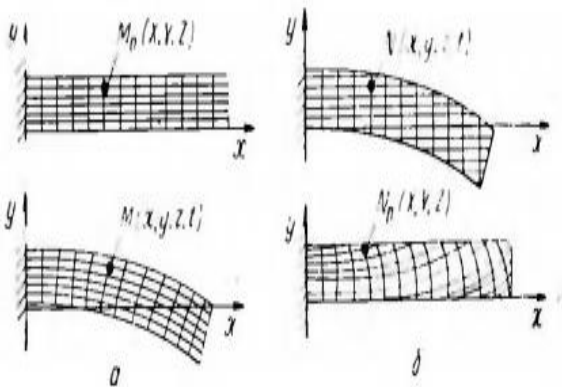


Рис. 2

Рассмотрим зависимости между начальными и текущими координатами при деформации материала.

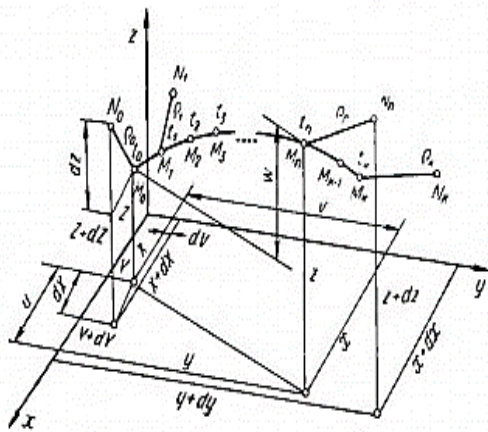


Рис. 3

Пусть малый линейный элемент материала $M_0N_0 = p_0$ соединяет точки $M_0(X, Y, Z)$ и $N_0(X+dX, Y+dY, Z+dZ)$, где dX, dY, dZ – проекции отрезка M_0N_0 на соответствующие координатные оси (рис. 3 – схема деформации малого линейного элемента текстильного материала). В результате деформирования этот элемент в момент времени t займет положение $M_nN_n = p_n$, соединяя точки $M_n(x, y, z)$ и $N_n(x+dx, y+dy, z+dz)$, где dx, dy, dz – проекции отрезка M_nN_n на координатные оси. Если движение сплошной среды описывать с помощью переменных Лагранжа, то из уравнений (3) для фиксированного момента t имеем (4а), в котором dx_i равно (4-б):

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial Y} dY + \frac{\partial x}{\partial Z} dZ; \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY + \frac{\partial y}{\partial Z} dZ; \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial X} dX + \frac{\partial z}{\partial Y} dY + \frac{\partial z}{\partial Z} dZ. \end{aligned} \right\} (4a)$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4б)$$

Воспользовавшись правилом суммирования по повторяющемуся индексу, выражение (4) можно представить более компактно, где x_i (x_1, x_2, x_3) обозначены x, y, z , а величины X_j последовательно принимают значения X, Y, Z . Аналогичные соотношения можно вывести и для переменных Эйлера, найдя из уравнения (3)...(5а) или в развернутом виде (5б), (6):

$$dX_j = (\partial X_i / \partial X_j) dx_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz; \\ dY &= \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial z} dz; \\ dZ &= \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} (5б)$$

$$\left. \begin{aligned} dX &= \frac{dx}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} + \frac{dy}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial z}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial Y} \end{vmatrix} + \frac{dz}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \end{vmatrix}; \\ dY &= \frac{dx}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial z}{\partial Z} & \frac{\partial z}{\partial X} \end{vmatrix} + \frac{dy}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} + \frac{dz}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial Z} & \frac{\partial x}{\partial X} \\ \frac{\partial y}{\partial Z} & \frac{\partial y}{\partial X} \end{vmatrix}; \\ dZ &= \frac{dx}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} \end{vmatrix} + \frac{dy}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial X} \\ \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial X} \end{vmatrix} + \frac{dz}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix}. \quad (6b)$$

Равенство (6) можно рассматривать как систему трех линейных уравнений относительно тех неизвестных dX, dY, dZ , решение которых имеет вид (4а), где D – функциональный определитель (6б). Выражения (4) и (6) должны быть тождественными, поэтому, приравнявая соответствующие коэффициенты при dx, dy, dz , после подобных преобразований получаем аналогичное (6б) выражение, в котором функциональный определитель D равен (7а). То есть имеем: бесконечно малый параллелепипед объемом V_0 с ребрами dX, dY, dZ превращается в косоугольный с ребрами dx, dy, dz . Воспользовавшись известной формулой из аналитической геометрии, находим объем после деформации (7б):

$$D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (7a)$$

$$V = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| dX dY dZ = DV_0. \quad (7b)$$

Так как относительное изменение объема Θ является упругим, оно представляет собой малую величину и поэтому (7) можно переписать как (8а). Следовательно, величины D и D незначительно отличаются от единицы и в силу этого упругими деформациями можно пренебречь и, рассматривая формообразование в окрестности произвольной точки материала, из рис. 3 легко заключить, что длина отрезка M_0N_0 определяется формулой, которая может быть интерпретирована, как уравнение сферы с центром в точке $M_0(X, Y, Z)$ (8б):

$$D = 1/D = 1/(1 + \Theta) = 1 - \Theta, \quad (8a)$$

$$P_0^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (8b)$$

Подставив в (8б) вместо dX, dY, dZ их выражения из (6), получим:

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} dx_i \right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial z} dz \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{\partial z} dz \right)^2, \end{aligned} \quad (9)$$

или после несложных преобразований имеем:

$$\rho_0^2 = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_R} dx_i dx_R = a_{x_i x_R} dx_i dx_R = dx^2 + a_{yy} dy^2 + a_{zz} dz^2 + 2a_{xy} dx dy + 2a_{yz} dy dz + 2a_{zx} dz dx = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (10)$$

В этом выражении (10) величины a_{ixk} представляют собой компоненты тензора 2-го ранга (тензора деформации Коши), или результирующего формоизменения [2]. Под-

ставим в (10) для выражений dx, dy, dz из (7), получим уравнение эллипсоида относительно Лагранжевых координат:

$$\rho_0^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right)^2 = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_i dX_j = b_{x_i x_j} dX_i dX_j. \quad (11)$$

Из (10), (11) следует, что в недеформированном состоянии имеется совокупность различных эллипсоидов, в процессе деформирования которые в различные моменты времени превращаются в сферы радиусом r_n и центром в точке M_n (рис. 4 – деформация сферы малого радиуса в точке M_0). Поделив обе части равенства (10) на r_n^2 , не трудно найти экстремальные значения функции (P_0 / P_n) и тем самым определить главные деформации. Обобщенные данные аналитических выражений, физический смысл и геометрическую интерпретацию компонентов тензоров деформаций сведем в табл. 1.

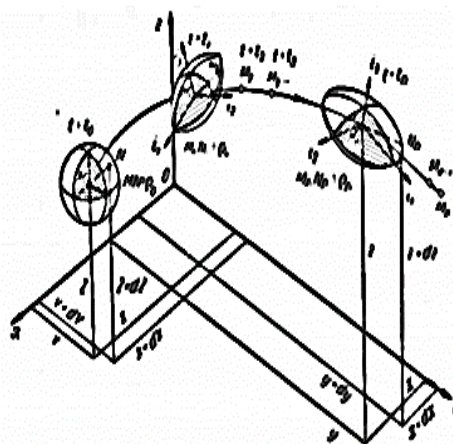


Рис. 4

Таблица 1

Назначение тензоров и обозначения	Тензорная запись	Развернутая запись	Физический смысл и геометрическая интерпретация
Тензор результирующего формоизменения в представлении Эйлера (тензор Коши) $a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{vmatrix}$	a_{il} $\frac{\partial X_m}{\partial X_i} \frac{\partial X_m}{\partial X_j}$ a_{ij}	1) $a_{xx} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2$ 2) $a_{xy} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y}$	$a_{xx} = e^{-2\epsilon_x}$ линейная деформация материального волокна после деформации параллельного оси x $\sin \tilde{\varphi}_{xy} = \frac{a_{xy}}{\sqrt{a_{xx} a_{yy}}}$ сдвиг искажения, наставшего после деформации прямым
Тензор результирующего формоизменения в представлении Лагранжа (тензор Коши) $b_{ij} = \begin{vmatrix} b_{xx} & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & b_{zz} \end{vmatrix}$	b_{il} $\frac{\partial x_m}{\partial X_i} \frac{\partial x_m}{\partial X_j}$ b_{ij}	3) $b_{xx} = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)^2$ 4) $b_{xy} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial z}{\partial Y}$	$b_{xx} = e^{-2\epsilon_x}$ линейная деформация материального волокна, расположенного параллельно оси X до деформации $\sin \tilde{\varphi}_{xy} = \frac{b_{xy}}{\sqrt{b_{xx} b_{yy}}}$ сдвиг, искажение прямого до деформации угла на величину $\tilde{\varphi}_{xy}$

<p>Тензор деформации в представлении Эйлера (тензор Альманси)</p> $e_{ij} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - a_{ij})$	$e_{ii} = \frac{1}{2}(1 - a_{ii})$ $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_j}{\partial x_{ii}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu_m}{\partial x_j}\right)$ $e_{ij} = -\frac{1}{2}a_{ij}$	<p>5) $e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$</p> <p>6) $e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$</p>	<p>$e_{xx} = \tilde{\epsilon}_x(1 - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}_x)$ – характеризует линейную деформацию вдоль оси x</p> <p>$\sin \tilde{\varphi}_{xy} = \frac{e_{xy}}{(1-\tilde{\epsilon}_x)(1-\tilde{\epsilon}_y)}$ сдвиг, искажение на $\tilde{\varphi}_{xy}$ угла, преобразованного деформацией</p>
---	---	---	---

Приведенные в табл. 1 соотношения (модели) проверялись подобно изложенному в [4] экспериментально и показали хорошую сходимость результатов.

ВЫВОДЫ

1. Определены координаты перемещений при деформации текстильных материалов, рассмотрены их имитационные математические модели.

2. Исследованы деформации одежды на примере пальто из ткани. Установлено, что в диагональных направлениях (под углом 22,5; 67,5 и особенно 45° к нитям основы) растяжение ткани значительно больше, чем по основе или утку, и составляет в основном 10...15% от разрывного. На отдельных участках одежды растяжение достигает 20...22%, что соответствует 35...40%. По основе ткань растягивается на 3...5%, а по утку – на 6...9%, причем наибольшее удлинение по утку составляет около 50%, а по основе – не более 20% от разрывного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красновеков П.С., Плиров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Изд-во МГУ, 1983.
2. Курнышев Б.С., Данилов С.П. Тензорная методология в теории электротехнических систем. – Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т., 2002.
3. Мальцев М.Д., Каракулина Г.А. Прикладная оптика и оптические измерения. – М.: Машиностроение, 1969.
4. Жилисбаева Р.О., Крученецкий В.З., Вязигин С.В., Отыншиев М.Б. К обоснованию объема выборки измерений тонины волокон шерсти с помощью электронного микроскопа // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2016, № 5. С.68...72.

REFERENCES

1. Krasnovikov P.S., Plirov A.A. Principy postroenija modelej. – M.: Izd-vo MGU, 1983.
2. Kurnyshev B.S., Danilov S.P. Tenzornaja metodologija v teorii jelektrotehničkih sistem. – Ivanovo: Ivan. gos. jenerg. un-t., 2002.
3. Mal'cev M.D., Karakulina G.A. Prikladnaja optika i optičeskie izmerenija. – M.: Mashinostroenie, 1969.
4. Zhilisbaeva R.O., Krucheneckij V.Z., Vjazigin S.V., Otynshev M.B. K obosnovaniju ob"ema vyborki izmerenij toniny volokon shersti s pomoshh'ju jelektroonnogo mikroskopa // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2016, № 5. S.68...72.

Рекомендована Ученым советом. Поступила 02.10.18.