ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ
ВОПРОСЫ ГОРНЫХ НАУК Том 4, № 3, 2017

УДК 539.3 : 534.1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

К.К. Коксалов[1], А.А. Баймухаметов[2]

[1]*Казахский национальный педагогический университет,*
E-mail: kkapal@mail.ru, *ул. Толеби, 86, 050012, г. Алматы, Казахстан*
[2]*Институт механики и машиноведения МОН РК,*
E-mail: abayab@mail.ru, *ул. Курмангазы, 29, 050010, г. Алматы, Казахстан*

Рассмотрена задача об устойчивости деформирования слоистой пластины при двустороннем боковом сжатии. Уравнения устойчивости и граничные условия выведены при помощи вариационного принципа теории упругой устойчивости. Пластина находится в условиях плоской деформации. Исследуются уравнения шестого порядка в частных производных относительно функции перемещений. Получены формулы для определения горизонтальных и вертикальных перемещений пластины.

Деформация, упругая устойчивость, пластина, сжатие

SOLUTION OF PROBLEM ON STABILITY OF MULTILAYERED PLATES BY VARIATIONAL METHOD

K.K. Koksalov[1], A.A. Baimukhametov[2]

[1]*Kazakh National Pedagogical University,*
E-mail: kkapal@mail.ru, *86 Tolebi Str., Almaty 050012, Kazakhstan*
[2]*Institute of Mechanics and Machine Engineering, RK Ministry of Education and Science,*
E-mail: abayab@mail.ru, *29 Kurmangazy Str., Almaty 050010, Kazakhstan*

Under consideration is deformation resistance of a laminated plate under bilateral compression. The stability equations and the boundary conditions are derived using the variational principle of the theory of elastic stability. The plate is in the plane strain condition. The scope of the analysis encompasses sixth-order equations in partial derivatives relative to displacement functions. The formulas to determine the horizontal and vertical displacements of a plate are obtained.

Deformation, elastic stability, plate, compression

Рассмотрим устойчивость слоистой пластины длины a и толщины H при двустороннем сжатии.

В условиях плоской деформации для вывода уравнений упругой устойчивости воспользуемся вариационным принципом, согласно которому вторая вариация полной энергии системы $\delta^2{}_*Э$ принимает для состояния «нейтрального» равновесия стационарное значение [1]:

$$\delta(\delta^2{}_*Э) = 0. \tag{1}$$

Выражение для второй вариации полной энергии слоистой пластины имеет вид [2]:

$$\delta^2{}_*Э = \mu^2 \int_0^{\frac{a}{h}} \int_0^{H/h} \left\{ B\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{D}{h^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + \frac{h^2}{h_2}\left[G_2\left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial w}{\partial z_1}\right)^2 \right] + N_x^0\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 \right\} dx_1 dz_1, \tag{2}$$

где $N_x^0 = -P = -ph_1$ – критическое усилие; $B = \dfrac{E_1 h_1}{1-\nu_1^2}$ – жесткость при сжатии; $D = \dfrac{h_1^3 E_1}{12\left(1-\nu_1^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость; E_1– модуль упругости; ν_1– коэффициент Пуассона; h_1 – толщина жесткого слоя; $E_2 = \dfrac{2G_2(1-\nu_2)}{1-2\nu_2}$ – трансверсальный модуль; G_2– модуль сдвига; ν_2– коэффициент Пуассона; h_2 – толщина мягкого слоя; $x_1 = \dfrac{x}{h}$, $z_1 = \dfrac{z}{h}$; $h = h_1 + h_2$, u, w – горизонтальные и вертикальные перемещения.

Подставляя (2) в равенство (1), получим вариационное уравнение:

$$\left\{\int_0^{H/h}\left\{B\frac{\partial u}{\partial x_1}\delta u + \frac{D}{4h_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) - \left[\frac{D}{4h_1^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} - \frac{2h_1^2 G_2}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + p\frac{\partial w}{\partial x_1}\right]\delta w\right\} dz_1\right\}_{x_1=0}^{x_1=\frac{a}{h}} + \left\{\int_0^{\frac{a}{h}}\left[\frac{2h_1^2 G_2}{h}\left(\frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\delta u + \frac{2E_2 h_1^2}{h}\frac{\partial w}{\partial x_1}\delta w\right] dx_1\right\}_{z_1=0}^{z_1=\frac{H}{h}} - \tag{3}$$

$$-\int_0^{\frac{a}{h}}\int_0^{H/h} B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{2h_1^2 G_2}{h}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial z_1}\right)\delta u dx_1 dz_1 + \int_0^{\frac{a}{h}}\int_0^{H/h}\left[\frac{D}{4h_1^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2h_1 G_2}{h}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) - \frac{2E_2 h_1^2}{h}\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + p\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right]\delta w dx_1 dz_1 = 0,$$

которое в силу произвольности вариаций $\delta u, \delta w, \delta(\partial w/\partial x_1)$ позволяет получить уравнения равновесия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + K_4^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial z_1}\right)0,$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - K_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial z_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) - K_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + K_3^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \tag{4}$$

где

$$K_1^2 = \frac{12G_2(1-\nu_1^2)}{E_1\rho^3(1-\rho)},\ K_2^2 = \frac{12E_2(1-\nu_1^2)}{E_1\rho^3(1-\rho)},$$

$$K_3^2 = \frac{12(1-\nu_1^2)P}{E_1\rho^2} = K^2 P,\ K_4^2 = \frac{G_2(1-\nu_1^2)}{E_1\rho(1-\rho)},\ \rho = \frac{h_1}{h}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ x_1 = \frac{a}{h},$$

$$w = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \text{ при } z_1 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \text{ при } z_1 = \frac{H}{h}.$$

Для определения критического усилия исследуем нетривиальные решения системы уравнений (4) при граничных условиях (5). Введем функцию перемещений $\Phi(x_1, z_1)$ по формулам:

$$u(x_1,z_1)=-K_4^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial z_1},\; w(x_1,z_1)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+K_4^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2}. \tag{6}$$

При этом первое уравнение системы (4) обращается в тождество, а второе уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^6\Phi}{\partial x_1^6}+K_4^2\frac{\partial^6\Phi}{\partial x_1^4\partial z_1^2}+\left(K_3^2-K_1^2\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4}+\left(K_4^2K_3^2-K_2^2\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial z_1^2}-K_4^2K_2^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial z_1^4}=0. \tag{7}$$

Граничные условия будут:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+K_4^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2}=0,\; \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^4}+K_4^2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_1^2\partial z_1^2}=0,$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_1^2\partial z_1}=0 \quad \text{при}\;\; x_1=0,\; x_1=\frac{a}{h}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+K_4^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1^2}=0,\; \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_1^3}=0 \quad \text{при}\;\; z_1=0,$$

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_1^2\partial z_1}+K_4^2\frac{\partial^3\Phi}{\partial z_1^3}=0,\; \frac{\partial^3\Phi}{\partial x_1^3}=0 \;\text{ при }\;\; z_1=\frac{H}{h}=r. \tag{9}$$

Граничные условия (8) будут удовлетворены и переменные разделяются, если решение уравнения (7) будем искать в виде:

$$\Phi(x_1,z_1)=\Psi(z_1)\sin mx_1, \tag{10}$$

где $m=\frac{\pi n h}{a}$ – безразмерное волновое число.

Подставляя (10) в уравнение (7), получим:

$$\Psi^{IV}(z_1)-\frac{m^2}{K_2^2}\left(m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-K_3^2\right)\Psi''(z_1)+\frac{m^4}{K_2^2K_4^2}\left(m^2+K_1^2-K_3^2\right)\Psi(z_1)=0. \tag{11}$$

Граничные условия (9) имеют вид:

$$-m^2\Psi(0)+K_4^2\Psi''(0)=0,\; \Psi(0)=0,$$

$$-m^2\Psi'(r)+K_4^2\Psi''(r)=0,\; \Psi(r)=0. \tag{12}$$

Решение уравнения (11) ищем в виде:

$$\Psi(z_1)=C\exp(\lambda z_1). \tag{13}$$

Подставляя (13) в уравнение (11), получим характерическое уравнение вида:

$$\lambda^4-\frac{m^2}{K_2^2}\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}+m^2-K_3^2\right)\lambda^2+\frac{m^4}{K_2^2K_4^2}\left(m^2+K_1^2-K_3^2\right)=0. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет четыре корня:

$$\lambda_{1,2}=\pm\tau_1,\lambda_{3,4}=\pm\tau_2.$$

где

$$\tau_{1,2}=\frac{m}{\sqrt{2}K_2}\sqrt{\left(m^2+\frac{K_2^2}{K_4^2}-K_3^2\right)\pm\sqrt{\left(\frac{K_2^2}{K_4^2}+K_3^2-m^2\right)^2-\frac{4K_1^2K_2^2}{K_4^2}}}.$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид:

$$\Psi(z_1)=C_1 ch\tau_1 z_1+C_2 sh\tau_1 z_1+C_3 ch\tau_2 z_1+C_4 sh\tau_2 z_1, \qquad (15)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Подставляя общее решение (15) в граничные условия (12), получим $C_1=C_3=0$, а относительно C_2, C_4 имеем систему уравнений:

$$C_2\tau_1\left(m^2-K_4^2\tau_1^2\right)ch\tau_1 r+C_4\tau_2\left(m^2-K_4^2\tau_2\right)ch\tau_2 r=0,$$
$$C_2 sh\tau_1 r+C_4 sh\tau_2 r=0. \qquad (16)$$

Из условия существования ненулевого решения системы (16) получим уравнение:

$$\tau_2\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)sh\tau_1 rch\tau_2 r-\tau_1\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)sh\tau_2 rch\tau_1 r=0$$

или

$$\frac{th\tau_1 r}{\tau_1\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)}-\frac{th\tau_2 r}{\tau_2\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)}=0. \qquad (17)$$

Функция перемещений $\Phi(x_1,z_1)$ определенная с точностью до одного произвольного параметра ℓ имеет вид:

$$\Phi(x_1,z_1)=\ell\left(sh\tau_1 rsh\tau_2 z_1-sh\tau_2 rsh\tau_1 z_1\right)\sin mx_1. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (6) определим выражения для перемещений

$$u(x_1,z_1)=\ell mK_4^2\left(\tau_1 sh\tau_2 rch\tau_1 z_1-\tau_2 sh\tau_1 rch\tau_2 z_1\right)\cos mx_1,$$
$$u(x_1,z_1)=\ell\left[\left(m^2-\tau_1^2K_4^2\right)sh\tau_2 rsh\tau_1 z_1-\left(m^2-\tau_2^2K_4^2\right)sh\tau_1 rsh\tau_2 z_1\right]\sin mx_1. \qquad (19)$$

Таким образом, изучена задача об устойчивости деформирования слоистой пластины при двустороннем боковом сжатии в условиях плоской деформации на основе вариационного принципа теории упругой устойчивости.

ВЫВОДЫ

Выведены уравнения устойчивости и граничные условия при помощи вариационного принципа теории упругости.

Исследовано уравнение шестого порядка в частных производных относительно функции перемещений.

Найдено решение уравнения устойчивости пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Bolotin V.V.** Variational principles of the theory of elastic stability, Problems of Deformed Solid Mechanics. Leningrad: Sudostroenie, 1970. (in Russian) [**Болотин В.В.** О вариационных принципах теории упругой устойчивости / В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л.: Судостроение, 1970.]
2. **Koksalov K.K.** Stability of an Ellipsoidal Lithospheric Cover. Almaty: RIO VAK RK, 1999. (in Russian) [**Коксалов К.К.** Устойчивость эллипсоидальной литосферной оболочки. – Алматы.: РИО ВАК РК, 1999.]