

**ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ**

**Қ.И. Сәтпаев атындағы
Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті**

Тойбаев С.Н.

**ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА
НЕГІЗДЕРІ**

Оқулық

Алматы, 2016

ӘОЖ 531(075.8)

КБЖ 22.21я73

Т 50

Тойбаев С.Н.

Т50 Теориялық механика негіздері. Оқулық. – Алматы:

ҚазҰТЗУ, 2015.–360 б.

ISBN 978-601-7320-10-2

Оқулықта теориялық механика пәнінің негіздері, практикалық есептер шығару мысалдары, есептеу-графикалық жұмыс тапсырмалары, глоссарий және тест сұрақтары берілген. Оқу материалдарының құрылымы кредиттік технологияны қолданылатындай етіп ұйымдастырылған. Бұл білімді бақылаудың төрт деңгейінде жүргізуге мүмкіндік береді: дәріс деңгейінде – ағымдағы бақылау, блок деңгейінде – аралық бақылау, модуль деңгейінде – белестік бақылау, оқулық деңгейінде – қорытынды бақылау. Білімді бақылау осы деңгейлерге сәйкес құрастырылған тестілер арқылы жүзеге асырылады.

Оқулық «Технологиялық машиналар мен жабдықтар», «Ғарыштық техника және технология» мамандықтарының жалпы білім беру мемлекеттік стандартына сәйкес ұйымдастырылған. Сонымен қатар, ол жоғарғы техникалық оқу орындарының қазақ бөлімдерінде оқитын студенттерге, магистранттарға, докторанттарға, оқытушыларға арналған.

ӘОЖ 531(075.8)

КБЖ 22.21я73

Пікір жазғандар:

Айдосов А.А., т.ғ.д., профессор;

Темірбеков Е.С., т.ғ.д., профессор;

Шалқаров Ә.Ә., т.ғ.д., профессор.

ISBN 978-601-7320-10-2

© Тойбаев С.Н., 2016

© Нур-Принт, 2016

Мазмұны

Кіріспе	8
1 Статика	9
1.1. Статиканың негізгі ұғымдары мен аксиомалары	9
1.1.1 Статиканың негізгі ұғымдары	9
1.1.2 Статиканың аксиомалары	10
1.1.3 Байланыстар. Байланыстар реакциялары. Байланыстар аксиомасы	12
1.2 Жинақталатын күштер жүйесі	14
1.2.1 Күштерді қосудың геометриялық әдісі. Жинақталатын күштер жүйесінің геометриялық тепе-теңдік шарты	14
1.2.2 Үш күш туралы теорема	17
1.2.3 Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін аналитикалық әдіспен табу. Жинақталатын күштер жүйесінің аналитикалық тепе-теңдік шарты	19
1.3 Күш моменттері	22
1.3.1 Күштің нүктеге қатысты моменті және оның қасиеті	22
1.3.2. Күштің өске қатысты моменті	24
1.4 Қос күш теориясы	25
1.4.1 Қос күш. Қос күш моменті	25
1.4.2 Қос күштерді қосу туралы теоремалар	26
1.4.3 Қос күштер жүйесінің тепе-теңдігінің шарттары	29
1.5. Күштердің кез келген кеңістік жүйесі	30
1.5.1. Статикадағы негізгі лемма. Күштердің кез келген кеңістік жүйесін бір центрге келтіру	30
1.5.2 Күштер жүйелерін бір центрге келтірудің дербес жағдайлары	33
1.5.3 Күштердің әртүрлі жүйелерінің тепе - теңдік шарттары. Тең әсерлі күштің моменті туралы теорема	34
1.6 Үйкеліс	47
1.6.1 Сырғанау үйкелісінің заңдары	47
1.6.2 Үйкеліс бұрышы. Үйкеліс конусы	48
1.6.3 Домалау үйкелісі	49
1.7 Параллель күштер центрі және ауырлық центрі	51
1.7.1 Параллель күштер центрі	51

1.7.2 Қатты дененің ауырлық центрі	52
1.8 «Статика» бөлімі бойынша есептер	54
2 Кинематика. Кинематикаға кіріспе	60
2.1 Нүкте кинематикасы	60
2.1.1 Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері	60
2.1.2 Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүкте жылдамдығын анықтау	61
2.1.3 Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүктенің үдеуі	62
2.1.4 Қозғалысы координаттық тәсілде берілген нүкте жылдамдығын анықтау	63
2.1.5 Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің үдеуін анықтау	64
2.1.6 Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығын анықтау	65
2.1.7 Табиғи үш жақ. Табиғи өстер. Үдеу векторының жанама және нормаль құраушылары	66
2.1.8 Нүкте қозғалысының кейбір жеке түрлері	71
2.2 Қатты дененің қарапайым қозғалыстары	77
2.2.1 Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы	77
2.2.2 Қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысы	78
2.2.3 Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары және үдеулері	82
2.3 Қатты дененің жазық параллель қозғалысы	86
2.3.1 Қатты дененің жазық параллель қозғалысының заңы, оның анықталу тәсілдері	86
2.3.2 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене (жазық фигураның) нүктелерінің жылдамдықтары	87
2.3.3 Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану арқылы есептеу	88
2.3.4 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері	89
2.4 Қатты дененің қозғалмайтын нүктені айнала қозғалысы. Еркін қатты дененің жалпы жағдайдағы қозғалысы	94
2.4.1 Бір нүктесі қозғалмайтын дененің қозғалысы	94
2.4.2 Еркін қатты дененің қозғалысы	97
2.5 Қатты дененің күрделі қозғалысы	99
2.5.1 Ілгермелі қозғалыстарды қосу	99
2.5.2 Қатты дененің параллель өстерді айналуындағы лездік	100

айналуларын қосу	
2.5.3 Қатты дененің өзара қиылысатын өстерді айналуындағы лездік айналуларын қосу	104
2.5.4 Қатты дененің лездік ілгермелі және айналу қозғалыстарын қосудың жекеленген түрлері	104
2.6 Нүктенің күрделі қозғалысы	105
2.6.1 Салыстырмалы, тасымал және абсолют қозғалыстары	105
2.6.2 Қозғалмалы координаттар өстеріндегі өзінің құраушылары арқылы берілген вектордың абсолют және салыстырмалы туындылары	107
2.6.3 Жылдамдықтарды қосу туралы теорема	109
2.6.4 Үдеулерді қосу туралы теорема (Кориолис теоремасы)	110
2.7 «Кинематика» бөлімі бойынша есептер	115
3 Динамика	121
3.1 Материялық нүкте динамикасы	121
3.1.1 Кіріспе. Негізгі түсініктер және анықтамалар	121
3.1.2 Динамиканың негізгі заңдары. Динамиканың бірінші және екінші есептері	121
3.1.3. Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері	125
3.1.4 Динамиканың бірінші және екінші есептері	126
3.1.5 Материялық нүктенің түзу сызықты қозғалысының квадратураға келтірілетін кейбір түрлері	133
3.1.6 Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема	140
3.1.7 Материялық нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема	144
3.1.8 Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема	146
3.1.9 Күш жұмысы	149
3.1.10 Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы	152
3.1.11 Нүкте үшін Даламбер принципі	157
3.2 Материалық нүктенің түзу сызықты тербелістері	157
3.2.1 Материалық нүктенің еркін гармоникалық тербелісі	157
3.2.2 Материалық нүктенің өшпелі тербелісі	159
3.2.3 Нүктенің кедергі болмағандағы еріксіз (амалсыз) тербелістер	162
3.2.4 Резонанс құбылысы	163
3.3 Механикалық жүйе динамикасы	165

3.3.1 Механикалық жүйе. Ішкі және сыртқы күштер	165
3.3.2 Массалар центрі	166
3.3.3 Механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулері	169
3.3.4 Механикалық жүйенің массалары центрінің қозғалысы туралы теорема	170
3.3.5 Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема	175
3.3.6 Механикалық жүйенің кинетикалық моменттерінің өзгеруі туралы теорема	181
3.3.6 Механикалық жүйенің кинетикалық моменттерінің өзгеруі туралы теорема	183
3.3.8 Кинетикалық моменттің өзгеруі туралы теореманы қатты дененің айналмалы қозғалысына қолдану	184
3.3.9 Қатты дененің бекітілген өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі	185
3.3.10 Механикалық жүйесінің кинетикалық энергиясы және есептеуге керекті формулалар	191
3.3.11 Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема	195
3.3.12 Даламбер принципі	202
3.4 Аналитикалық механиканың элементтері	204
3.4.1 Байланыстар және олардың классификациясы	204
3.4.2 Виртуалды орын ауыстырулар	205
3.4.3 Жүйенің еркіндік дәреже саны және жалпылама координаттары	206
3.4.4 Еркін емес механикалық жүйе динамикасының негізгі есебі. Идеал байланыстар	207
3.4.5 Жалпылама күш	208
3.4.6 Динамиканың жалпы теңдеулері	209
3.4.7 Лагранждың 2-текті теңдеулері	210
3.4.8 Виртуалды орын ауыстыру принципі	210
3.5 Айнымалы массалы материалдық нүкте қозғалысы. Циолковский есебі	211
3.5.1 Айнымалы массалы материалдық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі	211
3.5.2 Циолковскидің екі есебі	214
3.6 «Динамика» бөлімі бойынша есептер	216
4 Есептеу-графикалық жұмыстар тапсырмалары, орындауға	224

қойылатын жалпы талаптар және оларға әдістемелік нұсқаулар	
4.1-тапсырма. Жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігі	224
4.2-тапсырма. Қатты дененің байланыс реакция күштерін анықтау	229
4.3-тапсырма. Құрылымдар жүйесінің байланыс реакция күштерін анықтау	235
4.4-тапсырма. Кеңістік күштер жүйесінің тепе-теңдігі	243
4.5-тапсырма. Қатты дененің тірек реакция күштерін анықтау	247
4.6-тапсырма. Нүкте кинематикасы	252
4.7-тапсырма. Дененің қарапайым қозғалыстары	257
4.8-тапсырма. Жазық механизмге кинематикалық талдау	261
4.9-тапсырма. Нүктенің күрделі қозғалысы	284
4.10-тапсырма. Материалық нүктенің тербемелі және салыстырмалы қозғалысы	290
4.11-тапсырма. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема	296
4.12-тапсырма. Кулисалы берілісті машина динамикасы	301
Қорытындыларды талдау	327
Глоссарий	328
Студенттердің білімін тексеруге тест сұрақтары	333
Әдебиеттер тізімі	359

КІРІСПЕ

Заттар қозғалыстарын зерттейтін ғылымдар жаратылыстану деп аталатыны белгілі десек, теориялық механиканы жаратылыстану ғылымдарының саласына жатқызуға болады. Өйткені, ол теориялық механикалық қозғалыстың ең жалпы заңдылықтарын зерттеп, анықтайды.

Теориялық механиканың негізгі мақсаты – күштер әсерлерінен туындайтын денелердің механикалық қозғалыстарының ең жалпы заңдылықтарын анықтау, олардың іс жүзінде қолдану жолдарын көрсету болып табылады.

Механикалық қозғалыс деп дененің өзге денелерге қарағандағы кеңістіктегі орнының уақыт өтуіне байланысты өзгеріп отыруын айтамыз. Теориялық механикада денені қозғалысқа келтіруші немесе оның қозғалысын өзгертуші физикалық себепті күш деп атайды. Күш – материялық денелердің өзара механикалық әсерлесулерінің өлшемі ретінде алынады.

Қысқаша айтқанда, теориялық механика – материялық денелердің қозғалыстары және әсерлесулері туралы ғылым.

Теориялық механикалық қозғалыстың табиғатта да, техникада да өте жиі кездесетінін ескерсек, қазіргі жаратылыстану мен техника үшін механиканың мәні қандай зор екені өзінен өзі түсінікті болады. Бұдан механиканы қазіргі техниканың ғылыми негізі деп айта аламыз.

Теориялық механика өмір (өндіріс, техника) талабынан келіп шыққан, онымен бірге дамыған ғылым болып табылады.

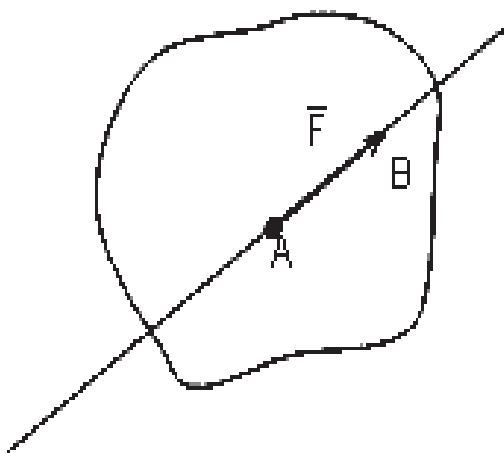
1 СТАТИКА

1.1 Статиканың негізгі ұғымдары мен аксиомалары

1.1.1 Статиканың негізгі ұғымдары

Статикада абсолют қатты денеге әсер ететін күштердің қасиеттері және күштер әсерлерінен мұндай денелердің тепе-теңдікте болу шарттары қарастырылады. Теориялық механиканың статика бөлімінде материялық денелер абсолют қатты дене моделімен беріледі.

Статикадағы негізгі ұғымдардың бірі болып келетін ұғым, ол күш туралы ұғым. Материялық денелердің механикалық өзара әсерлесуінің өлшемі ретінде алынатын шаманы механикада күш деп атайды.



Күш векторлық шама: шамасына, бағытына және түсу нүктесіне тәуелді.

Күштің сан мәні бірлік күшпен салыстыру арқылы анықталады. Механикада күштің негізгі бірліктері ретінде физикалық шамаларды өлшеу бірліктерінің халықаралық

1.1.1-сурет

жүйесінде (БХЖ) 1 Ньютон (1Н) және бірліктердің техникалық жүйесінде 1 килограмм күші (1кГ) алынады. Денеге әсер ететін \bar{F} күші бағытталған AB кесіндісімен бейнеленеді (1.1.1-сурет).

Статикада тек қана абсолют қатты дене тепе-теңдігі қарастырылады. Сол себепті осыдан былайғы жерде күштерді тек абсолют қатты денеге түсірілген күштер деп есептейтін боламыз.

Берілген бір қатты денеге немесе механикалық жүйеге әсер ететін күштер жиынтығын **күштер жүйесі** деп атаймыз.

Күштердің нөлге эквивалент жүйесі **теңгерілген күштер жүйесі** деп аталады

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0.$$

Егер, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ және $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n)$ күштер жүйесінің әрқайсысы тыныштықтағы еркін қатты денені бірдей қозғалысқа келтіретін болса, онда оларды **эквивалент күштер жүйесі** деп атаймыз

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n).$$

Қатты денеге түсірілген $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ күштер жүйесі бір \bar{R} күшке эквивалент болса, онда \bar{R} күшін бұл күштер жүйесінің **тең әсерлі күші** деп атаймыз

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}.$$

1.1.2 Статиканың аксиомалары

Статика аксиомалары Галилей – Ньютонның жалпы заңдарынан туындайды. Олар механикаға толығынан негіз бола алмайды, бірақ олар статикада қарастырылатын барлық мәселелерді қорытып шығаруға әбден жеткілікті.

1 аксиома. *Еркін абсолют қатты денеге түсірілген екі күш тепе-теңдікте болу үшін олардың модульдері тең болуы және бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталуы қажет және жеткілікті (1.1.2 сурет).*

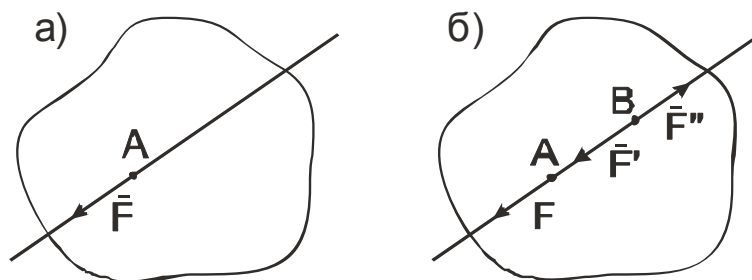
1.1.2-суретте абсолют қатты денелерге түсірілген, бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған, шамалары тең \bar{F}_1 мен \bar{F}_2 күштері көрсетілген. Демек, мұндағы екі күш нөлге эквивалент күштер жүйесін береді

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0, \quad \bar{F}_1 = -\bar{F}_2.$$

Сонымен, екі күш әсер ететін еркін қатты дене тепе-теңдікте болу үшін ол күштердің сан мәндері тең, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталулары керек.

2 аксиома. *Күштердің кез келген жүйесіне күштердің нөлге эквивалент жүйесін қосуға немесе одан оны алып тастауға болады, бұдан берілген жүйесінің қатты денеге әсері өзгермейді.*

Бірінші және екінші аксиомаларды пайдалана отырып, абсолют қатты денеге түсірілген күштің сырғымалы вектор екенін көрсете аламыз. Ол үшін мына теореманы дәлелдейік.



1.1.2-сурет

Теорема. Сан шамасын сақтай отырып күштің түсу нүктесін өзінің әсер ету сызығының бойымен бір орнынан екінші бір орынға көшіруге болады, одан күштің абсолют қатты денеге әсері өзгермейді.

\bar{F} күші алғашқыда қатты дененің A нүктесіне түсірілген болсын (1.1.2,б-сурет). Күштің әсер ету сызығының қандайда бір B нүктесіне шамалары тең, AB түзуімен қарама-қарсы бағытталған \bar{F}' және \bar{F}'' екі күш түсірейік. Бұл екеуінің де сан мәні, берілген күш \bar{F} -тің сан мәніне тең болсын

$$\bar{F}' = \bar{F}'' = \bar{F}.$$

Сондықтан B нүктесіндегі екі күш нөлге эквивалент болатын жүйе құрады

$$(\bar{F}', \bar{F}'') \sim 0.$$

Екінші аксиома бойынша

$$(\bar{F}) \sim (\bar{F}', \bar{F}'', \bar{F}). \quad (a)$$

Осы өрнектегі үш күштен тұратын жүйеден \bar{F} және \bar{F}'' екі күштен тұратын жүйені жекелеп алсақ, оның 1-аксиома бойынша нөлге эквивалент екенін көреміз

$$(\bar{F}'', \bar{F}) \sim 0.$$

2-аксиома бойынша күштердің нөлге эквивалент жүйесін берілген (a) жүйеден алып тастауға болады

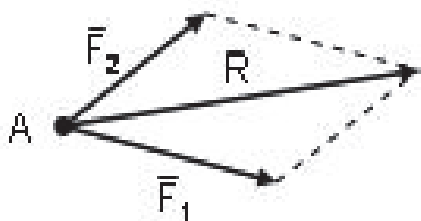
$$(\bar{F}', \bar{F}'', \bar{F}) \sim (\bar{F}'). \quad (б)$$

Ал (a) және (б) өрнектерін салыстырудан мынау шығады

$$(\bar{F}) \sim (\bar{F}').$$

Бұл теореманы дәлелдейді. Демек, абсолют қатты денеге әсер етуші күштер **сырғымалы векторлар** болып табылады. Мұндай векторлардың бастапқы нүктелерін олардың әсер ету сызықтарының кез келген нүктесіне көшіруге болады.

3 аксиома. Қатты дененің бір нүктесіне түсірілген екі күшті бір теңәсерлі күшпен ауыстыруға болады. Тең әсерлі күш берілген күштерден құрылған параллелограмм диагоналімен анықталады да сол нүктеге түсіріледі (1.1.3-сурет).



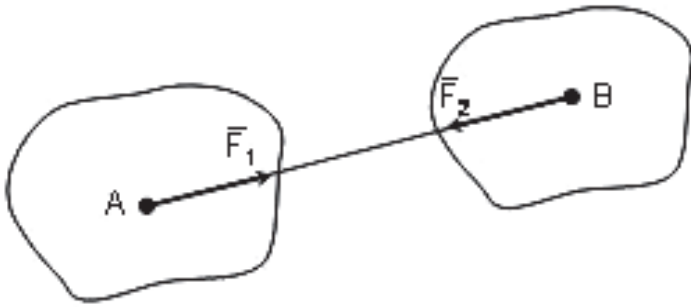
1.1.3-сурет

Қатты дененің A нүктесіне түсірілген (\bar{F}_1)

және (\bar{F}_2) күштерінен параллелограмм құрамыз да, оның диагоналін табамыз. Осы параллелограммның диагоналі берілген күштердің тең әсерлі күшін бейнелейді

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}, \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2.$$

4 аксиома. *Екі дене бірі-біріне әр уақытта шамалары өзара тең, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталған күштермен әсер етеді.* (1.1.4-сурет).



1.1.4-сурет

Бұл аксиоманы басқаша Ньютонның 3-заңы деп те атайды.

5 аксиома. *Тепе-теңдіктегі кез келген механикалық жүйеге қосымша жаңа байланыстар жасауға болады. Бұдан оның бастапқы тепе-теңдіктегі*

жағдайы өзгермейді.

Бұл аксиоманы қатаю принципі деп те атауға болады.

1.1.3 Байланыстар. Байланыстар реакциялары.

Байланыстар аксиомасы

Кеңістікте кез келген бағытта қозғалыс жасай алатын денені еркін дене деп атадық. Егер дене кейбір бағыттарда қозғалыс жасай алмайтын болса, онда ол еркін емес дене деп аталады. Дене қозғалысының еркінділігін шектейтін шарттарды байланыстар деп атаймыз. Байланыстар туралы ұғым – механикадағы күрделі ұғымдардың бірі, оны толық түрде динамикада қарастырамыз. Статикада қатты денеге қойылатын байланыстар көбінесе қозғалмайтын беттер, сызықтар, нүктелер және иілгіш жіптер түрінде кездеседі.

Байланыс рөлін атқаратын дене берілген денеге бір күшпен қарсы әсер етеді де оның қозғалысын шектейді. Бұл күшті байланыс реакциясы дейміз. Байланыс реакциясы, байланысты ойша алып тастаған кездегі мүмкін болатын дене қозғалысының бағытына қарама-қарсы бағытталады. Қатты дене статикасында еркін қатты дененің тепе-теңдігі қарастырылады. Көп жағдайларда тепе-теңдігі қарастырылатын дене басқа денелердің қоршауында болады, олардың механикалық әсерлері бұл дененің еркіндігін шектейді. Берілген дене қозғалысының еркіндігін шектейтін өзге денелер бұл дене үшін

байланыстар болып табылады. Демек, статикада байланыс деп, берілген дененің кейбір бағыттардағы қозғалыстарын болдырмай, оларға шектеу жасайтын тыныштықтағы денені айтады. Абсолют қатты дене статикасында байланыс ролін жіп, сырық, бекітілген нүкте, топса және басқада түрдегі қозғалмайтын денелер атқарады.

6-аксиома. Байланыстар аксиомасы. *Еркін емес денедегі байланыстарды, әсерлерін реакцияларымен ауыстыру арқылы, ойша алып тастауға болады. Содан кейін бұл дене берілген (актив) күштер мен байланыстар реакцияларының әсеріндегі еркін дене ретінде қарастырылады.*

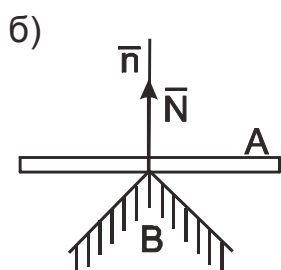
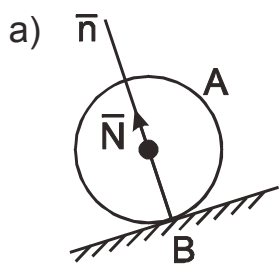
Статика есептерінде кездесетін байланыстарды негізгі төрт түрге бөлуге болады: 1) Денелердің өзара түйісуі; 2) Денелерді топсалармен байланыстыру; 3) Сырықтар және иілгіш байланыстар; 4) Қазықша байланыстар.

Осы айтылған байланыстардың кейбіреулерінің реакцияларының бағыттары туралы мәліметтер берейік.

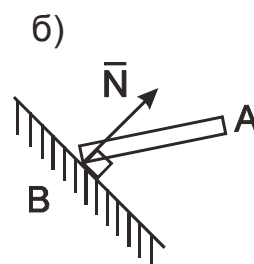
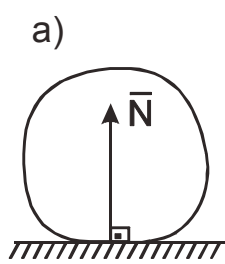
1) Идеал тегіс жазықтық, бет немесе қисық. Олар 1.1.5 (а,б), 1.1.6 (а,б)-суреттерінде бейнеленген. Бірінші жуықтауда, үйкелісін елемеуге болатын тіреу роліндегі B денесінің бетін идеал тегіс (жылтыр) бет дейміз. Мұндай идеал тегіс беттің немесе жазықтықтың, сызықтың, нүктенің реакциясы \bar{N} , екі дененің түйіскен нүктесіндегі ортақ жанамаға нормаль бағытталады.

2) Иілгіш байланыс (жіп, арқан, шынжыр). Бұл түрдегі байланыстардың реакциялары байланыстардың бойымен олардың бекітіліген нүктесіне қарай бағытталады (1.1.7-суретте).

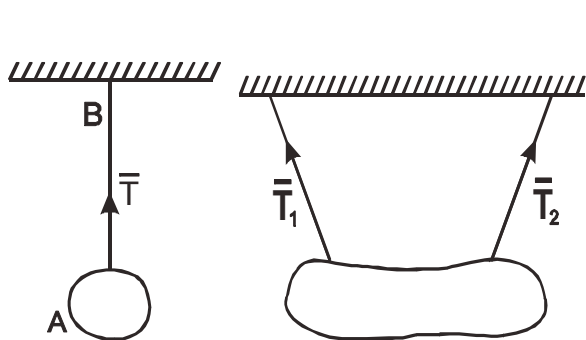
3) Салмақсыз сырық. Өзіне түсірілген жүктемемен салыстырғанда салмағын ескермеуге болатын сырықты салмақсыз сырық дейміз. Қандайда құрылым құрамындағы денелер бір-бірімен, ұштары топсалармен бекітілген салмақсыз сырықтармен жалғастырылған болса, онда мұндай сырықтардың реакциялары сырықтардың бойымен бағытталады (1.1.8.а,б-суреттер). Мұнда сырықтар реакциялары \bar{R} , \bar{R}_1 , \bar{R}_2 , \bar{R}_3 .



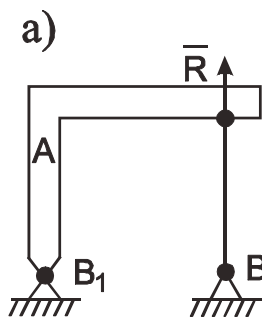
1.1.5-сурет



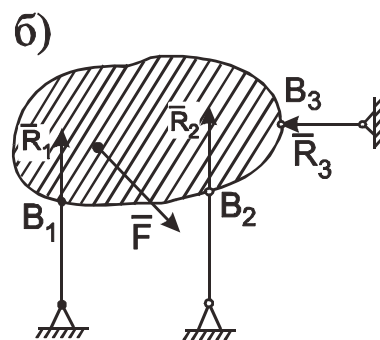
1.1.6-сурет



1.1.7-сурет



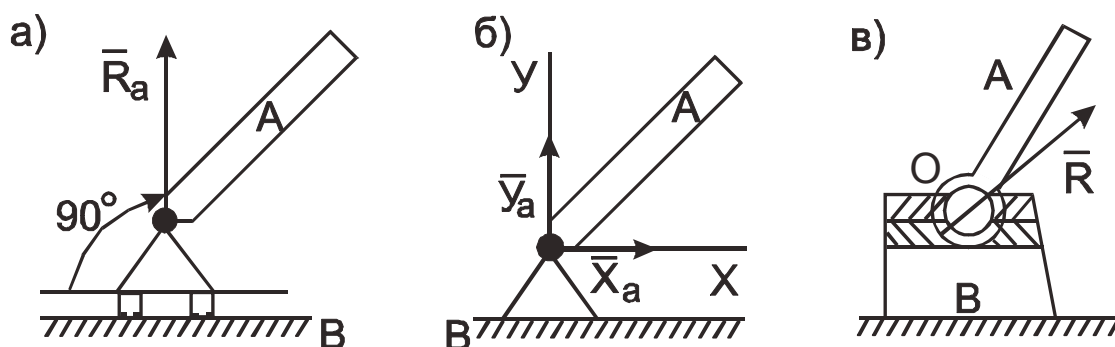
1.1.8-сурет



1.1.9-сурет

4) Денелердің бір-бірімен жылжымалы топсамен және қозғалмайтын топсамен бекітілуі. Мұндай байланыстар 1.10.а, б, в-суреттерде көрсетілген, 1.1.9.а-суреттегі байланыс жылжымалы топса немесе каток деп те аталады. Оның реакциясы тіреу жазықтығына перпендикуляр бағытталады.

1.1.9.б-суретте қозғалмайтын, цилиндрлік топса көрсетілген. Қозғалмайтын, сфералық топсаның (1.1.9.в-сурет) реакциясының, бағыты да, шамасы да белгісіз. Оның тек түсу нүктесі, яғни бастапқы нүктесі O –ны көрсете аламыз.



1.1.9-сурет

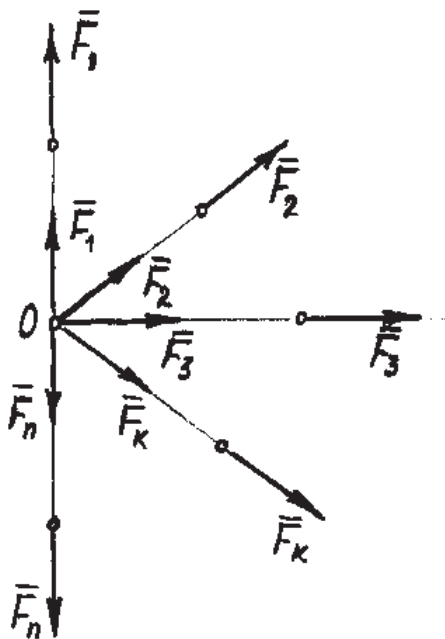
1.2 Жинақталатын күштер жүйесі

1.2.1 Күштерді қосудың геометриялық әдісі. Жинақталатын күштер жүйесінің геометриялық тепе-теңдік шарты

Абсолют қатты дененің $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нүктелеріне, әсер ету сызықтары бір O нүктесінде қиылысатын, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ күштері түсірілсін дейік (1.2.1-сурет).

Мұндай күштер жиынтығы жинақталатын күштер жүйесі деп аталады. Жинақталатын күштер жүйесі бір күшке эквивалент, яғни оның әр уақытта да тең әсерлі күші болады.

Теорема. Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күші жүйедегі күштердің геометриялық қосындысына тең болады да оның әсер ету сызығы күштер түзулерінің қиылысатын O нүктесінен өтеді.



1.2.1-сурет

Теореманы дәлелдеу үшін 1.2.1-суреттегі күштердің бастапқы нүктелерін күштер әсер ететін түзулер бойымен сырғыта отырып, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нүктелерінен O нүктесіне келтіреміз. Сонда жинақталатын күштер жүйесі бір нүктеге түсірілген күштер жүйесіне келтіріледі. O нүктесіне түсірілген күштерге біртіндеп күштер параллелограммының заңын қолданамыз. \bar{F}_1 және \bar{F}_2 күштерінің тең әсерлі күші бұл заң бойынша, осылардың қосындысына тең

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}_1, \quad \bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2. \quad (1.2.1.1)$$

Одан кейін \bar{R}_1 және \bar{F}_3 күштерінен параллелограмм құру арқылы \bar{R}_2 күшін табамыз (1.2.2-сурет)

$$(\bar{R}_1, \bar{F}_3) \sim \bar{R}_2, \quad \bar{R}_2 = \bar{R}_1 + \bar{F}_3 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Келесіде \bar{R}_2 және \bar{F}_4 күштерінен параллелограмм құрамыз да \bar{R}_3 күшін табамыз

$$(\bar{R}_2, \bar{F}_4) \sim \bar{R}_3, \quad \bar{R}_3 = \bar{R}_2 + \bar{F}_4 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4.$$

\bar{R}_3 күші $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$ күштерінің тең әсерлі күші. Осы ретпен соңғы \bar{F}_n күшіне дейін жетеміз. Бұл соңғы күшті алдыңғы $n-1$ күштердің тең әсерлі күшімен параллелограмм заңы бойынша қоссақ, жүйенің тең әсер етуші \bar{R} күшін аламыз

$$(\bar{R}_{n-1}, \bar{F}_n) \sim \bar{R}, \quad \bar{R} = \bar{R}_{n-1} + \bar{F}_n = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum \bar{F}_k. \quad (1.2.1.2)$$

Осылайша күштер параллелограммы заңын біртіндеп қолдану арқылы жинақталатын күштердің бір күшке эквивалент екенін дәлелдедік. Бұл күш берілген жүйенің тең әсерлі күші деп аталады

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.2.1.3)$$

1.2.2-сурет тең әсерлі \bar{R} күшін, күштер көпбұрышы $O_1 a_1 a_2 \dots a_n$ – ді құру арқылы табуға болатынын көрсетеді.

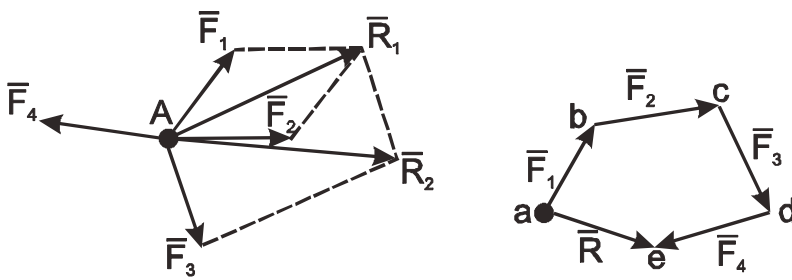
Абсолют қатты дене өзінің бастапқы тепе-теңдік күйін сақтап қалу үшін \bar{R} тең әсерлі күштің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті

$$\bar{R} = 0, \quad \text{яғни} \quad \sum \bar{F}_k = 0. \quad (1.2.1.4)$$

(1.2.1.4) теңдігі жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдікте болуының векторлық түріндегі шартын өрнектейді.

Жоғарыда жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін күштер көпбұрышын құру арқылы табуға болады дедік. $\bar{R} = 0$, болған жағдайда көпбұрыштағы бірінші күштің бастапқы нүктесі O_1 , ондағы соңғы нүктесі a_n бір-бірімен дәл түсіп беттеседі (1.2.2-сурет). Демек, күштер көпбұрышы тұйық көпбұрыш болады.

Сонымен, жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдікте

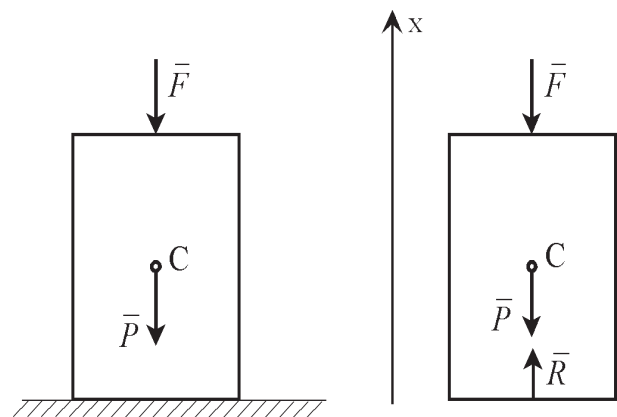


1.2.2-сурет

болуының геометриялық түрде айтылуы мынадай: *жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін жүйе күштерінен құрылатын көпбұрыш тұйық болуы қажет және жеткілікті.*

Мысал. Салмағы $P = 200 \text{ Н}$ біртекті цилиндр көлденең жазықтықтың бетінде жатыр. Әсер етуші сызығы ауырлық центрі арқылы өтетін $F = 500 \text{ Н}$ вертикаль күш цилиндрді үстінен қысады (1.2.3-сурет). Цилиндрдің көлденең жазықтықты қысатын күшін табу керек.

Шешуі: Цилиндрге бір түзудің бойында түсірілген \bar{P} салмақ күшін және \bar{F} қысатын күшті көрсетеміз. Денені байланыстан босатамыз, оның әсерін реакция күшімен ауыстырамыз. Реакция күші \bar{R} жазықтыққа перпендикуляр



1.2.3-сурет

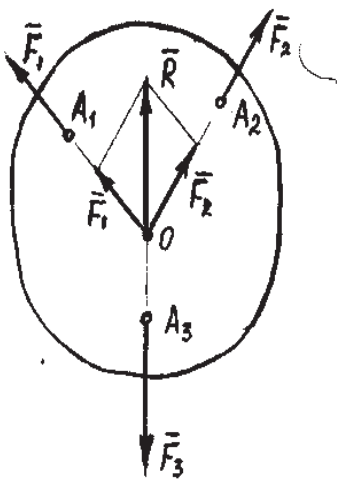
жоғары бағытталады. Осы күштердің геометриялық тепе-теңдік шартын жазамыз: $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = 0$.

Күштерді параллель оське проекциялап, алатынымыз: $R - F - P = 0$ немесе $R = F + P = 700 \text{ Н}$.

1.2.2 Үш күш туралы теорема

Теорема. Егер қатты денеге әсер етіп тұрған өзара параллель емес үш күштің жазық жүйесі тепе-теңдікте болса, онда бұл күштердің әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысады.

Қатты дененің A_1, A_2, A_3 нүктелеріне түсірілген $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ күштері берілсін делік (1.2.4-сурет). Бұлардың бәрі де бір жазықтықта жатыр, олар өзара параллель емес. Бір-біріне параллель болып



келмеген және бір жазықтықта жатқандықтан, күштердің екеуінің әсер ету сызықтары қалайда қиылысуы тиіс. Мысалы, \vec{F}_1 және \vec{F}_2 күштерінің әсер ету сызықтары O нүктесінде қиылысатын болсын. Бұл \vec{F}_1, \vec{F}_2 екі күшті түсу A_1 және A_2 нүктелерінен, O нүктесіне күштер сызықтары бойымен сырғыта отырып көшірейік. Бір нүктедегі екі күшті қосу арқылы, сол O нүктесіне түсірілген бір күш аламыз

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_1.$$

Олай болса

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{R}, \vec{F}_3).$$

1.2.4-сурет

Теореманың шарты бойынша

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0.$$

Сондықтан

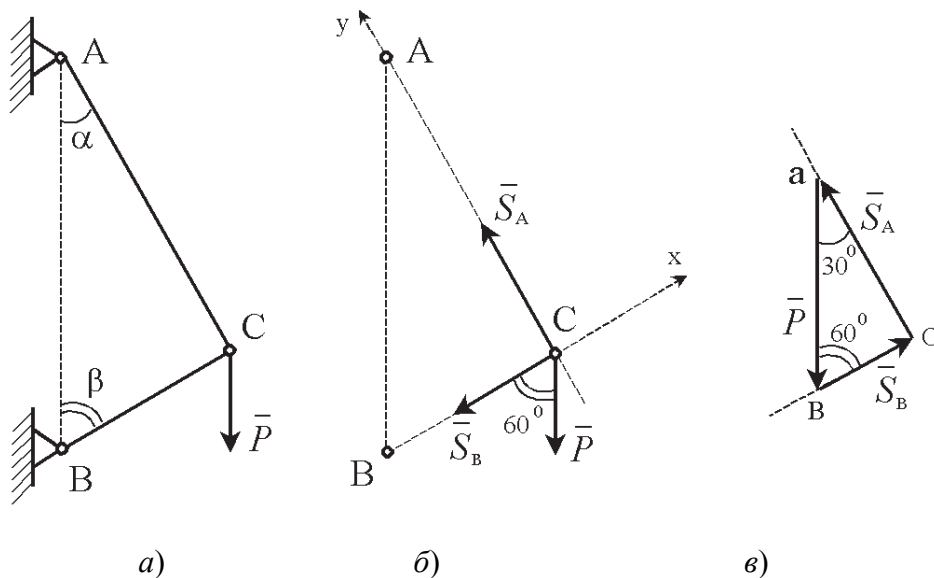
$$(\vec{R}, \vec{F}_3) \sim 0.$$

Ал екі күш тепе-теңдікте болу үшін бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталулары қажет. Олай болса \vec{F}_3 күшінің де әсер ету сызығы O нүктесінен өтуі тиісті. Сонымен теореманы дәлелдедік.

Мысал. Салмағы P -ға тең жүк, суретте көрсетілгендей, C нүктесіне ілінген. A, B және C нүктелерінде сырықтар топсалармен бекітілген. $P = 1000 \text{ Н}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ болғанда AC және BC сырықтарының реакция күштерін табу керек (1.2.5.a-сурет).

Шешуі: C нүктесінің тепе-теңдігін қарастырамыз, оған түсірілген белсенді күш \bar{P} . C нүктесін байланыстардан, яғни AC , BC сырықтарынан ойша босатамыз. Бұлардың реакция күштерін \bar{S}_A , \bar{S}_B деп белгілейміз және екеуі де созылады деп сырықтар бойымен C нүктесінен тыс бағыттаймыз.

Сонымен, C нүктесі \bar{P} , \bar{S}_A , \bar{S}_B күштерінің әсерінен тепе-теңдікте тұрған нүкте болып табылады.



1.2.5-сурет

Есепті алдымен проекция әдісімен, яғни аналитикалық әдіспен шешеміз. Координаттар жүйесінің бас нүктесін C топсасына орналастырамыз. x өсін BC бойымен оң жаққа, ал y өсін AC бойымен жоғары бағыттаймыз.

C нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -S_B - P \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad S_A - P \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Осы теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз

$$S_A = P \cdot \cos 30^\circ = 866 \text{ H}, \quad S_B = -P \cdot \cos 60^\circ = -500 \text{ H}.$$

(-) таңбасы \bar{S}_B күшінің бағыты, суретте көрсетілген бағытына қарама-қарсы бағытталатынын көрсетеді, яғни BC сырығы сығылады.

Бұл есеп геометриялық әдіспен де тез шешіледі. C нүктесіне түсірілген үш күш тепе-теңдік жағдайында тұйықталған көпбұрышты (мұнда үшбұрышты) құрайды. Үшбұрышты құру белгілі \bar{P} күшінен басталады. Кез келген бір a нүктесінен бастап берілген масштабта

алынған, \bar{P} күшіне тең және оған параллель av кесіндісін тұрғызамыз (1.2.5.в-сурет). Кесіндінің бір a ұшы арқылы реакция күштерінің бірінің (мысалы \bar{S}_A реакция күшінің) бағытына параллель түзу жүргізіп, оның екінші v ұшы арқылы қалған реакция күші (бізде S_B) бағытына параллель түзуді жүргіземіз. Сонда осы екі түзудің қиылысқан нүктесі, күштердің avc үшбұрышының үшінші c төбесін береді. Үшбұрыштан \bar{S}_A, \bar{S}_B күштерінің шынайы бағыттары анықталып тұр.

Осыдан кейін, \bar{S}_A, \bar{S}_B күштерінің модульдерін анықтау үшін avc үшбұрышынан оның белгісіз қабырғаларын табу керек.

Күштер үшбұрышының av қабырғасы белгілі. Оның бұрыштарын анықтағаннан кейін, синустар теоремасына сүйене отырып, мына қатынастарды жазамыз

$$\frac{S_B}{\sin 30^\circ} = \frac{S_A}{\sin 60^\circ} = \frac{P}{\sin 90^\circ}.$$

Осы өрнектен

$$S_A = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} P = 866 \text{ H}, \quad S_B = P \cdot \sin 30^\circ = 500 \text{ H}.$$

1.2.3 Жинақталатын күштер жүйесінің тең әсерлі күшін аналитикалық әдіспен табу. Жинақталатын күштер жүйесінің аналитикалық тепе-теңдік шарты

Күштің координаттық өске түсірілген проекциясы күштің модулі мен күш және өстің оң бағыттары арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең (1.2.6-сурет)

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma.$$

Егер координаттық өс бір жазықтықта жатпаса, онда күшті алдымен берілген өс жататын жазықтыққа проекциялап алу керек.

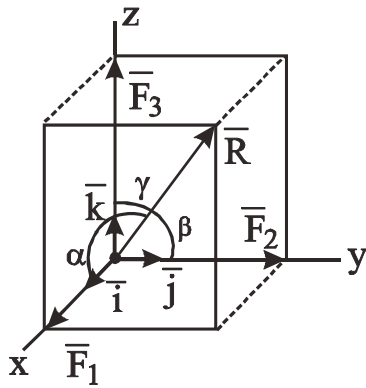
Мысалы, Ox өсіндегі \bar{R} күшінің проекциясы \bar{F} -ті табу керек болса, онда бұл күшті Oxy жазықтығына проекциялап аламыз (1.2.7-сурет).

Күштің жазықтықтағы проекциясын векторлық шама екенін мына белгімен көрсетеміз

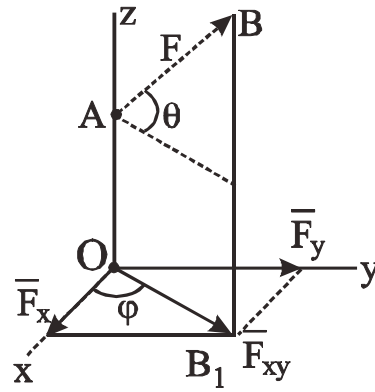
$$\bar{F}_{xy} = \overline{OB_1}. \quad (1.2.3.1)$$

Себебі ол өзінің сан шамасы (модулі) және жазықтықтағы бағытымен анықталады. Оның модулі мына формуламен беріледі

$$\bar{F}_{xy} = F \cos \theta. \quad (1.2.3.2)$$



1.2.6-сурет



1.2.7-сурет

мұндағы, күш \vec{F} пен \vec{F}_{xy} Ox өсіндегі проекциясы, егер (1.6) өрнегін ескерсек, мына теңдікпен беріледі

$$\vec{F}_{xy} = F \cos \theta \cos \varphi. \quad (1.2.3.3)$$

Бас нүктесі, күш сызықтары қиылысатын, O нүктесінде $Oxyz$ координаталар өстерінің тік бұрышты жүйесін аламыз. Осыдан кейін (1.2.1.4) теңдеуінің екі жағын да осы өстерге проекциялаймыз

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.2.3.4)$$

Тең әсерлі күштің модулі параллелепипед диагоналының ұзындығымен, яғни мына формуламен есептеледі

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \quad (1.2.3.5)$$

\vec{R} векторының координаталық өстермен жасайтын бұрыштарын α , β , γ деп белгілейтін болсақ, онда осы өстердегі оның проекцияларын

$$R_x = R \cos \alpha, \quad R_y = R \cos \beta, \quad R_z = R \cos \gamma, \quad (1.2.3.6)$$

өрнектеген болар едік. Ал бұл теңдіктерден \vec{R} күшінің бағыттаушы косинустарын тауып алуға болады

$$\cos \alpha = R_x / R, \quad \cos \beta = R_y / R, \quad \cos \gamma = R_z / R., \quad (1.2.3.7)$$

Енді күштердің жинақталатын жүйесінің тепе-теңдік шарттарын аналитикалық әдіспен анықтайық. Егер бұл күштер жүйесі тепе-теңдікте болса, онда оның тең әсерлі күші нөлге тең болуы керек

$$\vec{R} = 0, \quad R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = 0. \quad (1.2.3.8)$$

Күш нөлге тең болса, оның әр координаттық құраушылары да, яғни оның өстердегі проекциялары да нөлге тең болады

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

немесе

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \quad (1.2.3.9)$$

(1.2.3.9) теңдеулері күштердің жинақталатын жүйесінің тепе-теңдік шарттары болып табылады. *Жинақталатын күштердің кеңістіктегі жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін бұл күштердің координаттар өстерінің әрбіреуіндегі проекцияларының қосындыларының нөлге тең болулары қажет және жеткілікті болады.*

Мысал. Салмағы P –ға тең жүк, 1.2.8-суретте көрсетілгендей, A нүктесіне ілінген. AB және AC сырықтары C , B нүктелерінде топсалармен, AD сым арқаны D нүктесіне бекітілген. Сырықтардың реакция күштерін және сым арқанның керілу күшін табу керек. Берілгені: $P=3000 \text{ Н}$, $\angle CBF = \angle BCA = 60^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$.

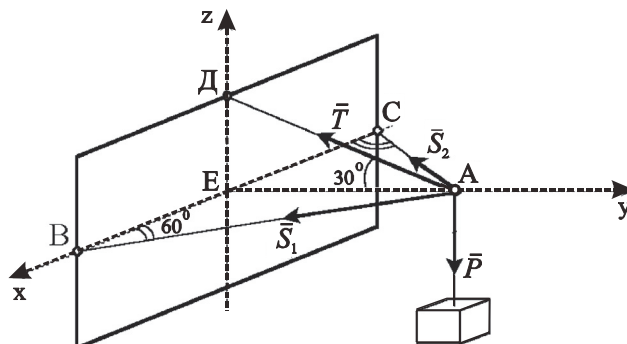
Шешуі: Нүкте деп алуға болатын, A топсасының тепе-теңдігін қарастырамыз. A нүктесіне түсірілген белсенді күш \bar{P} .

A нүктесін байланыстардан ойша босатамыз. AB , AC сырықтары және AD сым арқаны A -дағы байланыстар. Бұлардың реакция күштерін \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{T} деп белгілейміз. Егер бір нүктеге жинақталатын күштер жүйесі кеңістікте орналасқан күштер жүйесі болса, онда есеп шығарудың аналитикалық тәсілін пайдалану тиімді. A нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad S_1 \cdot \cos 60^\circ - S_2 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -S_1 \cdot \cos 30^\circ - S_2 \cdot \cos 30^\circ - T \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad T \cdot \sin 30^\circ - P = 0.$$



1.2.8-сурет

Бұл құрылған тендеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $T = 6000 \text{ Н}$, $S_1 = S_2 = -3000 \text{ Н}$. S_1 және S_2 күштері теріс таңбалы болып шықты. Сондықтан олар суретте біз көрсеткен бағытқа қарама-қарсы бағытталуы тиіс, яғни AB және AC сырықтары сығылады.

1.3 Күш моменттері

1.3.1 Күштің нүктеге қатысты моменті және оның қасиеті

Жалпы жағдайда қатты дене өзіне түсірілген күштің әсерінен ілгерілемелі және массалар центрін айнала қозғалады. Демек, күш денені берілген центрден айналдыра қозғалтуға әрекет жасайды.

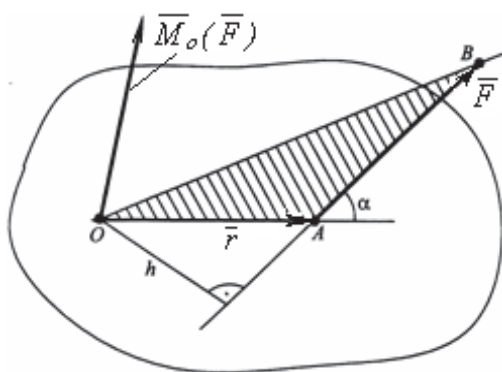
Күштің нүктеге қатысты айналдырушы әсері үш түрлі жағдайға тәуелді. Ол тек күш шамасына ғана тәуелді емес, оның иініне және қай жазықтықта, қандай бағытта әсер ететініне де байланысты болады. Күштің айналдырушы әсерін сипаттайтын осы жайларды өлшеу және бағыттау күш моменті деген ұғым арқылы орындалады.

Күш моментінің скалярлық анықтамасы. *Күштің нүктеге қатысты моменті деп “+”, немесе “-” таңбасымен алынған күш пен оның сол нүктеге қатысты иінінің көбейтіндісіне тең болатын шаманы айтамыз. О нүктесінен күштің әсер ету сызығына дейінгі қашықтықты күштің осы O нүктесіне қатысты иіні деп айтамыз* (1.3.1-сурет). \vec{F} күшінің O нүктесіне қатысты моментінің скаляр шамасын $M_O(\vec{F})$ деп белгілейміз. Осы белгілеуді пайдаланып жоғарыда берілген анықтаманы мынадай формула түрінде жазамыз

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (1.3.1.1)$$

(1.14) формуласы \vec{F} күшінің O нүктесіне қатысты моментінің скаляр шамасын анықтайды. Мұндағы, “+” не “-” таңбасын аларда оң бұранда ережесін қолданамыз.

(1.14) формуласы \vec{F} күшінің нүктесіне қатысты моментінің скаляр шамасын анықтайды. Мұндағы, “+” не “-” таңбасын аларда оң бұранда ережесін



1.3.1-сурет

қолданамыз. Егер күш денені берілген нүктеден сағат тілі қозғалысына қарсы бағытта айналдыруға әрекеттесе, онда күш моменті “+” таңбасымен алынады. Ал егер күш денені берілген

нүктеден сағат тілі қозғалысына бағытталған айналдыруға әрекеттесе, онда күш моменті “–” таңбасымен алынады.

Егер күш иіні метрмен өлшенсе, онда күш моменті ньютон-метр ($Нм$) немесе килограмм-метрмен ($кГм$) өлшенеді.

Күштің нүктеге қатысты моментінің қасиеттері.

Күштің түсу нүктесінен оның әсер ету сызығы бойымен жылжытудан күш моменті өзгермейді.

Күштің O нүктесіне қатысты моменті күштің өзі нөлге тең болғанда, немесе оның әсер ету сызығы осы O нүктесі арқылы өтетін болса ғана нөлге айналады.

Күштің нүктеге қатысты моментінің векторлық анықтамасы. \vec{F} күштің O нүктесіне қатысты моменті деп радиус-вектор \vec{r} мен \vec{F} күшінің векторлық көбейтіндісіне тең векторды айтады (1.3.1-сурет). Күштің айналдырушы әсері оның моментімен анықталады дедік. Олай болса, моменттің анықтамасы күштің айналдырушы әсерін сипаттайтын жағдайларды түгел қамтуы керек. Ол үшін моментті жалпы жағдайда векторлық шама деп алуға тиістіміз. Күш моментін анықтайтын вектор мынадай шарттарды қанағаттандыруы керек:

- 1) оның модулі Ph көбейтіндісіне тең болуы;
- 2) оның $\triangle OAB$ жазықтығына перпендикуляр бағытта орналасуы;
- 3) бағыты оң бұранда ережесіне сәйкес таңдалуы қажет. Осыған

орай $\vec{r} \times \vec{F}$ көбейтіндісін қарастырып көрейік (1.3.1-сурет). Біріншіден, бұл векторлық көбейтіндінің модулі күш моментінің модуліне тең екенін байқаймыз

$$|\overline{M}_O(\vec{F})| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$

Екіншіден, бұл вектор күштің әсер ету жазықтығына, яғни OAB жазықтығына O нүктесінде түсірілген перпендикуляр бойымен оң бұранда ережесіне сәйкес бағытталадынын көреміз. Олай болса, $\vec{r} \times \vec{F}$ векторы жоғарыда айтылған момент векторына қажетті шарттарды толық қанағаттандырады. Сондықтан да оны \vec{F} күші моментінің векторы ретінде алуға болады. Егер \vec{F} күшінің O центріне қатысты моментінің векторын $\overline{M}_O(\vec{F})$ символымен белгілесек, онда ол мынадай формуламен анықталынады

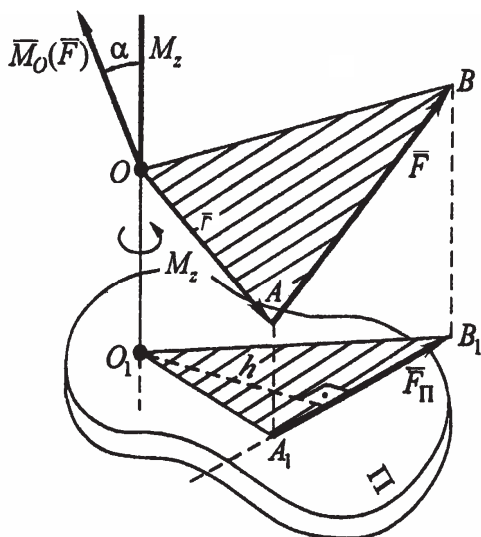
$$\overline{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Бұл формула күш моментінің векторын анықтайды. Момент векторы $\overline{M}_O(\vec{F})$, күш әсерінің жазықтығының O нүктесіне түсірілген

перпендикуляр бойымен бағытталады, алгебралық шамасы (1.3.1.1)-формуламен есептелінеді.

1.3.2. Күштің өске қатысты моменті

Күштің денені өстен айналдырушы әсерін сипаттаушы – өске қатысты күш моменті.



1.3.2- сурет

Күштің өске қатысты моменті деп күштің берілген өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясының өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты алынған моментінің “+”, немесе “-” таңбасымен алынған сан шамасын айтамыз.

Бізге A нүктесіне түсірілген \vec{F} күші және Oz өсі берілсін (1.3.2-сурет). Өстің кез келген бір O нүктесі арқылы оған перпендикуляр жазықтық (π) -ді жүргізейік. \vec{F} күшінің (π) жазықтығына түсірілген проекциясын

$\vec{F}_{i\delta}$ деп, ал күштің өске қатысты моментін $I_z(\vec{F})$ деп белгілесек, онда жоғарыдағы анықтаманы былай көрсетеміз

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_\pi)$$

Осы теңдік күштің Oz өсіне қатысты моментін табу, \vec{F}_{np} күш проекциясының O нүктесіне қатысты моментін есептеуге келтіретінін көрсетеді. Ал, оны (1.3.1.1) формуласымен берілетін ереже арқылы есептейміз

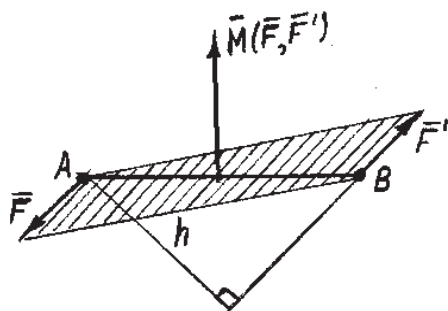
$$M_0(\vec{F}) = \pm F_\pi h. \quad (1.3.2.1)$$

Бұл формуладағы “+” не “-” таңбасын алатынымызды анықтауда оң бұранда ережесіне сүйенеміз. Егер z өсінің оң ұшынан қарағанда $\vec{F}_{i\delta}$ әсерінен болуға тиісті айналыс сағат тілі қозғалысына қарсы бағытта көрінсе, онда моментті оң деп есептеп, “+” таңбасын аламыз; ал егер ол сағат тілі қозғалысына бағытас болып көрінсе, онда моментті теріс деп есептеп, “-” таңбасын аламыз.

1.4 Қос күш теориясы

1.4.1 Қос күш. Қос күш моменті

Абсолют қатты денеге әсер етуші шамалары тең, өзара параллель және қарама-қарсы бағытталған екі күштің жүйесін қос күш деп атаймыз.



1.4.1-сурет

Күштердің әсер ету сызықтарының ең жақын ара қашықтығын, қос күштің иіні деп атаймыз.

Күштерінің мәндері тең ($\overline{F}, \overline{F}'$), бағыттары қарама-қарсы болғанымен, әр түрлі екі нүктеге әсер ететіндіктен қос күш нөлге эквивалент жүйе

болмайды. Қос күш ($\overline{F}, \overline{F}'$) бір тең әсерлі күшке келтірілмейді. Оның әсерінен еркін қатты дене тыныштық күйінен шығып, айналмалы қозғалыс жасайды.

Қос күш әсері қос күш моментімен анықталады.

Қос күш моменті деп модулі, оның күші мен иінінің көбейтіндісіне ($F \cdot h$) тең, ал бағыты қос күш жазықтығына перпендикуляр болып келетін векторды айтамыз.

Қос күш моменті векторының бағытын анықтауда оң бұранда ережесі қолданылады (1.4.1-сурет).

Қос күш моментінің векторын $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}')$ деп белгілесек, онда оның модулін қос күші мен иінінің көбейтіндісіне теңестіреміз

$$|\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}')| = Fh = Fh'. \quad (1.4.1.1)$$

Бұл теңдіктен ол вектордың модулінің, ($\overline{F}, \overline{F}'$) күштерінен құрылған, параллелограмм ауданына тең болатындығын көреміз (1.4.1-сурет).

$$|\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}')| = S_{ABCD} = Fh. \quad (1.4.1.2)$$

$\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}')$ векторы – еркін вектор, оны қос күш әсер ететін дененің кез келген бір нүктесіне түсіруге болады.

Енді жоғарыда берілген анықтамаға сәйкес қос күш моментінің векторлық өрнегін табуымыз керек. Сол мақсатпен мынадай векторлық көбейтінді аламыз

$$\overline{AB} \times \overline{F}', \text{ немесе } \overline{BA} \times \overline{F}.$$

Бұл векторлық көбейтіндінің модулі мен бағытын анықтайық. Оның модулін, (1.4.1-суретте) көрсетілген қос күштің иіні болып табылатын, h арқылы өрнектейік. Сонда алатынымыз

$$|\overline{AB} \times \overline{F'}| = AB \cdot F' \cdot \sin(\overline{AB}, \overline{F'}) = Fh. \quad (1.4.1.3)$$

Бұл (1.4.1.3) теңдігін қос күш моменті векторының модулін анықтайтын (1.4.1.1) немесе (1.4.1.2) теңдігімен салыстырып қарасақ, онда екі вектордың модульдерінің тең екендігін көреміз

$$|\overline{AB} \times \overline{F'}| = |\overline{M}(\overline{F}, \overline{F'})|.$$

Осыдан кейін $\overline{AB} \times \overline{F'}$ векторының бағытына көңіл бөлеміз. Бұл вектор $ABCD$ параллелограмының жазықтығына (1.4.1-сурет) тұрғызылған перпендикуляр мен оң бұранда ережесіне сәйкес бағытталады. Демек, $\overline{AB} \times \overline{F'}$ (немесе $\overline{BA} \times \overline{F}$) векторы мен қос күш моментінің векторы $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F'})$ бірдей бағытталады. Осы салыстырудан $\overline{AB} \times \overline{F'}$ (не $\overline{BA} \times \overline{F}$) векторының $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F'})$ векторына тең болатынын табамыз. Олай болса, қос күш моментінің $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F'})$ векторын $\overline{AB} \times \overline{F'}$ және $\overline{F'}$ (немесе \overline{BA} және \overline{F}) векторының векторлық көбейтіндісімен өрнектей аламыз

$$\overline{M}(\overline{F}, \overline{F'}) = \overline{AB} \times \overline{F'} = \overline{BA} \times \overline{F}. \quad (1.4.1.4)$$

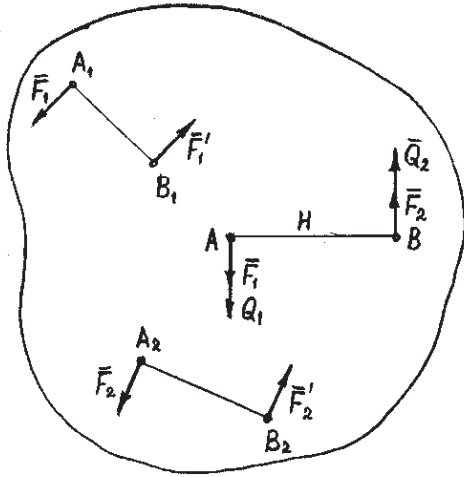
1.4.2 Қос күштерді қосу туралы теоремалар

Теорема. *Бір жазықтықта әсер ететін екі күшті осы жазықтықта жататын тең әсерлі бір қос күшпен ауыстыруға болады. Тең әсерлі қос күштің моменті құраушы қос күштер моменттерінің алгебралық қосындысына тең.*

Бір жазықтықта жататын екі қос күш $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$, $(\overline{Q}_1, \overline{Q}_1')$ берілсін дейік (1.4.2-сурет). Онда қос күштер моменттерінің сан шамалары

$$|\overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_1')| = F_1' \cdot h_1 \quad |\overline{M}(\overline{Q}_1, \overline{Q}_1')| = Q_1' h. \quad (1.4.2.1)$$

Берілген қос күштерді бір иінге келтіруге болады. Ортақ иін үшін $AB = H$ кесіндісін алайық. Иіндері өзгеруі себепті қос күштердің күштері де өзгереді. Бірақ олардың моменттерінің сан мәндері өзгермей қалуы керек



1.4.2-сурет

$$F_1' h = F_1 \cdot H, \quad Q_1' h_1 = Q_1 H,$$

тауып аламыз

$$F_1 = \frac{F_1' h}{H}, \quad Q_1 = \frac{Q_1' h_1}{H}.$$

Осылайша берілген

(\bar{F}_1, \bar{F}_1') , (\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') қос күштер ортақ

иінді қос күштерге келтіріледі

(\bar{F}_1, \bar{F}_2) және (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) .

Осыдан кейін келтірілген (\bar{F}_1, \bar{F}_2)

және (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) . қос күштердің иіндерін

AB кесіндісіне параллель болғанға дейін бұрамыз. Сонан соң оларды (ж) жазықтығымен жылжыта отырып, олардағы күштерді A және B нүктелеріне түсіреміз.

A нүктесіндегі бір түзу бойымен бағытталған күштерді қосып бір тең әсерлі \bar{R}_1 күшін аламыз

$$(\bar{F}_1, \bar{Q}_1) \sim \bar{R}_1, \quad \bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{Q}_1.$$

Сол сияқты B нүктесінде

$$(\bar{F}_2, \bar{Q}_2) \sim \bar{R}_2, \quad \bar{R}_2 = \bar{F}_2 + \bar{Q}_2.$$

Сонымен, берілген екі қос күштер жиыны бір қос күшке эквивалент болады

$$((\bar{F}_1, \bar{F}_2), (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)) \sim (\bar{R}_1, \bar{R}_2).$$

Енді тең әсерлі (\bar{R}_1, \bar{R}_2) қос күш моменті құраушы қос күштер моменттерінің алгебралық қосындысына тең болатындығын дәлелдейік.

Қос күш моментінің анықтамасы бойынша (1.4.2.1)-ді пайдалансақ

$$|\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_2)| = R_1 H = R_2 H$$

(\bar{R}_1, \bar{R}_2) күштері, жоғарыда дәлелдегеніміздей, күштер

қосындысына тең, сол себепті

$$|\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_2)| = R_1 H = (F_1 + Q_1) \cdot H = R_1 \cdot H + Q_1 \cdot H.$$

Мұндағы, F_1H және Q_1H келтірілген қос күштер моменттері екенін ескеріп, оларды моменттің белгілеулері арқылы көрсетейік

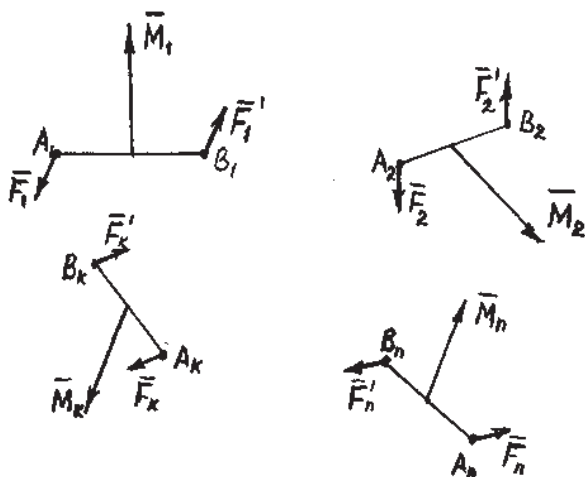
$$|\bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_2)| = F_1 \cdot H, \quad |\bar{M}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)| = Q_1 \cdot H.$$

Осыны пайдаланып алдыңғы теңдікті қайта жазамыз

$$|\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_2)| = |\bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_2)| + |\bar{M}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)|. \quad (1.4.2.2)$$

Немесе қысқа түрде былай жазуға болады

$$\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_2) = \bar{M}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) + \bar{M}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2). \quad (1.4.2.3)$$



1.4.3-сурет

Бір жазықтықтағы екі қос күшті қосу туралы теорема дәлелденді. Соңында (1.4.2.2), немесе (1.4.2.3) моменттер қосындысын векторлық қосынды деп алуға болады. Өйткені бұлар параллель бағытталған

$$\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_2) = \bar{M}_1 + \bar{M}_2. \quad (1.4.2.4)$$

Теорема. *Кеңістікте кез келген ретпен орналасқан қос күштер жүйесі бір қос күшке эквивалент болады. Бұл тең әсерлі*

қос күштің моменті жүйедегі барлық қос күштер моменттерінің геометриялық қосындысына тең.

Бізге кеңістікте кез келген ретпен орналасқан n қос күштер берілсін дейік (1.4.3-сурет)

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1'), (\bar{F}_2, \bar{F}_2'), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n').$$

Бұлардың моменттері $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ болсын (1.4.3-сурет).

Алдыңғы теорема бойынша алғашқы екі қос күшті бір тең әсерлі қос күшпен алмастыруға болады

$$((\bar{F}_1, \bar{F}_1'), (\bar{F}_2, \bar{F}_2')) \sim (\bar{R}_1, \bar{R}_1').$$

Бұл қос күш моменті \bar{M}_1 құраушы қос күштер моменттерінің геометриялық қосындысына тең

$$\bar{M}(\bar{R}_1, \bar{R}_1') = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Осы ретпен қос күштерді бірінен соң бірін қоса береміз. Ең ақырында (\bar{F}_n, \bar{F}_n') қос күшін алдындағы қос күштерге эквивалентті

$(\bar{R}_{n-1}, \bar{R}'_{n-1})$ қос күшімен қосамыз. Сонда қос күштер жүйесіне эквивалент болатын қорытқы бір ғана (\bar{R}, \bar{R}') қос күші шығады

$$((\bar{R}_{n-1}, \bar{R}'_{n-1}), (\bar{F}_n, \bar{F}'_n)) \sim (\bar{R}, \bar{R}'). \quad (1.4.2.5)$$

Қос күштер жүйесіне эквивалент бұл қорытқы қос күш моменті \bar{M}
 $\bar{M} = \bar{M}_{n-1} + \bar{M}_n$.

Немесе

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_{n-1} + \bar{M}_n = \sum \bar{M}_k. \quad (1.4.2.6)$$

Сонымен, қос күштер жүйесі бір тең әсерлі (\bar{R}, \bar{R}') қос күшке келтіріледі және оның моменті жүйедегі қос күштер моменттерінің геометриялық қосындысына тең болады.

1.4.3 Қос күштер жүйесінің тепе-теңдігінің шарттары

Қос күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін жүйедегі қос күштер моменттерінің геометриялық қосындысы нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

Шындығында кеңістікте кез келген ретпен орналасқан қос күштер жүйесі әр уақытта да бір тең әсерлі қос күшке келеді. Сондықтан, осы тең әсерлі қос күштің әсері жойылуы, яғни оның моменті нөлге тең болуы керек. Ендеше жүйедегі қос күштер моменттерінің қосындысы да нөлге айналады

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_{n-1} + \bar{M}_n = 0, \quad (1.4.3.1)$$

немесе қысқаша түрде

$$\sum \bar{M}_k = 0. \quad (1.4.3.2)$$

Бұл векторлық тепе-теңдік теңдеуін координаттар өстеріне проекцияласақ үш скалярлық тепе-теңдік теңдеулерін аламыз

$$\sum M_{kx} = 0, \quad \sum M_{ky} = 0, \quad \sum M_{kz} = 0. \quad (1.4.3.3)$$

(1.4.3.3) теңдеулерінен мынадай қорытынды шығарамыз: *кеңістіктегі кез келген қос күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін ондағы барлық қос күштер моменттерінің әрбір координаттық өстегі проекцияларының қосындылары жеке-жеке нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.*

Егер жүйедегі қос күштердің барлығы да бір жазықтықта жататын болса, онда барлық моменттер осы жазықтыққа перпендикуляр бағытталады да, біріне-бірі параллель болады. Бұл жағдайда моменттердің алгебралық қосындысы нөлге теңестіріледі

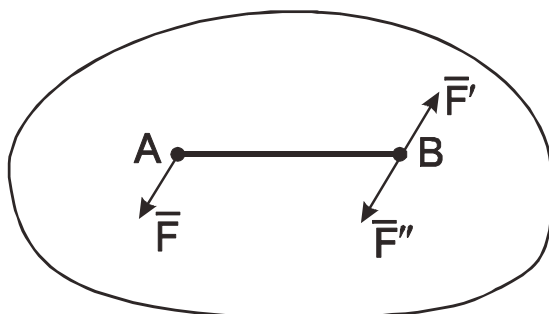
$$\sum M_k = 0. \quad (1.4.3.4)$$

Қос күштердің жазық жүйесі тепе-теңдікте болу үшін ондағы қос күштер моменттерінің алгебралық қосындысының нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

1.5. Күштердің кез келген кеңістік жүйесі

1.5.1. Статикадағы негізгі лемма. Күштердің кез келген кеңістік жүйесін бір центрге келтіру

Статикадағы негізгі лемма. Абсолют қатты дененің A нүктесіне түсірілген \vec{F} күші берілген дейік (1.5.1-сурет). Күштің шамасын да, бағытын да сақтай отырып, өзіне-өзін параллель бағытта екінші орынға көшіруге болмайды. Өйткені мұндай жағдайда, берілген \vec{F} күшінің қатты денеге жасайтын механикалық әсері өзгеріп кетеді. Берілген күшті қатты дененің кез келген нүктесіне өзіне-өзін параллель көшіруді мынадай лемманың көмегімен орындауға болады.



1.5.1-сурет

Абсолют қатты дененің A нүктесінде берілген \vec{F} күші дененің басқа бір нүктесі B -ға түсірілген дәл өзіндей \vec{F}' күшке және бір қос күшке (\vec{F}, \vec{F}') эквивалент. Бұл қос күштің моменті, A нүктесіндегі \vec{F} күшінің B нүктесіне қатысты алынған моментіне тең болады.

Лемманы дәлелдейік. Алдын ала көрсетілген B нүктесіне, шамалары берілген күш шамасына тең және ол күшке параллель түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған, \vec{F}' және \vec{F}'' күштерін түсірейік (1.5.1-сурет).

Сөйтіп келісім бойынша B нүктесіне түсірілген күштер мына шарттарды қанағаттандырады

$$\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}'' \quad \text{және} \quad (\vec{F}', \vec{F}'') \sim 0. \quad (1.5.1.1)$$

Нөлге эквивалент екі күштің бұл жүйесін берілген \vec{F} күшке қосып жаңа күштер жүйесін алайық $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ сонда мынадай өрнек аламыз

$$\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \sim (\vec{F}'', (\vec{F}, \vec{F}')). \quad (1.5.1.2)$$

Мұндағы, (\bar{F}, F'') шамалары тең және бағыттары қарама-қарсы, параллель екі түзумен бағытталған екі күштен тұратын тіркеме қос күш деп атаймыз. Тіркеме қос (\bar{F}, \bar{F}') -тің моментінің векторы, анықтама бойынша мынадай формуламен беріледі

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \overline{AB} \times \bar{F}'' = \overline{BA} \times \bar{F}. \quad (a)$$

Енді A нүктесіндегі \bar{F} күшінің жаңа центр B -ға қатысты алынған моментінің векторлық өрнегін көрсетіп қояйық

$$\bar{M}_B(\bar{F}) = \overline{BA} \times \bar{F}. \quad (б)$$

(a) және (б) теңдіктерін салыстырып қарастырудан

$$\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}') = \bar{M}_A(F), \quad (1.5.1.3)$$

екенін көреміз. (1.5.1.3) теңдігінен тіркеме қос күш (\bar{F}, \bar{F}') моменттерінің тең болатынын өрнектейді.

Негізгі лемма күшті, бастапқы түсу нүктесінен екінші бір нүктеге өзіне-өзін параллель көшіру, ол күшке сәйкес алынған қос күшті тіркеу арқылы орындалатынын көрсетеді.

Күштердің кез келген кеңістік жүйесін бір центрге келтіру. Қатты дененің A_1, A_2, \dots, A_n нүктелеріне түсірілген күштердің әрбіреуін (1.5.2-сурет), ол дененің берілген нүктесі O -ға параллель көшірейік. O нүктесін келтіру центрі деп атаймыз.

Пуансо теоремасы. *Қатты денеге әсер ететін күштердің кез келген кеңістік жүйесін, жалпы жағдайда, күш және қос күшке келтіруге болады.*

Теореманы дәлелдеу. Негізгі леммаға сүйене отырып, жүйедегі әрбір күшті, A_1, A_2, \dots, A_n нүктелерінен келтіру центрі O нүктесіне өздеріне-өздерін параллель көшірейік. Осы процесс нәтижесін мына өрнектермен көрсетуге болады

$$(\bar{F}_1) \sim (\bar{F}_1'', (\bar{F}_1, \bar{F}_1')), (\bar{F}_2) \sim (\bar{F}_2'', (\bar{F}_2, \bar{F}_2')), \dots, (\bar{F}_n) \sim (\bar{F}_n'', (\bar{F}_n, \bar{F}_n')). \quad (1.5.1.4)$$

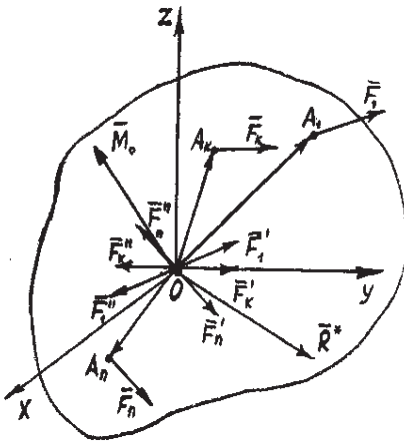
(1.5.1.4)-дегі өрнектерді бірін-біріне біріктіріп алу нәтижесінен мынадай өрнек шығады

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \left((\bar{F}_1'', \bar{F}_2'', \dots, \bar{F}_n''), (\bar{F}_1, \bar{F}_1'), (\bar{F}_2, \bar{F}_2'), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n') \right). \quad (1.5.1.5)$$

(1.5.1.5) өрнегінің оң жағындағы O нүктесіне түсірілген күштер бір күшке эквивалент

$$(\bar{F}_1'', \bar{F}_2'', \dots, \bar{F}_n'') \sim \bar{R}^*. \quad (1.5.1.6)$$

\bar{R}^* күші O центріне жинақталған күштер жүйесінің тең әсер етушісі. Ол осы жүйедегі күштердің геометриялық қосындысына тең және ол келтіру центрі O –ға түсіріледі (1.5.2-сурет)



1.5.2-сурет

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_k \quad \text{немесе} \quad \bar{R}^* = \sum \bar{F}_k. \quad (1.5.1.7)$$

Бұл вектор берілген күштер жүйесінің негізгі векторы деп аталады. Мұнымен қатар, қатты денеге n тіркеме қос күштер жүйесі $\left((\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n) \right)$ әсер етеді. Қос күштерді қосу туралы теорема бойынша, қос күштер жүйесі, вектор моменті осындағы қос күштердің вектор моменттерінің геометриялық қосындысына тең болып келген, бір қос күшке (\bar{Q}, \bar{Q}')

эквивалент болады, яғни

$$\left((\bar{F}_1, \bar{F}'_1), (\bar{F}_2, \bar{F}'_2), \dots, (\bar{F}_n, \bar{F}'_n) \right) \sim (\bar{Q}, \bar{Q}'). \quad (1.5.1.8)$$

Ал әрбір тіркеме қос күштің вектор моментінің $\bar{M}(\bar{F}_k, \bar{F}'_k)$, A_k нүктесіндегі \bar{F}_k берілген күштің келтіру центрі O -ға қатысты алынған $\bar{M}_O(\bar{F}_k)$ моментіне тең болып келеді. Олай болса, (1.5.1.8)-теңдігін былай жазамыз

$$\bar{M}(\bar{Q}, \bar{Q}') = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k).$$

Енді (1.5.1.6) және (1.5.1.8) өрнектерін (1.5.1.7)-нің оң жағындағы орындарына қойсақ, онда мынадай өрнекке келеміз

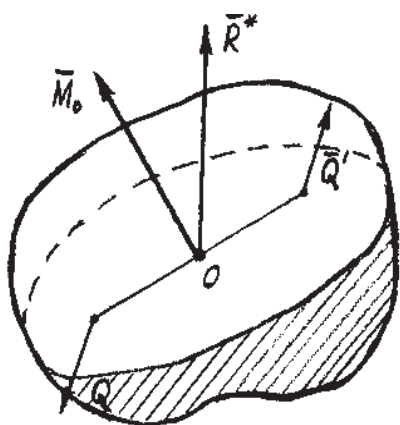
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{R}^*, (\bar{Q}, \bar{Q}')). \quad (1.5.1.9)$$

Сонымен, теореманың дәлелдеуі (1.5.1.9)-өрнекпен беріледі. Ал қос күш (\bar{Q}, \bar{Q}') өзінің моментінің $\bar{M}(\bar{Q}, \bar{Q}')$ векторымен анықталады. Бұл вектор қос күштер моменттерінің векторлық қосындысына тең (1.5.3-сурет)

$$\bar{M}(\bar{Q}, \bar{Q}') = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \bar{M}_O. \quad (1.5.1.10)$$

Бұл вектор берілген күштер жүйесінің негізгі моменті деп аталады.

Бас вектор мен бас моментті өрнектейтін формулалар.



1.5.3-сурет

Берілген кез келген күштер жүйесінің \bar{R}^* бас векторы мен \bar{M}_O бас моментінің модулдерін және бағыттарын өрнектейтін аналитикалық формулаларды анықтайық. Охуз координаттар жүйесін 1.5.2-суретте көрсетілгендей түрде тандап аламыз. Оның бас нүктесі O -ны жүйедегі күштерді келтірудің центрі ретінде алайық. Бас вектор \bar{R}^* жүйедегі күштердің векторлық қосындысына тең. Осы векторлық теңдеудің екі жағында координаттар өстеріне проекциялайық

$$R_x^* = \sum F_{kx} = 0, \quad R_y^* = \sum F_{ky} = 0, \quad R_z^* = \sum F_{kz} = 0. \quad (1.5.1.11)$$

Бас вектор \bar{R}^* -дің модулі

$$\bar{R}^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2} + R_z^{*2}}. \quad (1.5.1.12)$$

Оның бағыттаушы косинустары

$$\cos(\bar{R}^*, \delta) = \frac{R_\delta^*}{R^*}, \quad \cos(\bar{R}^*, y) = \frac{R_y^*}{R^*}, \quad \cos(\bar{R}^*, z) = \frac{R_z^*}{R^*}. \quad (1.5.1.13)$$

Координаттар өстерінің бас нүктесіне қатысты жүйенің бас моменті \bar{M}_O жүйедегі күштердің сол нүктеге қатысты алынған моменттерінің геометриялық қосындысына тең болғандықтан оның координаттар өстеріндегі проекциялары M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} күштердің осы өстерге қатысты моменттерінің қосындылары арқылы анықталады

$$M_{Ox} = \sum M_{Ox}(\bar{F}_k), \quad M_{Oy} = \sum M_{Oy}(\bar{F}_k), \quad M_{Oz} = \sum M_{Oz}(\bar{F}_k). \quad (1.5.1.14)$$

Оның бағыттаушы косинустары

$$\cos(\bar{M}_O, \delta) = \frac{M_{O\delta}}{M_O}, \quad \cos(\bar{M}_O, y) = \frac{M_{Oy}}{M_O}, \quad \cos(\bar{M}_O, z) = \frac{M_{Oz}}{M_O}. \quad (1.5.1.15)$$

1.5.2 Күштер жүйелерін бір центрге келтірудің дербес жағдайлары

Келтірудің жалпы жағдайында, күштердің кез келген жүйесі, қорытқы бір күш \bar{R}^* -ге және моменті бас момент \bar{M}_O -ге келтірілетінін дәлелдедік. Мұндағы, \bar{R}^* және \bar{M}_O векторлары күштер

жүйесін келтірудің элементтері деп аталады. Осы элементтердің жеке мәндеріне сәйкес келетін күштер жүйесін келтірудің жағдайларын анықтауға болады.

Бір қос күшке келтіретін жағдай. Егер берілген күштер жүйесі үшін $\bar{R}^* = 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ болса, онда ол жүйе моменті \bar{M}_O -ге тең болатын бір қос күшке келтіріледі.

Күштер жүйесінің тең әсерлі күшке келтірілетін жағдайы.

а) Егер берілген күштер жүйесі үшін $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$ болса, онда ол жүйе тең әсерлі күшке келтіріледі. Әсер етуші сызығы келтіру центрі арқылы өтеді.

б) Егер берілген күштер жүйесі үшін $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_O = 0$ және $\bar{R}^* \perp \bar{M}_O$ болса, онда ол жүйе тең әсерлі күшке келтіріледі. Әсер етуші сызығы келтіру центрі арқылы өтпейді.

Күштер жүйесінің тең әсерлі күшке келтірілетін жағдайы.

Егер берілген күштер жүйесі үшін $\bar{R}^* \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ және $\bar{R}^* \perp \bar{M}_O$ емес болса, онда ол жүйе динамикаға келтіріледі.

Күштердің берілген жүйесінің тепе-теңдікте болу кезіндегі жағдайы. Келтірудің бұл жағдайында $\bar{R}^* = 0$, $\bar{M}_O = 0$ шарттарының орындалулары қажет және жеткілікті.

1.5.3 Күштердің әртүрлі жүйелерінің тепе - теңдік шарттары.

Тең әсерлі күштің моменті туралы теорема

Күштердің кез келген кеңістік жүйесінің тепе-теңдік шарттары. Күштердің кез келген жүйесі тепе-теңдікте болу үшін оның бас векторы және қандайда болмасын бір центрге қатысты алынған бас моментінің нөлге тең болуы қажет және жеткілікті

$$\bar{R}^* = 0, \bar{M}_O = 0 \quad (1.5.3.1)$$

Осыны дәлелдейік. Күштердің берілген кез келген жүйесі $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ тепе-теңдікте болған жағдайда, (1.5.3.1) шарттары орындала ма екен, соны тексерейік. Қандай да бір центрге қатысты алынған жүйенің бас векторы \bar{R}^* нөлге тең болмаса, онда ол басқа центрде нөлге айналмайды. Өйткені ол жүйенің келтіру центрінің орнына тәуелді емес. Демек, тепе-теңдіктегі жүйе үшін бас вектордың нөлге тең болуы қажет. Ал $\bar{R}^* = 0$ болса, онда берілген күштер жүйесі қорытқы бір қос күшке келтіріледі. Бұл қос күш моменті \bar{M}_O жүйенің келтіру центрін өзгерткенмен өзгермейтін вектор. Олай

болса жүйенің тепе-теңдікте болуы үшін $\bar{M}_0 = 0$ болу керек. Сөйтіп, күштердің берілген жүйесі тепе-теңдікте болу үшін (1.5.3.1) шарттарының орындалуы қажет.

Енді (1.5.3.1)-шарттарының жүйе тепе-теңдігі үшін жеткілікті де екенін дәлелдейік. Ол үшін (1.5.3.1)-шарттары орындалды дейік. Онда жүйе тепе-теңдікте бола ма соны тексерейік. Егер $\bar{R}^* = 0$, $\bar{M}_0 \neq 0$ болса, онда берілген күштер жүйесі моменті \bar{M}_0 болатын бір қос күшке келген болар еді де тепе-теңдік болмас еді. Ал егер керісінше $\bar{R} \neq 0$, $\bar{M}_0 = 0$ болса, онда күштер жүйесі бір теңәсерлі күшке келтірілген болар еді де, тағы да тепе-теңдік болмас еді. Ендеше екі вектордың екеуі де бірдей

$$\bar{R}^* = 0, \bar{M}_0 = 0, \quad (1.5.3.2)$$

болулары жүйенің тепе-теңдікте болуы үшін қажет және жеткілікті.

(1.5.3.1) теңдеулердегі \bar{R}^* бас вектордың және \bar{M}_0 бас моменттің жүйедегі күштер арқылы берілген өрнектерін алсақ, онда ол теңдеулер мынадай түрге келеді

$$\sum \bar{F}_k = 0, \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.5.3.3)$$

(1.5.3.1) векторлық теңдеулері алты скалярлық теңдеулерге эквивалент болады

$$R_x^* = 0, R_y^* = 0, R_z^* = 0, M_{0x} = 0, M_{0y} = 0, M_{0z} = 0. \quad (1.5.3.4)$$

Немесе (1.5.3.4) теңдеулерін берілген күштердің координаттар өстеріндегі проекциялары және олардың координаттар өстеріне қатысты моменттері арқылы жазайық

$$\sum F_{kx} = 0, \sum M_x(\bar{F}_k) = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \sum M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad (1.5.3.5)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \sum M_z(\bar{F}_k) = 0.$$

(1.5.3.5) тепе-теңдік шарттарын сөзбен былай айтамыз. *Күштердің кез келген жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, жүйедегі барлық күштердің әрбір координаттар өстеріндегі проекцияларының қосындылары нөлге тең болулары және барлық күштердің әрбір координаттар өстеріне қатысты алынған*

моменттерінің қосындылары нөлге тең болулары қажет және жеткілікті.

Бір нүктеде жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары. Жүйедегі күштерді келтіру центрі ретінде O нүктесін алсақ, онда $\bar{M}_0 = 0$ тепе-теңдік түрде нөлге айналады. Олай болса (1.5.3.5) теңдеулер жүйелеріндегі теңдеулердің екінші тобы тепе-теңдікке айналады да, олардың тек бірінші тобы қалады

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0 = 0, \sum F_{kz} = 0. \quad (1.5.3.6)$$

Параллель күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдік шарттары. Координаттық өстердің бірін, мысалы Oz -ті, күштерге параллель етіп алайық. Онда жүйедегі әрбір күштің Ox және Oy өстердегі проекциялары нөлге тең болады. (1.5.3.5) теңдеулердің алғашқы екеуі және алтыншысы тепе-теңдік түрінде нөлге айналады. Сонда параллель күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдігінің шарттары үш скалярлық теңдеулермен беріледі

$$\sum F_{kz} = 0, \sum M_x(\bar{F}_k) = 0, \sum M_y(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.7)$$

Параллель күштердің кеңістік жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, күштерге параллель өстегі олардың проекцияларының қосындысы және күштерге перпендикуляр жазықтықта жататын екі координаттық өстерінің әрқайсысына қатысты алынған олардың моменттерінің алгебралық қосындылары нөлге тең болулары қажет және жеткілікті.

Күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттары. Күштердің жазық жүйесі $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ берілген жағдайда тепе-теңдік шарттары мына түрде алынады

$$\bar{R}^* = 0, \bar{M}_O = \sum M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.8)$$

Мұндағы, O күштер жатқан жазықтықтың кез келген бір нүктесі. (1.5.3.8)-дегі екі теңдеу күштердің кез келген жазық жүйесінің векторлық тепе-теңдік теңдеулерін өрнектейді. Осы теңдеулерден жазық жүйенің скаляр теңдеулермен берілетін тепе-теңдік шарттарын алуға болады. Олар әр түрлі теңдеулер арқылы өрнектеледі.

а) Күштердің жазық жүйесінің екі проекциялық және бір моменттік теңдеулер түріндегі тепе-теңдік шарттары. Жазық жүйенің күштері жатқан жазықтықты Ox деп белгілейміз. Онда

жүйедегі күштер мен бас вектордың проекцияларын $F_{kx}, F_{ky}, R_x^*, R_y^*$, ($k = \overline{1, n}$) белгілеуге болады. \bar{M}_O векторы Oz өсіне параллель, оның бірақ құраушысы болады.

Сонымен, (1.5.3.8)-дегі векторлық екі теңдеуден үш скаляр теңдеу аламыз

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.9)$$

(1.5.3.9) теңдіктері күштердің жазық жүйесінің скаляр түрдегі тепе-теңдік теңдеулерін өрнектейді. Олар былай айтылады: *күштердің кез келген жазық жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін жүйедегі барлық күштердің екі координаттар өстерінің әрқайсысындағы проекцияларының қосындылары және күштер жазықтығындағы кез келген бір нүктеге қатысты алынған күштердің моменттерінің қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті.*

Күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттарын (1.5.3.9)-дан баска түрдегі теңдеулер арқылы беруге болады.

б) Күштердің кез келген жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттарының үш моменттік түрі. *Күштердің кез келген жазық жүйесінің тепе-теңдікте болуы үшін, ондағы барлық күштердің бір түзу бойында жатпайтын қандайда үш нүктенің әрқайсысына қатысты алынған моменттерінің қосындылары нөлге тең болулары қажет және жеткілікті*

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \sum M_C(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.10)$$

в) Күштердің кез келген жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттарының екі моменттік түрі. *Күштердің кез келген жазық жүйесі тепе-теңдікте болу үшін кез келген екі A және B центрлеріне қатысты күштер моменттерінің қосындылары мен AB түзуіне перпендикуляр болып келген қандай да болмасын бір өстегі осы күштердің проекцияларының қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті*

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \sum M_B(\bar{F}_k) = 0, \sum F_{kz} = 0. \quad (1.5.3.11)$$

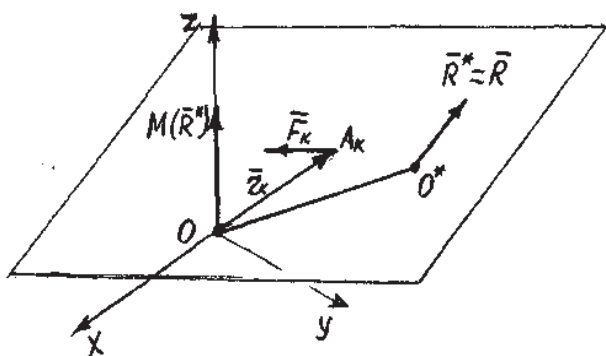
г) Параллель күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттары. *Параллель күштердің жазық жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін, күштерге параллель өстегі олардың проекцияларының*

қосындысы мен осы күштердің кез келген бір центрге қатысты алынған моменттерінің қосындысы нөлге тең болулары қажет және жеткілікті

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_O(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.12)$$

Параллель күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдік шарттарын басқа түрде жазуға болады. (1.5.3.11) теңдеулеріне сәйкес оны былай жазамыз

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.5.3.13)$$



1.5.4-сурет

Мұндағы, A және B нүктелері күштерге параллель түзудің бойында жатпаулары керек.

д) **Күштердің кеңістік жүйесі үшін Вариньон теоремасы.** Күштердің кез келген жүйесінің тең әсер етуші күшінің кез келген бір нүктеге қатысты моменті жүйедегі барлық күштердің сол нүктеге қатысты моменттерінің

геометриялық қосындысына тең.

Қатты дененің (A_1, A_2, \dots, A_n) нүктелеріне түскен күштердің кеңістік жүйесі $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ берілсін. Күштерді (A_1, A_2, \dots, A_n) түсу нүктелерінен қандайда бір O^* центріне параллель көшірудің нәтижесінде жүйе осы центрдегі бір \bar{R} күшке келтірілсін (1.5.4-сурет)

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}. \quad (1.5.3.14)$$

\bar{R} берілген $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ күштер жүйесінің O^* центріне түсірілген тең әсерлі күшінің кеңістіктің кез келген бір нүктесі O -ға қатысты моментін есептейік. Сол мақсатпен мынадай екі есептеу жүргіземіз. Біріншіден, тең әсер етуші \bar{R} күшін O^* центрінен O жаңа центрге параллель көшірейік. Сонда негізгі лемма бойынша алатынымыз

$$(\bar{R}) \sim (\bar{R}', (\bar{R}, -\bar{R}')). \quad (1.5.3.15)$$

Мұндағы, $(\bar{R}, -\bar{R}')$ қос күштің моменті теңәсерлі \bar{R} күшінің O нүктесіне қатысты моментіне тең

$$\bar{M}(\bar{R}, -\bar{R}') = \bar{M}_O(\bar{R}). \quad (1.5.3.16)$$

(1.5.3.16) өрнегі арқылы (1.5.3.15)-ті мына түрде қайталап жазайық

$$(\bar{R}) \sim (\bar{R}', \bar{M}_O(\bar{R})). \quad (1.5.3.17)$$

Екіншіден, жүйедегі күштерді жаңа центр O -ға параллель көшірейік. Пуансо теоремасы бойынша берілген күштер жүйесі O центріндегі \bar{R} қорытқы күшке және моменті O центріне қатысты бас момент \bar{M}_O -ге тең болатын қос күшке келтіріледі

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{R}', \bar{M}_O). \quad (1.5.3.18)$$

Мұндағы, \bar{M}_O векторы мына формуламен есептеледі

$$\bar{M}_O = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k. \quad (1.5.3.19)$$

Енді (1.5.3.19)-теңдігіне сүйене отырып, (1.5.3.16) және (1.5.3.17) өрнектерін салыстырайық. Екі өрнектің сол жақтары бір-біріне эквивалент, онда олардың оң жақтары да эквивалент болады

$$(\bar{R}) \sim (\bar{R}', \bar{M}_O(\bar{R})) \sim (\bar{R}, \bar{M}_O). \quad (1.5.3.20)$$

Осыдан

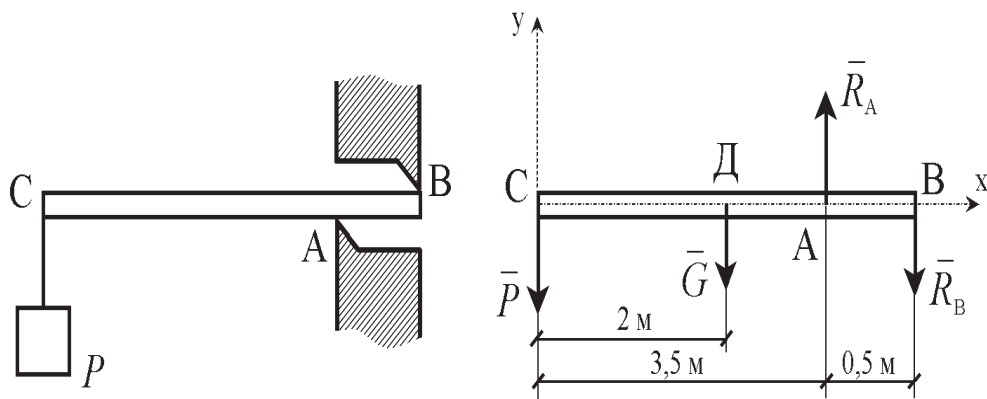
$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \bar{M}_O. \quad (1.5.3.21)$$

(1.5.3.19) теңдігі негізінде (1.5.3.20) теңдігін мына түрде жазамыз

$$\bar{M}_O(\bar{R}) = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k. \quad (1.5.3.22)$$

(1.5.3.22) теңдігі Вариньон теоремасын дәлелдейді.

1-мысал. Ұзындығы 4 м және салмағы $0,5$ Н біртекті арқалық қалыңдығы $0,5$ м қабырғаға A және B нүктелерінде тірелетіндей болып енгізіліп қойылған. Арқалықтың C шетіне салмағы $P=4$ Н жүк ілінген. A және B нүктелеріндегі реакция күштерін табу керек (1.5.5-сурет).



1.5.5-сурет

Шешуі: CB арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Оған әсер етуші белсенді \bar{P} , \bar{G} күштер векторларын суретте көрсетеміз. CB арқалығын байланыстардан босатамыз. A және B тіректерінің \bar{R}_A және \bar{R}_B реакция күштері арқалыққа перпендикуляр бағытталады.

Түсірілген күштер өзара параллель және бір жазықтықта орналасады, жазық параллель күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін 2 теңдеуді құрамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -P - G + R_A - R_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad P \cdot 3,5 + G \cdot 1,5 - R_B \cdot 0,5 = 0.$$

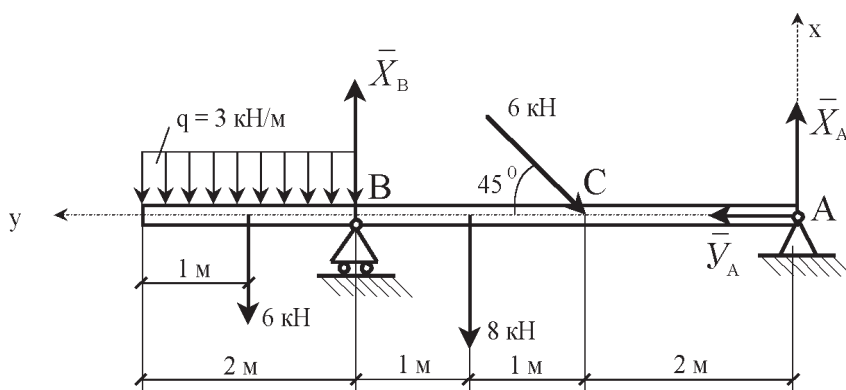
Осыдан белгісіз күштерді табамыз

$$R_B = 7 \cdot P + 3 \cdot G = 29,5H, \quad R_A = R_B + P + G = 34H.$$

Табылған шешімнің дұрыстығын тексеру үшін қосымша тепе-теңдік теңдеу құрамыз, мысалы, C нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = R_A \cdot 3,5 - G \cdot 2 - R_B \cdot 4 = 34 \cdot 3,5 - 0,5 \cdot 2 - 29,5 \cdot 4 = 0.$$

2-мысал. Екі қадалған күш пен бірқалыпты таралған күштердің әсеріндегі арқалықтың A және B тіректерінің реакция күштерін табу керек. Бірқалыпты таралған күштердің қарқындылығы, түсірілген күштердің шамалары және өлшем бірліктері суретте көрсетілген (1.5.6-сурет).



1.5.6-сурет

Шешуі: AB арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Арқалыққа түсірілген белсенді қадалған күштер: 6 кН , 8 кН . Бірқалыпты q қарқындылығымен таралған күштерді тең әсерлі күшке ауыстырамыз, оның шамасы $q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}$ және оны таралған аралық ортасында түсіреміз. Арқалықты байланыстардан босатамыз. Ол үшін A және B топсаларын ойша алып тастап, олардың орнына \bar{X}_A , \bar{Y}_A және \bar{X}_B реакция күштерін түсіреміз.

Алынған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін үш теңдеу жүйесін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad 6 \cdot 5 - X_B \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A - 8 + X_B - 6 - 6 \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad -6 \cdot \cos 45^\circ + Y_A = 0.$$

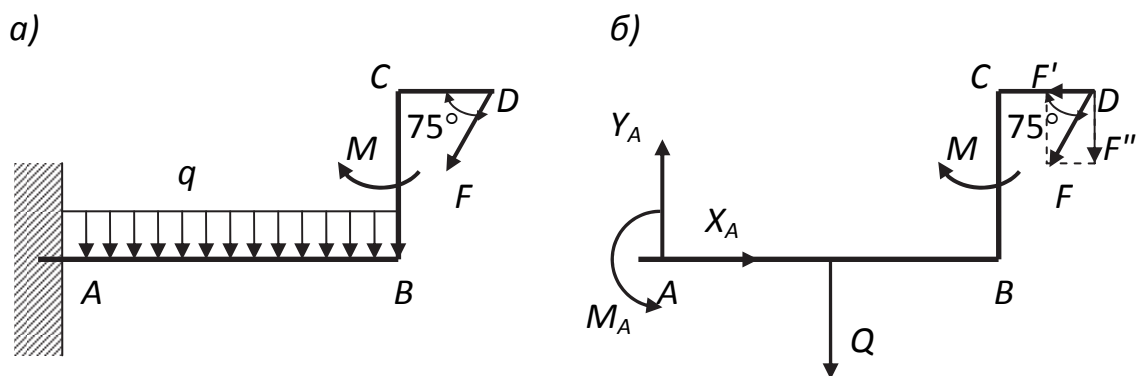
Бұл құрылған үш теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз

$$X_A = 2,6 \text{ кН}, \quad Y_A = 4,2 \text{ кН}, \quad X_B = 15,6 \text{ кН}.$$

Шешімнің дұрыстығын қосымша теңдеу жазып тексеруге болады, мысалы, C нүктесіне қатысты моменттер теңдеуі арқылы

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 6 \cdot 3 - X_B \cdot 2 + 8 \cdot 1 + X_A \cdot 2 = 18 - 15,6 \cdot 2 + 8 + 2,6 \cdot 2 = 0.$$

3-мысал. Сынық сырықтың бір шеті 1.5.7,*a*-суретте көрсетілгендей қатты бекітілген. $F=10 \text{ кН}$, $q=5 \text{ кН/м}$, $M=15 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $AB=4 \text{ м}$, $BC=2 \text{ м}$, $CD=1 \text{ м}$ болғанда қатты бекітпенің реакцияларын анықтау керек.



1.5.7 -сурет

Шешуі: Сынық сырықтың тепе-теңдігін қарастырамыз, оған түсірілген белсенді күштер: қадалған F күші, M моментімен қос күш және q қарқындылығымен бірқалыпты таралған күштер. Таралған күштерді тең әсерлі күшке ауыстырамыз, оның шамасы $Q=q \cdot AB=20$ кН және ол AB аралық ортасында түсіріледі. A қатты бекітпесінің реакцияларын 1.5.7,б–суретте көрсетілгендей түсіреміз: реакция күшінің \bar{X}_A, \bar{Y}_A құраушыларын және қатты бекітпенің M_A моментін.

Алынған жазық күштер жүйесі үшін 3 тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\sum F_{kx} = 0; X_A - F \cdot \cos 75^\circ = 0; X_A = F \cdot \cos 75^\circ = 2,59 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - Q - F \cdot \cos 15^\circ = 0; Y_A = Q + F \cdot \cos 15^\circ = 29,7 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A(F_k) = 0;$$

$$M_A - Q \cdot \frac{AB}{2} - M - F \cdot \cos 15^\circ \cdot (AB + CD) + F \cdot \cos 75^\circ \cdot BC = 0.$$

$$M_A = Q \cdot \frac{AB}{2} + M + F \cdot \cos 15^\circ \cdot (AB + CD) - F \cdot \cos 75^\circ \cdot BC = 98,1 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

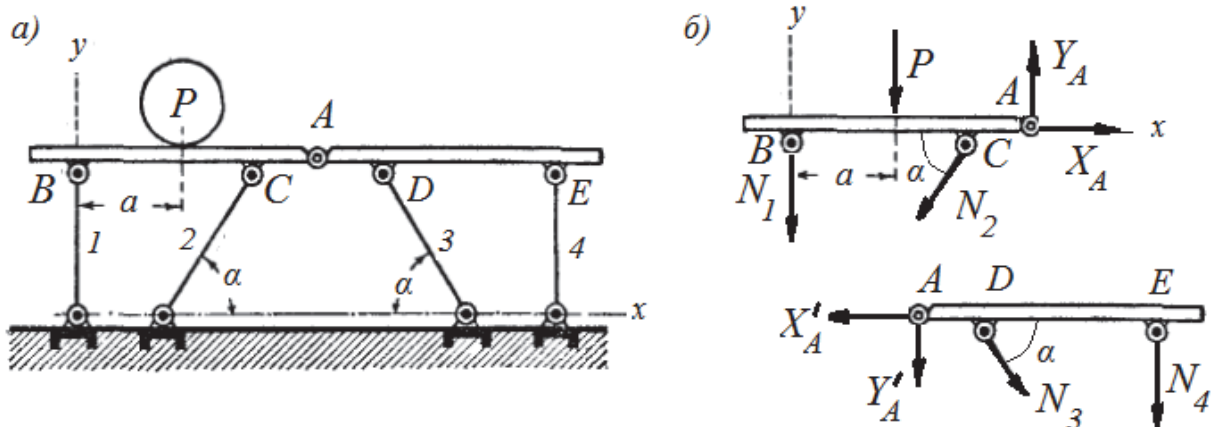
Есеп дұрыстығын тексеру үшін, қосымша тепе-теңдік теңдеуін құрамыз

$$\begin{aligned} \sum M_D(F_k) &= 0; M_A + X_A \cdot BC - Y_A \cdot (AB + CD) - M + Q \cdot \left(\frac{AB}{2} + CD \right) = \\ &= 98,1 + 2,58 \cdot 2 - 29,7 \cdot 5 - 15 + 20 \cdot 3 = 163,3 - 163,5 = -0,2 \approx 0. \end{aligned}$$

Сонымен қатты бекітпенің табылған реакциялары

$$X_A = 2,59 \text{ кН}, Y_A = 29,7 \text{ кН}, M_A = 98,1 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4-мысал. Көпір A топсамен біріктірілген екі бірдей арқалықтан құрылған және табанға төрт сырық көмегімен бекітіліп тұр (1.5.8,а-сурет). $\alpha=60^\circ$, $AB=8$ м, $BC=6$ м, $a=4$ м, $P=15$ кН болғанда көпірдің сыртқы және ішкі байланыстарының реакцияларын табу керек.



1.5.8-сурет

Шешуі: Көпірді екі бөлікке жіктеп, әр бөлігінің тепе-теңдігін қарастырамыз (1.5.8,б-сурет). Сырықтарды созылу әсерінде деп болжамдап, реакцияларын сырықтар бойымен арқылықтан тыс бағыттаймыз. A топсасының реакциясын екі күшке жіктейміз, сонда әсер мен кері әсер теңдігі аксиомасы бойынша сәйкес күштердің модульдері тең: $X'_A = X_A$, $X'_A = Y_A$, ал бағыттары қарама қарсы. Әр арқалық үшін 3 тепе-теңдік теңдеу құруға болады, оларға 6 белгісіз кіреді, яғни есеп статикалық түрде анықталады.

AB арқалығы үшін тепе-теңдік теңдеулер

$$\sum F_{kx} = 0; X_A - N_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - N_1 - N_2 \sin \alpha - P = 0,$$

$$\sum M_B(F_k) = 0; -P \cdot a - N_2 \sin \alpha \cdot BC + Y_A \cdot AB = 0.$$

AE арқалығы үшін тепе-теңдік теңдеулер

$$\sum F_{kx} = 0; -X_A + N_3 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; -Y_A - N_3 \sin \alpha - N_4 = 0,$$

$$\sum M_E(F_k) = 0; N_3 \sin \alpha \cdot DE + Y_A \cdot AE = 0.$$

Алынған теңдеулер жүйесін Mathcad бағдарламасында 1.5.9-суретте көрсетілгендей шешуге болады.

Есеп шешімі дұрыстығын тексеру үшін көпірге түсірілген барлық күштердің y осіне проекциялар теңдеуін құрамыз

$$\sum F_{ky} = -P - N_1 - N_2 \sin \alpha - N_4 - N_3 \sin \alpha.$$

1.5.9-суретте көсетілгендей, тексеру шарты орындалып тұр.

Сонымен сыртқы байланыстардың реакциялары $N_1 = -6,25кН$, $N_2 = -5,77кН$, $N_3 = -5,77кН$, $N_4 = 1,25кН$, ішкі байланыс реакциясының құраушылары $X_A = -2,89кН$, $Y_A = 3,77кН$.

```

P := 15      α := 60·deg      a := 4      BC := 6      AB := 8      DE := BC      AE := AB

N1
N2
N3
N4
XA
YA
:=
( 0
  0
  0
  0
  0
  0 )

Given

XA - N2·cos(α) = 0                    -XA + N3·cos(α) = 0
YA - N1 - N2·sin(α) - P = 0          -YA - N3·sin(α) - N4 = 0
-P·a - N2·sin(α)·BC + YA·AB = 0      YA·AE + N3·sin(α)·DE = 0

( N1
  N2
  N3
  N4
  XA
  YA ) := Find ( ( N1
                  N2
                  N3
                  N4
                  XA
                  YA ) )

( N1
  N2
  N3
  N4
  XA
  YA ) = ( -6.25
            -5.774
            -5.774
             1.25
            -2.887
             3.75 )

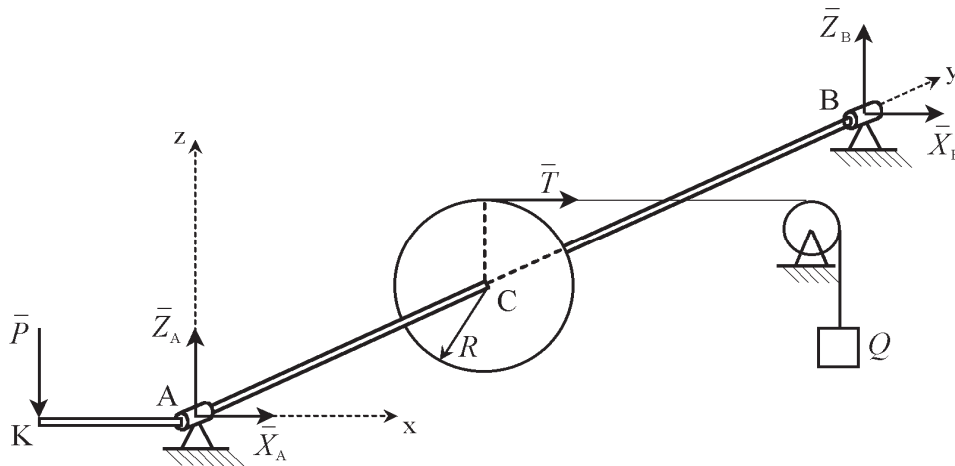
TFKCFPV
ИГОБЕРКА
SY := -N1 - N2·sin(α) - P - N3·sin(α) - N4      SY = -5.107 × 10-15

```

1.5.9-сурет

5-мысал. 1.5.10-суретте сұлбасы бейнеленгендей, $Q = 800 Н$ жүкті жұмысшы \bar{P} күшін түсіріп шығырдың көмегімен ұстап тұр; дөңгелектің радиусы $R=5 см$, саптың ұзындығы $AK=40 см$, $AC=CB=50 см$. Сап көлденең болғандағы, сапқа түсірілген вертикаль

\bar{P} күшін және A, B тіректердің білік өсіне түсіретін қысым күштерін табу керек.



1.5.10-сурет

Шешуі: Белгісіз күштерді табу үшін шығырдың тепе-теңдігін қарастырамыз. Шығырға түсірілген күштер: шамасы Q -ге тең арқанның тартылыс күші \bar{T} , актив күш \bar{P} және цилиндрлік топсалардың реакция күштері $\bar{X}_A, \bar{Z}_A, \bar{X}_B, \bar{Z}_B$.

Күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулер жүйесін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad T + X_A + X_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad -P + Z_A + Z_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cdot AK + T \cdot R = 0,$$

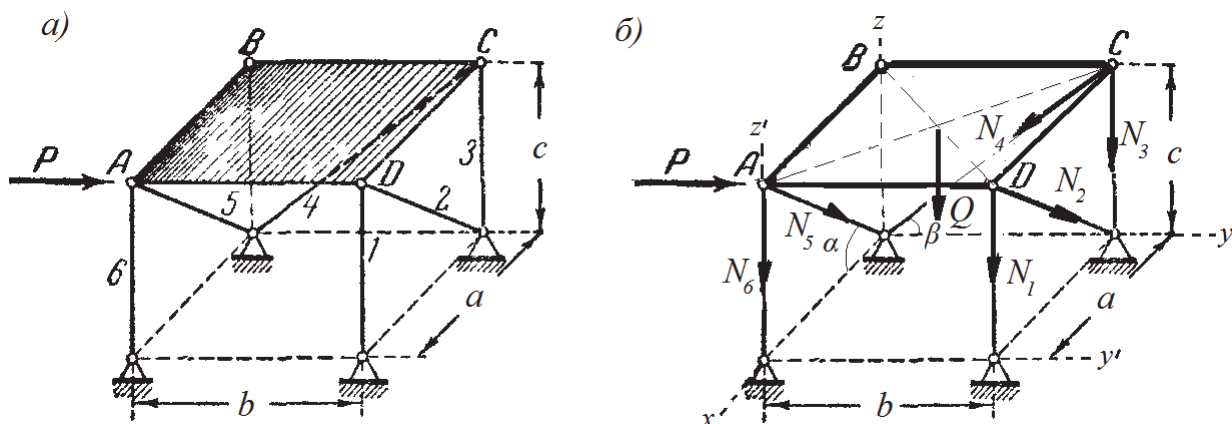
$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad -T \cdot AC - X_B \cdot AB = 0.$$

Құрылған теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $P = 100 \text{ H}, X_A = 400 \text{ H}, Z_A = -100 \text{ H}, X_B = -400 \text{ H}, Z_B = 0$.

6-мысал. Салмағы $Q=10 \text{ кН}$ тақтаны ұстап тұрған сырықтардың реакцияларын горизонталь $P=6 \text{ кН}$ күші әсерінен анықтау керек (1.5.11,а-сурет). Өлшемдер: $a=4 \text{ м}$, $b=3 \text{ м}$, $c=2,5 \text{ м}$.

Шешуі: тақтаның тепе-теңдігін қарастырамыз, оған берілген күштер мен сырықтардың реакцияларын көрсетеміз (1.5.11,б-сурет). Бұрыштар үшін:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \sin \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$



1.5.11-сурет

$P = 6 \quad Q = 10$ $a = 4 \quad b = 3 \quad c = 2.5$	$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Given	
$-N5 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0 \quad P - N4 \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$	
$-Q - N1 - N6 - N5 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N2 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} - N3 - N4 \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0$	
$-P \cdot c - Q \cdot \frac{b}{2} - N1 \cdot b - N2 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b - N3 \cdot b = 0 \quad N1 \cdot a + N6 \cdot a + Q \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad P \cdot a + N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b = 0$	
$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix} = \text{Find} \begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \\ N4 \\ N5 \\ N6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9.434 \\ -10 \\ 7.81 \\ 9.434 \\ -10 \end{pmatrix}$
$M_y := -Q \cdot \frac{a}{2} - N3 \cdot a - N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot c - N5 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot c - N4 \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot a$	
$M_y = 2.132 \times 10^{-14}$	
$M_z := N4 \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot a + N2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \cdot b \quad M_z = 0$	

1.5.12-сурет

Тақтаға түсірілген күштер кеңістіктік күштер жүйесін құрайды, оған 6 тепе-теңдік теңдеу жазамыз. Шешім дұрыстығын тексеру үшін

y' және z' өстеріне қатысты моменттер тендеулерін құруға болады. 1.5.12-суретте есепті Mathcad бағдарламасында шешуі және тексеру тендеулері орындалатыны көрсетілген.

1.6 Үйкеліс

1.6.1 Сырғанау үйкелісінің заңдары

1. Жылжытушы күш өскен сайын үйкеліс күші \bar{F} -тің сан шамасы бастапқы уақыт t_0 -ден дене қозғалысқа келе бастағанға дейінгі уақыт аралығында арта түседі. Үйкеліс күшінің өсуі дененің тыныштық күйінен шығып, енді ғана жылжи бастайын деген сәтке дейін жүреді. Осы сәтке сәйкес келетін үйкеліс күшінің мәні ең үлкен шамаға жетеді. Сондықтан оны \bar{F} деп белгілейді. Сонымен тыныштық кезіндегі үйкеліс күші \bar{F} -тің модулі (тыныштық үйкелісі) нөлден бастап \bar{F}_{max} дейін өседі, яғни

$$0 \leq F \leq F_{max} \quad (1.6.1.1)$$

Тыныштықтағы сырғанау үйкеліс күшінің максимальды мәні нормальдық қысымға (нормальдық реакцияға) пропорционал болады

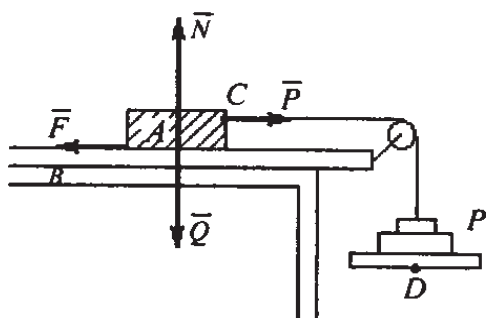
$$F_{max} = f_0 N \quad (1.6.1.2)$$

Сырғанау үйкелісінің коэффициенті f_0 , үйкелісетін беттердің материалына және олардың қазіргі физикалық күйіне (кедір-бұдырлығына, ылғалдылығына, температурасына т.б.) тәуелді болады. Оның сандық мәні тәжірибе жасаумен анықталады (1.6.1-сурет).

2. A денесі B денесінің бетімен қозғалған кезде сырғанау үйкелісі пайда болады. Оны сырғанаудың қозғалыстық немесе динамикалық үйкелісі деп атайды. Ол күштің шамасы нормаль қысымға тура пропорционал болады, яғни

$$F = fN. \quad (1.6.1.3)$$

Мұндағы, f сырғанау үйкелісінің динамикалық коэффициенті. Ол да статикалық коэффициент f_0 сияқты үйкелісетін денелердің материалдарына және олардың беттерінің өңделу дәрежесіне, температурасына, майлануына тәуелді болып келеді. Сонымен қатар, ол дененің

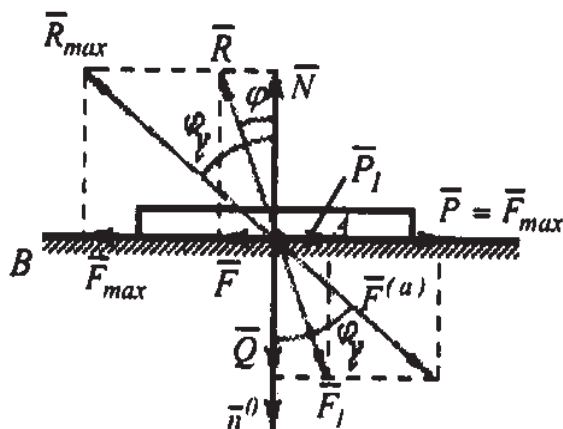


1.6.1-сурет

салыстырмалы жылдамдығына да тәуелді. Салыстыр-малы жылдамдықтың өсуіне байланысты f коэффициенті басында біраз кемиді де кейіннен әр уақытта да кіші болады, яғни $f < f_0$.

1.6.2 Үйкеліс бұрышы. Үйкеліс конусы

Салмағы Q -ға тең A денесі, беті тегіс емес горизонталь B жазықтығында жатыр дейік (1.6.2-сурет).



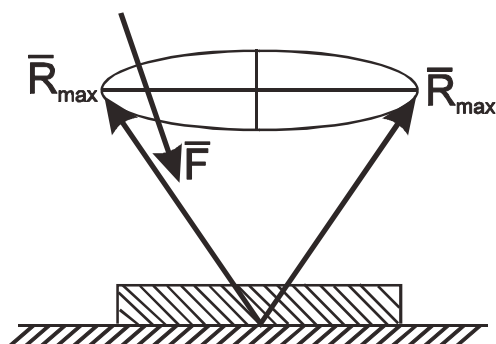
1.6.2-сурет

Егер A денесіне горизонталь \bar{P}_1 күші әсер ете бастаса, онда оған \bar{F} үйкеліс күші де әсер ете бастайды. Жылтыр емес горизонталь B жазықтықтың берілген A денесіне түсіретін \bar{R} толық реакциясы нормаль \bar{N} -нің бойымен бағытталмай, онымен бір φ бұрыш жасай бағытталады. \bar{P}_1 горизонталь күшті әрі қарай өсіре берейік. Онда \bar{F} үйкеліс күші де өсе береді. Үйкеліс күші өзінің максимум мәніне (\bar{F}_{max}) жеткенше

\bar{P}_1 күшін осылайша \bar{F}_{max} -ға дейін өсіреміз. Бұл кезде толық реакция \bar{R} де өзінің максимум мәніне (\bar{R}_{max}) дейін өседі. Оның жазықтыққа түсірілген нормальмен жасайтын φ бұрышы да φ_γ -ға дейін өседі

$$\operatorname{tg} \varphi_\gamma = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{f_0 N}{N} = f_0, \quad \operatorname{tg} \varphi_\gamma = f_0. \quad (1.6.2.1)$$

Сонымен, үйкеліс бұрышы φ_γ деп, оның тангенсі статикалық



1.6.3-сурет

үйкеліс коэффициентіне тең болатын, яғни максимум толық реакция (\bar{R}_{max}) мен жанасушы беттерге түсірілген ортақ нормаль арасындағы бұрышты айтады.

Берілген A денесі жазықтық бетімен кез келген бағытта да жылжи алады дейік. Онда жанасу жазықтығы B -ның бетінде, берілген A денесін әр түрлі бағытта қозғалтқан сайын, \bar{n}^0

нормальдан максимум бұрышқа (φ_γ) ауытқыған әр түрлі (\bar{R}_{max}) толық реакциялар алар едік.

Осы \bar{R}_{max} мәні толық реакциялардың геометриялық орны төбесі денелердің түйісу нүктесінде жататын конустық бетті береді (1.6.3-сурет).

1.6.3 Домалау үйкелісі

Домалау үйкелісі деп бір дененің екінші бір дене бетімен домалаған кезде пайда болатын кедергіні айтады. Бізге салмағы \bar{P} -ға радиусы \bar{r} -ге тең цилиндрлі каток берілсін дейік. Ол, жылтыр емес горизонталь, жазықтықта орналасып онымен алғашында A нүктесінде жанассын дейік. Әдетте катокқа салмақ күші \bar{P} мен бірге горизонталь жазықтық катокке жасалған байланыс ретінде қаралады.

Жазықтық реакция күші екі құраушыдан тұрады. Оның бірі \bar{N} нормаль қысым болса, екіншісі үйкеліс күші \bar{F} . Салмақ әсерінен тіреуші бет деформацияланады да \bar{N} және \bar{F} реакция күштерінің түсу нүктесі бастапқы A нүктесінен A' – нүктесіне көшеді (1.6.4-сурет). A нүктесі, \bar{Q} күші бағытталған жаққа қарай, бастапқы орнынан d қашықтыққа жылжиды да A' орнына келеді. Каток осы кезде тепе- теңдікте болсын делік. Катокке әсер етіп тұрған күштер жүйесінің тепе-теңдігінің шарттарын жазайық

$$\sum F_{kx} = P - F = 0, \sum F_{ky} = N - Q = 0, M_A(\bar{F}_k) = Nd - Pr = 0. \quad (1.6.3.1)$$

Алғашқы екі теңдеуден

$$F = P, \quad N = Q \quad (1.6.3.2)$$

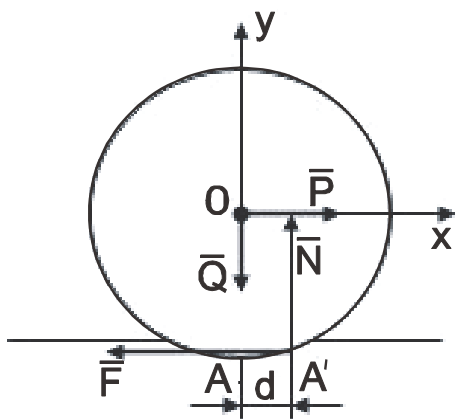
екенін анықтаймыз. Ал соңғы теңдеуден A және A' нүктелерінің ара қашықтығын табамыз

$$d = \frac{Pr}{N} = \frac{Pr}{Q}. \quad (1.6.3.3)$$

(1.6.3.1) теңдеулерінен үшіншісіндегі нормаль \bar{N} -нің A центріне қатысты алынған моментін домалау үйкелісінің моменті деп атайды, оны M_x арқылы белгілейді

$$M_x = M_0(\bar{N}) = Nd. \quad (1.6.3.4)$$

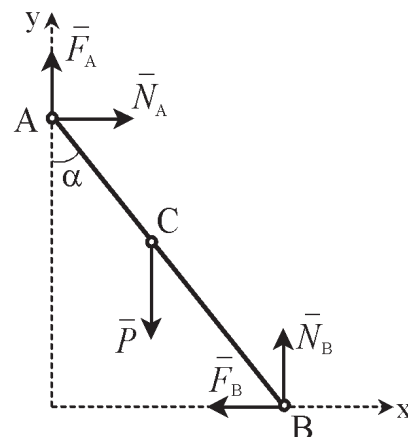
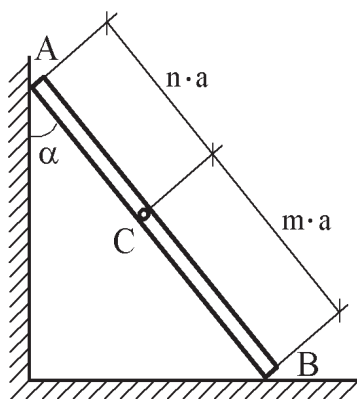
(1.6.3.4) формуласының \bar{Q} актив күшінің сан шамасы өсе түссе d қашықтығы да өсетінін көреміз.



1.6.4-сурет

Мысал. Саты AB вертикаль қабырғаға сүйеп қойылған (1.6.5-сурет). Саты мен қабырға және еденнің арасындағы үйкеліс коэффициенттері f_1 және f_2 . Сатының адаммен бірге салмақ күші \bar{P} , сатыны $m:n$ қатынасына бөлетін C нүктесіне түсірілген. Сатының тепе-теңдік жағдайында, саты мен қабырға арасындағы α бұрыштың ең үлкен мәнін, сонымен қатар қабырға және еденнің нормаль құраушы реакция күштерін табу керек.

Шешуі: Сатыға әсер етуші бір ғана актив күш бар. Ол сатының салмақ күші \bar{P} , оны суретте көрсетеміз. Сатыны байланыстардан босатамыз. Еден мен қабырғаның сатыға жасайтын әсерлерін \bar{N}_A , \bar{N}_B нормаль реакция күштерімен және \bar{F}_A , \bar{F}_B үйкеліс күштерімен ауыстырамыз. Үйкеліс күшінің шекті шамасында бұрыш α_{\max} болады, сондықтан $F_A = f_1 \cdot N_A$, $F_B = f_2 \cdot N_B$.



1.6.5-сурет

Күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad N_A - F_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad F_A - P + N_B = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0,$$

$$-P \cdot n \cdot \sin \alpha_{\max} + N_A \cdot (n + m) \cdot \sin \alpha_{\max} - F_A \cdot (n + m) \cdot \cos \alpha_{\max} = 0.$$

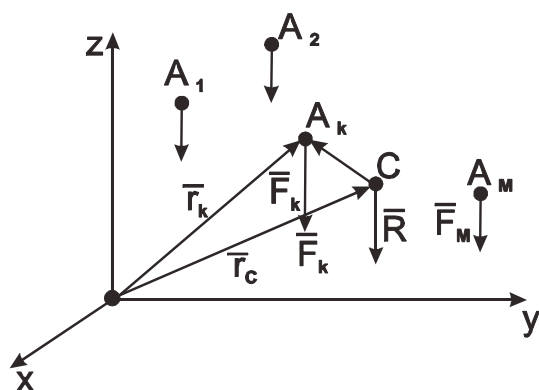
Құрылған теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді және α_{\max} табамыз

$$N_B = \frac{P}{1 + f_1 \cdot f_2}, \quad N_A = \frac{P \cdot f_2}{1 + f_1 \cdot f_2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{f_2(m + n)}{m - n \cdot f_1 \cdot f_2}.$$

1.7 Параллель күштер центрі және ауырлық центрі

1.7.1 Параллель күштер центрі

Бірыңғай бір жаққа бағытталған параллель күштер жүйесінің тең әсерлі күші нөлге тең емес және ол жүйедегі күштерге параллель бағытталып, C нүктесі арқылы өтеді. Осы C нүктесінің O центріне қатысты радиус-вектор \vec{r}_C -ны және x_C, y_C, z_C координаттарын табу



1.7.1-сурет

керек (1.7.1 сурет). Берілген күштер жүйесіне Вариньон теоремасын пайдаланамыз. Бұл теорема бойынша

$$\vec{M}_C(\vec{R}) = \sum \vec{M}_C(\vec{F}_k). \quad (1.7.1.1)$$

Бұл теңдікті 1.7.1-сурет көмегімен құрамыз

$$\vec{M}_C(\vec{R}) = 0. \quad (1.7.1.2)$$

Енді (1.7.1.1)-теңдіктің оң жағындағы векторды есептейік

$$\sum \vec{M}_C(\vec{F}_k) = \sum \overline{CA_k} \times \vec{F}_k. \quad (1.7.1.3)$$

Суреттен

$$\vec{F}_k = -\vec{k} \cdot F_k, \quad \overline{CA_k} = \vec{r}_k - \vec{r}_C. \quad (1.7.1.4)$$

(1.7.1.4) теңдіктер көмегімен (1.7.1.3) –теңдікті мына түрге келтіреміз

$$\sum \vec{M}_C(\vec{F}_k) = \sum F_k \vec{r}_k \times (-\vec{k}) - \vec{r}_C \times (-\vec{k}) \sum F_k = -[\sum F_k \vec{r}_k - \vec{r}_C \sum F_k] \times \vec{k}. \quad (1.7.1.5)$$

(1.7.1.2) және (1.7.1.5) теңдіктерді (1.7.1.1) теңдіктегі орындарына қойып, одан бізге қажет теңдікті аламыз

$$[\sum F_k \vec{r}_k - \vec{r}_C \sum F_k] \times \vec{k} = 0 \text{ немесе } \sum F_k \vec{r}_k - \vec{r}_C \sum F_k = 0. \quad (1.7.1.6)$$

(1.7.1.6)-теңдіктен O -ға қатысты радиус-векторы \vec{r}_C анықталады

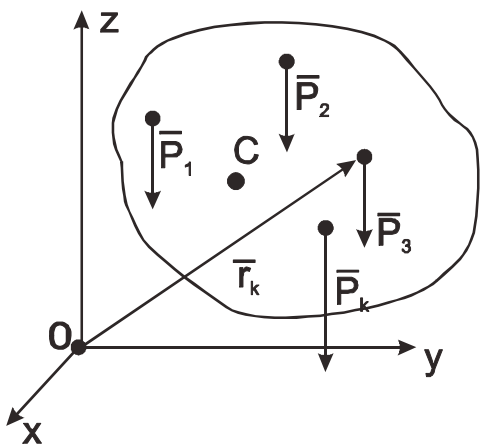
$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{\sum F_k}. \quad (1.7.1.7)$$

(1.7.1.7)–векторлық теңдіктің екі жағын координаттық өстерге проекциялай отырып, x_C, y_C, z_C шамаларын өрнектейтін формулаларды табамыз

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}, \quad y_C = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}, \quad z_C = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}. \quad (1.7.1.8)$$

1.7.2 Қатты дененің ауырлық центрі

Қатты дене n бөлшектерден тұрады дейік (1.7.2-сурет). Сонда, жердің центріне қарай бағытталған, бөлшектердің n ауырлық күштері $\bar{P}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ аламыз. Егер дененің өлшемдері жердің радиусына қарағанда әлдеқайда кіші шама болса, онда $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ күштерін өзара параллель бағытталған күштер деп алуға болады.



1.7.2-сурет

Дене бөлшектерінің ауырлық күштерінен тұратын $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ параллель күштер жүйесінің центрін дененің ауырлық центрі деп атаймыз.

Демек, қатты дененің ауырлық центрінің орны мына формуламен табылады

$$\bar{r} = \frac{\sum P_k \bar{r}_k}{\sum P_k}. \quad (1.7.2.1)$$

Дененің ауырлық центрі C -ның координаттарын x_C, y_C, z_C деп белгілесек, онда (1.7.2.1) векторлық

тендеуден мына формулаларды табамыз

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{\sum P}, \quad y_C = \frac{\sum P_k y_k}{\sum P}, \quad z_C = \frac{\sum P_k z_k}{\sum P}. \quad (1.7.2.2)$$

(1.7.2.2)-формулалар дененің ауырлық центрінің координаттарын береді.

Біртекті дене үшін оның бөлшектерінің ауырлық күштері меншікті салмақ γ және көлем арқылы табылады: $P_k = \gamma V_k$. Сонда біртекті дененің (яғни көлемнің) ауырлық центрінің координаталары (1.11.2) формуладан келесідей өрнектеледі

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k x_k}{\sum_{k=1}^n V_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k y_k}{\sum_{k=1}^n V_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n V_k z_k}{\sum_{k=1}^n V_k}. \quad (1.7.2.3)$$

Біртекті жұқа пластина үшін бөлшектердің көлемі бөлшек ауданы мен пластинаның h қалыңдығы арқылы анықталады: $V_k = S_k h$. Сонда біртекті жұқа пластинаның (немесе ауданның) ауырлық центрінің координаталары (1.7.2.3) формуладан келесідей өрнектеледі

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k z_k}{\sum_{k=1}^n S_k}. \quad (1.7.2.4)$$

Біртекті жіңішке сырық үшін бөлшектердің көлемі бөлшек ұзындығы мен сырық көлденең қимасының S ауданы арқылы анықталады

$$V_k = l_k S.$$

Сонда біртекті жіңішке сырықтың (немесе сызықтың) ауырлық центрінің координаталары (1.7.2.3) формуладан келесідей өрнектеледі

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{\sum_{k=1}^n l_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{\sum_{k=1}^n l_k}. \quad (1.7.2.5)$$

Ауырлық центр орнын анықтаудың келесі тәсілдері бар:

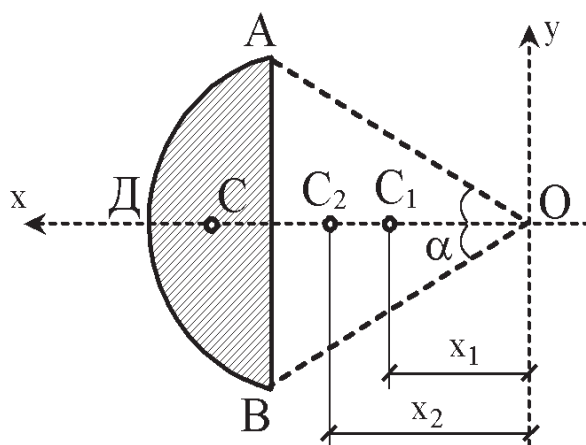
а) симметриялықты қолдану, яғни біртекті дененің симметриялық жазықтығы (симметриялық өсі немесе симметриялық центрі) болса, онда дененің ауырлық центрі сол жазықтықта (сол өсте немесе сол центрде) орналасады;

б) қарапайым денелерге жіктеу, яғни денені бөлшектерге емес, ауырлық центрлерінің орны белгілі қарапайым денелерге жіктеп, (1.7.2.2)-(1.7.2.5) формулаларында солардың ауырлық күштерін (көлемдерін, аудандарын немесе ұзындықтарын) және ауырлық центрлерінің координаталарын ескеру керек;

в) теріс массалар (көлемдер, аудандар) тәсілі, яғни денеде ойықтар мен тесіктер болса, олардың ауырлық күштері (көлемдері, аудандары) (1.7.2.2)-(1.7.2.5) формулаларында теріс таңбамен алынады.

Мысал. Радиусы $AO = 30$ см болатын ADB дөңгелек сегмент ауданының C ауырлық центрін табу керек. $\angle AOB = 60^\circ$ (1.7.3-сурет).

Шешуі: Ауырлық центрі DO симметрия осінің бойында



1.7.2-сурет

жатыр. Берілген сегмент ADB ауданын ойша $ADBO$ сектор ауданына дейін толықтырамыз. Сонда берілген аудан орнына сектор ауданы мен ауданы теріс таңбалы ΔADB шығады.

Координаттар өстерінің бас нүктесі ретінде O -ны аламыз да, өстерді суреттегідей бағыттаймыз. Есеп шартына сай топтау әдісінен шығатын өрнек, мынадай түрде жазылады

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2}.$$

Өрнектегі белгісіз шамалар:

S_1 – сектор ауданы;

S_2 – AOB үшбұрышының ауданы;

x_1 – сектор ауданының ауырлық центрінің абсциссасы;

x_2 – ABO үшбұрышы ауданының ауырлық центрінің абсциссасы.

Осыларды есептейік

$$S_1 = r^2 \cdot \alpha, \quad S_2 = r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad x_1 = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad x_2 = \frac{2}{3} r \cdot \cos \alpha.$$

Осы шамаларды негізгі өрнекке қойсақ алатынымыз

$$x_c = \frac{\frac{2}{3} r \cdot \sin \alpha - \frac{2}{3} r^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{r^2 \alpha - r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

$r = 30$ см және $\alpha = 30^\circ$ болғанда $x_c = 27,7$ см.

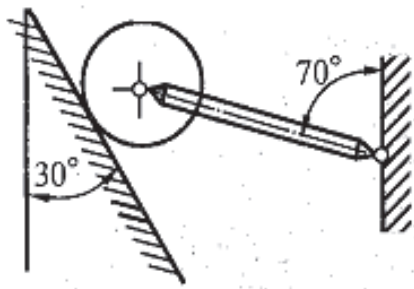
1.8 «Статика» бөлімі бойынша есептер

1.8.1-есеп. Салмағы 3 кН біртекті шардың тегіс бетке түсіретін қысымын және оны ұстап тұрған сырықтың реакциясын табу керек.

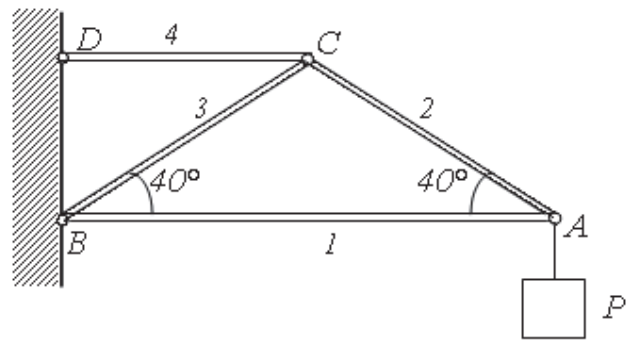
Жауабы: $3,68$ кН, $3,39$ кН (сырық сығылуда).

1.8.2-есеп. $ABCD$ тіреуіші төрт өзара қосылған сырықтан құрылған. A топсасына салмағы 8 кН жүк ілінген. Түйіндерді ойып алу тәсілін қолданып, барлық сырықтарға түсірілген күштерді анықтау керек.

Жауабы: $S_1 = 9,5$ кН (сығылуда), $S_2 = 12,4$ кН (созылуда), $S_3 = 12,4$ кН (сығылуда), $S_4 = 19$ кН (созылуда).



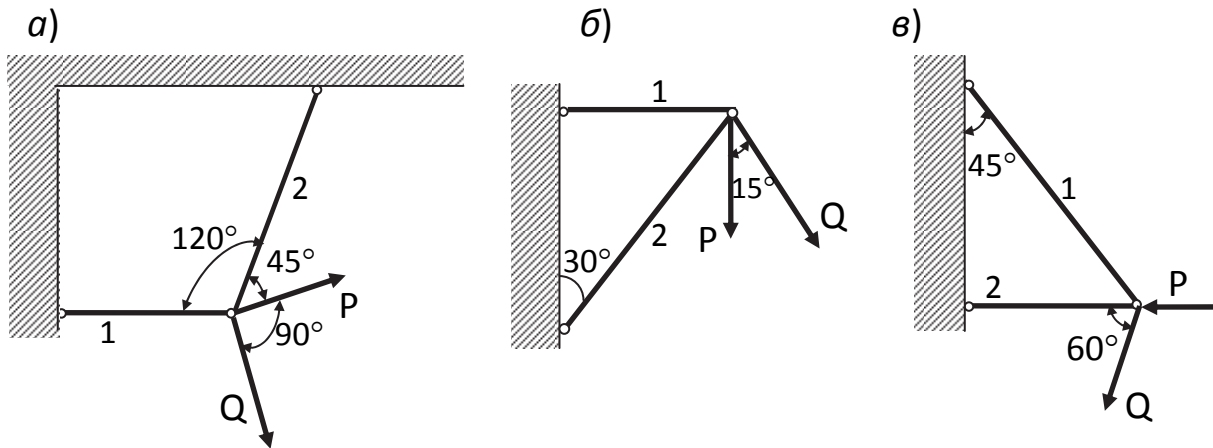
1.8.1-есепке сурет



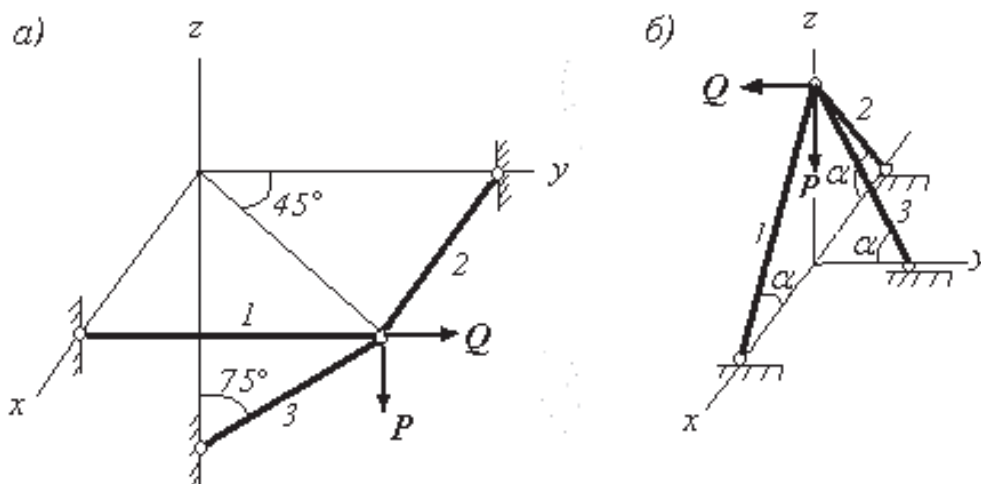
1.8.2-есепке сурет

1.8.3-есеп. Суретте көрсетілген құрылымдар сырықтарына түсірілген күштерді анықтау керек. Берілгені: $P=5$ кН, $Q=8$ кН.

- Жауабы:** а) $S_1 = 10,6$ кН, $N_2 = 7,43$ кН (екеуі де созылуда);
 б) $S_1 = 9,42$ кН (созылуда), $S_2 = 14,7$ кН (сығылуда);
 в) $S_1 = 9,8$ кН (созылуда), $S_2 = 15,9$ кН (сығылуда).



1.8.3-есепке сурет



1.8.4-есепке сурет

1.8.4-есеп. Кеңістік құрылымдар сырықтарына түсірілген күштерді анықтау керек. Берілгені: $P=4$ кН, $Q=6$ кН, $\alpha=60^\circ$.

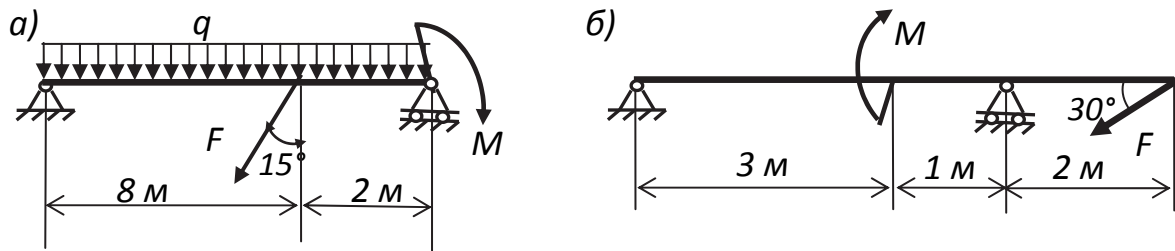
Жауабы: а) $S_1 = 16,5$ кН, $S_2 = 10,5$ кН (созылуда), $S_3 = 15,4$ кН (сығылуда).

б) $S_1 = S_2 = 8,3$ кН (сығылуда), $S_3 = 12$ кН (созылуда).

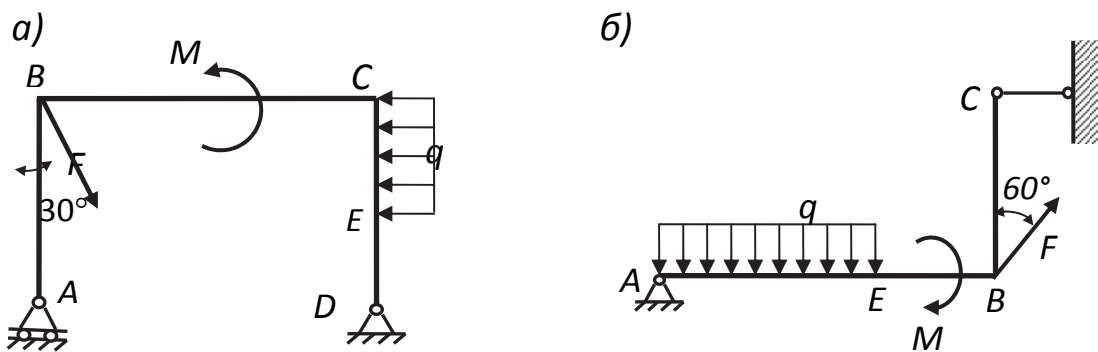
1.8.5-есеп. $M=8$ кН·м, $F=12$ кН, $q=4$ кН/м болғанда арқалық тіректерінің реакцияларын анықтау керек.

Жауабы: а) 3,1 кН, 21,5 кН, 30,1 кН;

б) 10,4 кН, -5 кН, 11 кН.



1.8.5-есепке сурет



1.8.6-есепке сурет

1.8.6-есеп. Құрылымдар байланыстарының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=15$ кН·м, $F=20$ кН, $q=4$ кН/м, $AB=CD=3$ м, $BC=4$ м, $CE=2$ м;

б) $M=9$ кН·м, $F=12$ кН, $q=2$ кН/м, $AB=5$ м, $BC=3$ м, $BE=2$ м.

Жауабы: а) 17,6 кН, 2 кН, 0,25 кН; б) 14,4 кН, 0, 4 кН.

1.8.7-есеп. Құрылымдар қатты бекітпелерінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=12$ кН·м, $F=10$ кН, $q=8$ кН/м, $a=2$ м, $b=1,5$ м;

б) $F=20$ кН, $q=6$ кН/м, $a=1$ м, $b=c=1,5$ м;

в) $M=15$ кН·м, $F=12$ кН, $q=4$ кН/м, $AB=CD=3$ м, $BC=2$ м;

г) $M=6$ кН·м, $F=14$ кН, $q=10$ кН/м, $AB=5$ м, $BC=BD=3$ м.

Жауабы: а) 2,6 кН, 6,3 кН, 13,5 кН·м; б) 10 кН, 8,3 кН, 53,5 кН·м;

в) 8,9 кН, 11,6 кН, 16,9 кН·м; з) 3,6 кН, 43,5 кН, 32,9 кН·м.

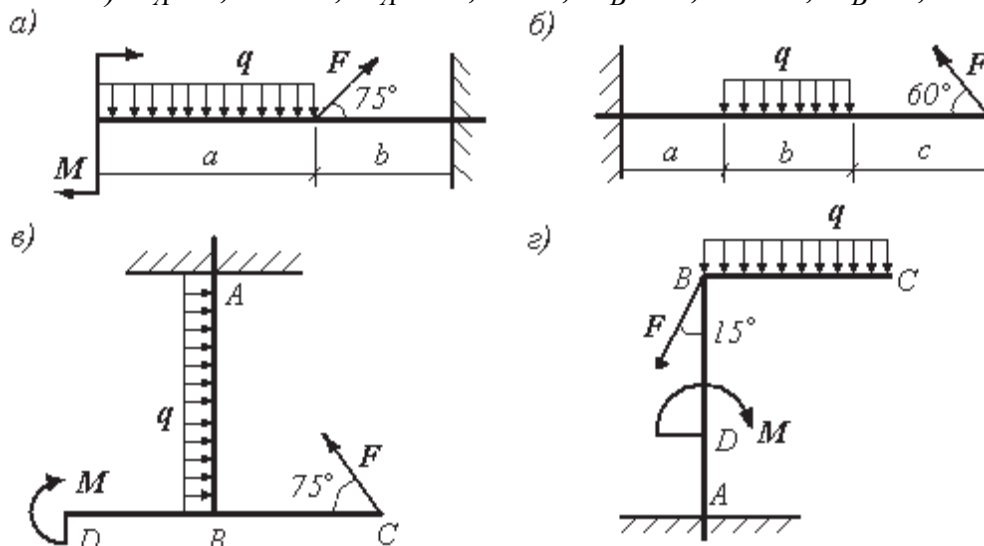
1.8.8-есеп. Құрама құрылымдардың сыртқы байланыстарының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $M=7$ кН·м, $P_1=6$ кН, $P_2=8$ кН, $q=3$ кН/м;

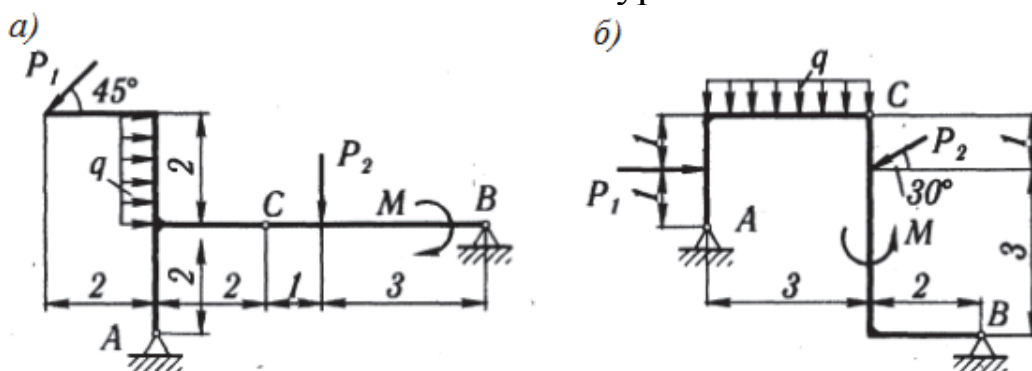
б) $M=4$ кН·м, $P_1=10$ кН, $P_2=12$ кН, $q=5$ кН/м.

Жауабы: а) $X_A=-1,23$ кН, $Y_A=8,49$ кН, $X_B=-0,52$ кН, $Y_B=3,75$ кН;

б) $X_A=2,91$ кН, $Y_A=12,8$ кН, $X_B=-2,52$ кН, $Y_B=8,23$ кН.



1.8.7-есепке сурет



1.8.8-есепке сурет

1.8.9-есеп. Білікті тепе-теңдікте ұстап тұрған P күшін және білік тіректерінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $Q=2$ кН, $G=3$ кН, $r=R/2$, $a=b=1$ м, $c=0,3$ м;

б) $Q=8$ кН, $G=4$ кН, $r=0,4$ м, $R=0,5$ м, $a=2$ м, $b=1$ м, $c=3$ м;

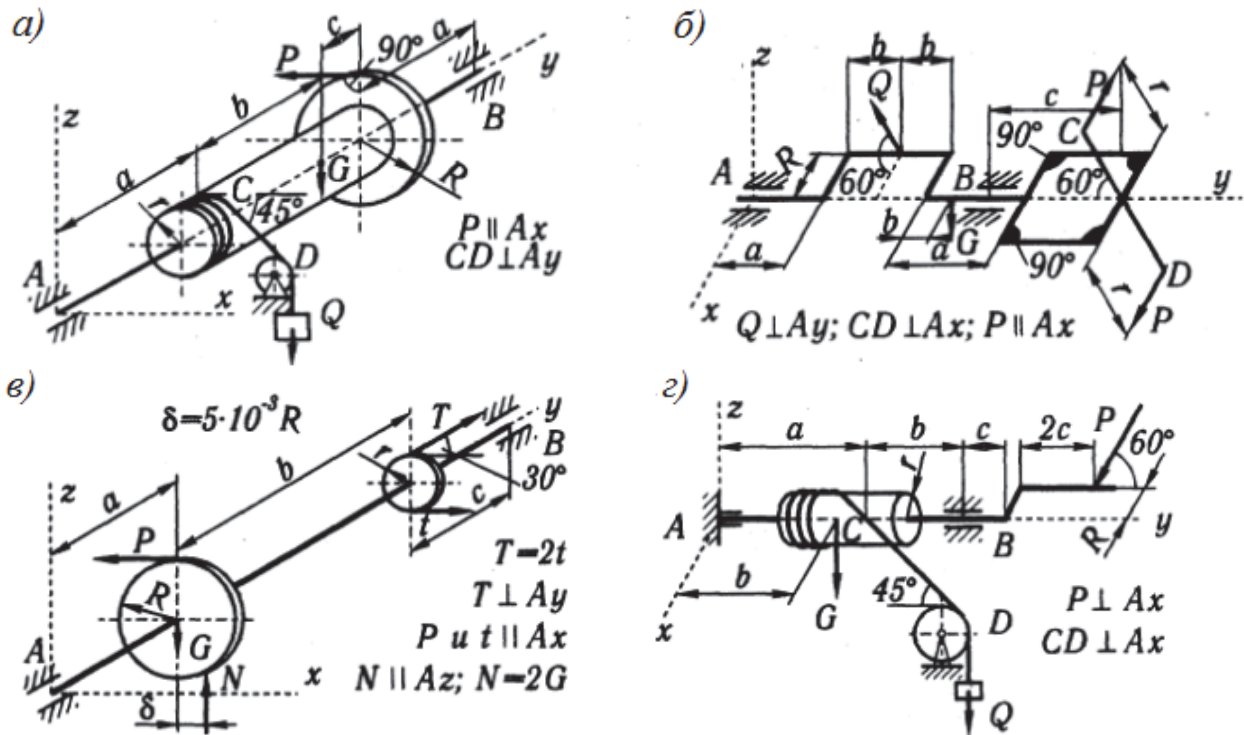
в) $T=4$ кН, $G=5$ кН, $r=0,3$ м, $R=0,4$ м, $a=1$ м, $b=3$ м, $c=2$ м;

з) $Q=18$ кН, $G=10$ кН, $r=0,1$ м, $R=0,3$ м, $a=4$ м, $b=3$ м, $c=1$ м.

Жауабы: а) $P=1$ кН, $X_A=-0,68$ кН, $Z_A=2,16$ кН, $X_B=0,27$ кН, $Z_B=2,16$ кН;

б) $P=5$ кН, $X_A=-2$ кН, $Z_A=-2,8$ кН, $X_B=-2$ кН, $Z_B=-0,13$ кН;

- в) $P=5,2 \text{ кН}$, $X_A=-2 \text{ кН}$, $Z_A=-6,5 \text{ кН}$, $X_B=-11,9 \text{ кН}$, $Z_B=-5,5 \text{ кН}$;
 з) $P=4,9 \text{ кН}$, $X_A=-0,3 \text{ кН}$, $Z_A=9,35 \text{ кН}$, $X_B=0,3 \text{ кН}$, $Z_B=17,6 \text{ кН}$.



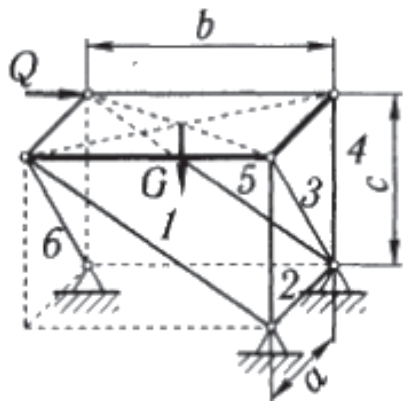
1.8.9-есепке сурет

1.8.10-есеп. Салмағы $G=6 \text{ кН}$ тақтаны ұстап тұрған сырықтардың реакцияларын табу керек. Берілгені: $Q=3 \text{ кН}$, $a=3 \text{ м}$, $b=5 \text{ м}$, $c=4 \text{ м}$.

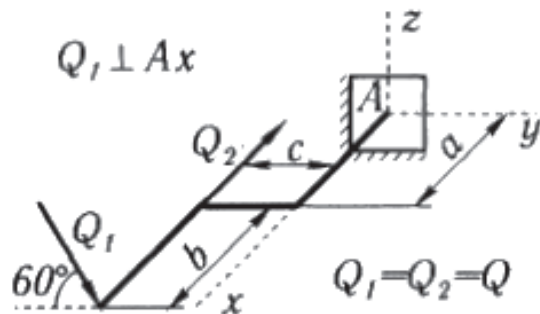
Жауабы: $S_1=-0,96 \text{ кН}$, $S_2=-2,4 \text{ кН}$, $S_3=0,75 \text{ кН}$, $S_4=-1,2 \text{ кН}$, $S_5=-2,88 \text{ кН}$, $S_6=-0,75 \text{ кН}$ (теріс таңба сырық сығылатынын білдіреді).

1.8.11-есеп. A қатты бекітпесінің реакцияларын анықтау керек. Берілгені: $Q_1=Q_2=10 \text{ кН}$, $a=2 \text{ м}$, $b=3 \text{ м}$, $c=1 \text{ м}$.

Жауабы: $X_A=10 \text{ кН}$, $Y_A=-5 \text{ кН}$, $Z_A=-8,66 \text{ кН}$, $M_{Ax}=-8,66 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{Ay}=-43,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{Az}=-15 \text{ кН}\cdot\text{м}$.



1.8.10-есепке сурет



1.8.11-есепке сурет

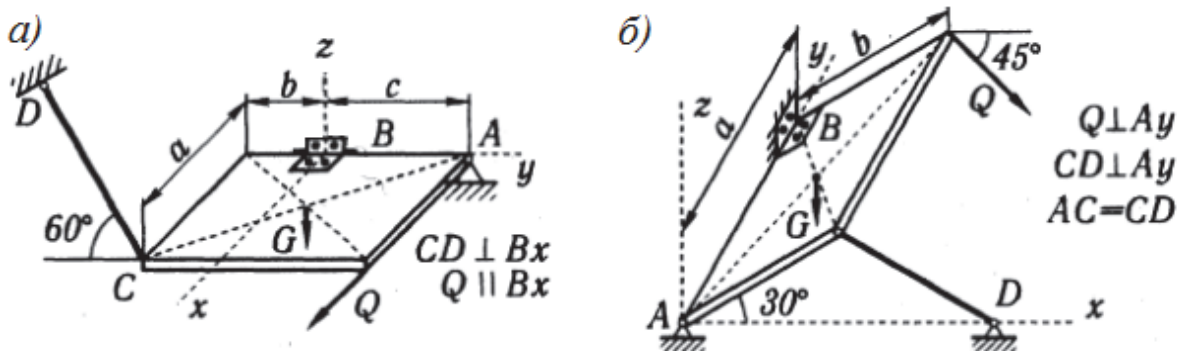
1.8.12-есеп. Сфералық A топса мен цилиндрлік B топсасының және салмағы G тақтаны ұстап тұрған CD сырығының реакцияларын анықтау керек. Берілгені:

а) $Q=8$ кН, $G=10$ кН, $a=5$ м, $b=1$ м, $c=3$ м;

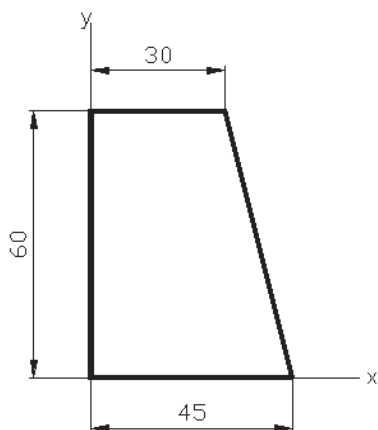
б) $Q=5$ кН, $G=3$ кН, $a=4$ м, $b=3$ м.

Жауабы: а) $X_A = -11,85$ кН, $Y_A = 2,31$ кН, $Z_A = 4,67$ кН, $X_B = 3,85$ кН, $Z_B = 1,33$ кН, $S_{CD} = 4,62$ кН;

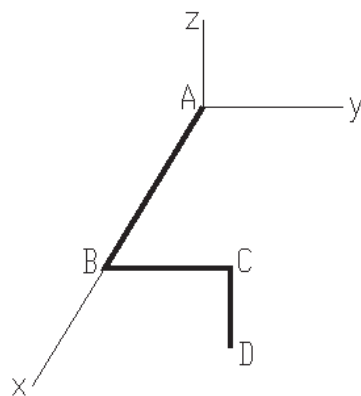
б) $X_A = 6,13$ кН, $Y_A = 0$, $Z_A = -2,04$ кН, $X_B = -3,54$ кН, $Z_B = 5,04$ кН, $S_{CD} = -7,08$ кН.



1.8.12-есепке сурет



1.8.13-есепке сурет



1.8.14-есепке сурет

1.8.13-есеп. $ABCD$ трапециясы ауырлық центрінің координаталарын табу керек.

Жауабы: 19, 28.

1.8.14-есеп. Біртекті $ABCD$ сынық сырығы ауырлық центрінің координаталарын табу керек. Берілгені: $AB=1$ м, $BC=0,6$ м, $CD=0,4$ м.

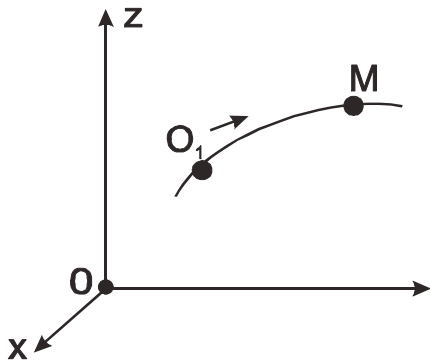
Жауабы: 0,75 м, 0,21 м, -0,04 м.

2.1 Нүкте кинематикасы

2.1.1 Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері

Нүкте қозғалысының заңын анықтаудың немесе қозғалыс теңдеулерін құрудың үш тәсілі бар.

1. Табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысының берілуінің үш тәсілінің бірі



2.1.1-сурет

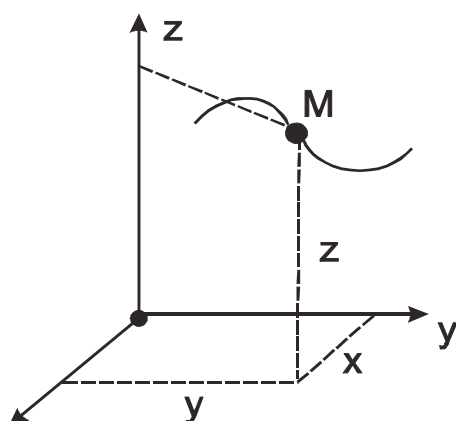
– табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысының берілуінің табиғи тәсілінде нүктенің кез келген бір санақ жүйесіне қатысты траекториясы беріледі. Одан кейін, оның бойынан қандайда болсын бір нүкте O_1 -ді доға ұзындығын есептеудің бастапқы нүктесі етіп алып, қашықтықты санаудың оң бағыты үшін мүмкін екі бағыттың кез келген бірі алынады. Сонда M нүктесінің орны $S=O_1M$ шамасымен анықталады.

A нүктенің траектория бойындағы орнын әрбір уақыт сәтінде де таба алуымыз үшін, доға ұзындығы $S=O_1M$ және уақыт t -ның әрбір мәніне сәйкес келетін S -тің мәнін беретін бір сарынды, үздіксіз уақыт функциясы берілуі керек

$$s = f(t). \quad (2.1.1.1)$$

Доға ұзындығы S пен уақыт t -ның арасындағы функциялық тәуелділік (2.1.1.1) нүктенің траектория бойымен қозғалуының заңы деп аталады.

2. Координаталық тәсіл. Бізге абсолют қозғалмайтын өстер жүйесіне қатысты M нүктесінің қозғалысын қарас-тыру керек болсын. Егер осы нүктенің x, y, z уақыт t -ның үздіксіз бірімәнді функ-циялары



2.1.2-сурет

болып келсе, яғни

$$x = f(t), \quad y = f(t), \quad z = f(t), \quad (2.1.1.2)$$

онда нүктенің әрбір уақыт сәтіндегі орны толық анықталады.

Сонымен, нүктенің орнын анықтаудың координаттар тәсілінде қандайда бір координаттар жүйесінде оның координаттары уақытқа тәуелді функция ретінде беріледі. (2.1.1.2)-теңдеулер нүкте қозғалысының теңдеулері деп аталады.

Сонымен қатар, бұл теңдеулерге нүкте траекториясының параметрлік теңдеулері деп қарауға болады. Траектория теңдеуін анықтау үшін (2.1.1.2)–теңдеулерден параметр

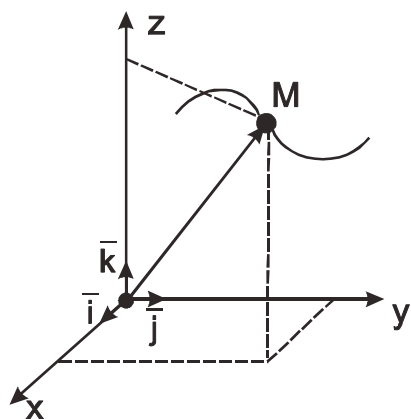
рөлінде тұрған t -ны аластау керек. Сонда траекторияның теңдеуін мынадай екі теңдеу жүйесі түрінде аламыз

$$F_1(x, z) = 0, \quad F_2(x, z) = 0. \quad (2.1.1.3)$$

Егер нүкте бір жызықтықта қозғалатын болса, онда оның қозғалысы екі ғана скаляр теңдеулермен беріледі

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t). \quad (2.1.1.4)$$

3 Векторлық тәсіл. Бұл тәсілде $Oxyz$ координаттар жүйесіне



2.1.4-сурет

катысты нүктенің орны $\vec{r} = \overline{OM}$ векторымен анықталады (2.1.4-сурет). Координаттар бас нүктесін және берілген M нүктесін қосатын вектор \vec{r} -ді нүктенің радиус-векторы деп атайды. Қозғалыс кезінде \vec{r} -өзінің модулін де, бағытын да өзгертеді. Демек, ол t -ның бір мәнді, үздіксіз, дифференциалданатын функциясы болып келеді. (2.1.1.5) өрнегі нүкте қозғалысының векторлық теңдеуі

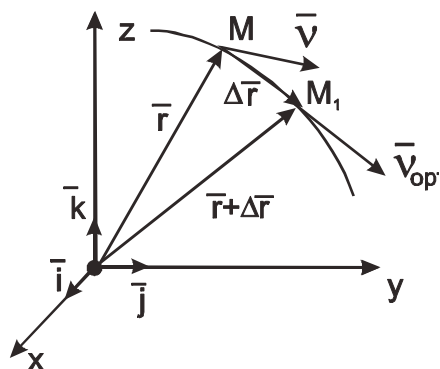
$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1.1.5)$$

2.1.2 Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүкте жылдамдығын анықтау

Нүкте M -нің қозғалысы $Oxyz$ координаттар жүйесіне мына векторлық теңдеумен анықталсын:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

M нүктесінің қандай да t уақытындағы орны $\vec{r} = \overline{OM}$ радиус векторымен, ал $t_1 = t + \Delta t$ уақыт мезгіліндегі орны $\vec{r}_1 = \overline{OM_1}$ радиус векторымен анықталсын (2.1.5-сурет).



2.1.5-сурет

Траекторияның M және M_1 нүктелерін MM_1 векторымен қосайық.

Сонда векторлық үшбұрыш ΔOMM_1 -ден мынадай векторлық қосынды алуға болады: $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$. Осыдан $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ екенін анықтаймыз. Радиус-вектор \vec{r} -дің Δt уақыт аралығындағы алған өсімісі $\Delta \vec{r}$ -ді M нүктесінің орын ауыстыруы дейміз.

Радиус-вектор өсімісі $\Delta \vec{r}$ - дің оған

сәйкес уақыт өсімісі

Δt -ға қатынасы, Δt -уақыт аралығындағы нүктенің орташа жылдамдығы деп аталады. Ол мына формуламен беріледі

$$\bar{v}_{i\delta\delta} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Орташа жылдамдық векторы \bar{v}_{opt} хорда MM_1 бойымен қозғалыс болатын жаққа қарай бағытталады (2.1.5-сурет).

Нүктенің берілген t уақыттағы жылдамдығы деп уақыт өсімішесі Δt -нің нөлге ұмтылған кездегі орташа жылдамдықтың ұмтылған шегін айтамыз

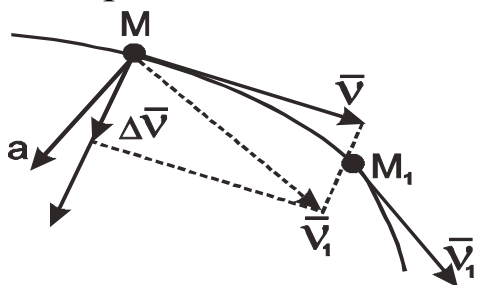
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.1.2.1)$$

(2.1.2.1)–формула лездік жылдамдық немесе берілген t уақытындағы жылдамдықты анықтайды. (2.1.2.1) теңдігінің оң жағындағы қатынастың шегі уақыт бойынша алынған радиус-вектордың туындысын береді

Берілген сәттегі нүкте жылдамдығы деп, оның радиус-векторының уақыт бойынша алынған туындысына тең болып келген векторлық шама, \bar{v} -ны айтамыз.

2.1.3 Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүктенің үдеуі

Нүктенің қозғалысы векторлық теңдеуімен берілген дейік, сонда



2.1.6-сурет

нүктенің *Охуз*-координаттық жүйе-дегі радиус-векторы \bar{r} уақыт t -ның бірімәнді, үздіксіз дифференциалданатын функциясы ретінде анықталады

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \quad (2.1.2.3)$$

(2.1.2.3)-теңдеу нүктенің жылдам-

дық векторы \bar{v} -ның уақытқа тәуелді өзгеруін көрсететін, мынадай теңдеуді береді

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.1.2.4)$$

Нүктенің қозғалысы кезінде жылдамдық векторы өзінің шамасын да, бағытын да өзгертіп отырады. Жылдамдықтың уақыт өтуіне байланысты өзгеруінің тездігін сипаттаушы физикалық шаманы үдеу деп атайды. Осы шаманы анықтайтын t мезгілінде M нүктесінің жылдамдығы \bar{v} болады дейік (2.1.6-сурет), ал уақыт $t_1 = t + \Delta t$ -ға, тең болған сәтте, ол $\bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta \bar{v}$ болсын. Осы Δt уақыты аралығындағы

жылдамдық векторы \bar{v} -ның өсімшесі $\Delta\bar{v}$ -ны геометриялық жолмен табу үшін, траекторияның M нүктесінде жылдамдықтар параллелограммын құрамыз. Осы параллелограмм диагоналін өрнектейтін қосындыдан $\Delta\bar{v}$ -ны табамыз

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}. \quad (2.1.3.1)$$

Жылдамдық өсімшесі $\Delta\bar{v}$ -ның сәйкес уақыт өсімшесі Δt -ға қатынасын алайық

$$\bar{a}_{i\delta\delta} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}, \quad (2.1.3.2)$$

мұндағы, $\bar{a}_{i\delta\delta}$ векторын нүктенің Δt уақыт аралығындағы орташа үдеуі дейміз. Осы анықтамадан берілген уақыттағы, яғни лездік үдеудің анықтамасын алуға болады.

Нүктенің берілген уақыттағы үдеуі деп, Δt уақыт өсімшесі нөлге ұмтылғандағы орташа үдеудің ұмтылған шегін айтамыз

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{i\delta\delta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.1.3.5)$$

Сонымен, *берілген уақыт мезгіліндегі нүктенің үдеуі деп жылдамдық векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына немесе нүктенің радиус-векторының уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең болатын векторлық шаманы айтамыз.*

Лездік үдеу векторы \bar{a} , траекторияның M нүктесіндегі жанаспа жазықтығында жатады және M нүктесінен траекторияның ойыс (ішкі) жағына қарай бағытталады. Траектория жазық қисық болса, онда оның барлық нүктесіндегі жанаспа жазықтық бірдей бір жазықтық болады. Ол қисық сызықтың өз жазықтығына дәл келеді.

2.1.4 Қозғалысы координаттық тәсілде берілген нүкте жылдамдығын анықтау

Нүктенің $Oxyz$ санақ жүйесіндегі қозғалысы координаттық тәсілде берілген. Демек, нүктенің осы санақ жүйесіндегі координаттары x, y, z уақытқа тәуелді функциялар түрінде беріледі

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.1.4.1)$$

Қозғалыс тендеулері (2.1.4.1) арқылы берілген M -нүктесінің жылдамдығын анықтауға қажетті формулаларды табуымыз керек. Осы мақсатпен жоғарыда көрсетілген

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.1.4.2)$$

векторлық теңдеуіндегі $\vec{r} = \overline{OM}$ радиус-векторын оның $Oxyz$ өстеріндегі құраушылары арқылы өрнектейік

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.1.4.3)$$

(2.1.4.3) өрнегін (2.1.4.2) –теңдіктегі орнына қояйық

$$\vec{v} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}. \quad (2.1.4.4)$$

Осыдан

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (2.1.4.5)$$

Енді жылдамдық векторы \vec{v} -ны үш құраушыға жіктеп, оны (2.1.4.5) теңдігінің сол жағына қоямыз

$$\vec{v}_x\vec{i} + \vec{v}_y\vec{j} + \vec{v}_z\vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (2.1.4.6)$$

(2.1.4.6) тепе-теңдігіндегі өзара тәуелсіз $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторының алдындағы коэффициенттерді теңестіреміз

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.1.4.7)$$

(2.1.4.7) формулалары нүкте жылдамдығы \vec{v} -ның координаттық өстердегі проекцияларын өрнектейді. Жылдамдық проекциялары табылғаннан кейін вектордың өзі де толық табылады. Оның модулі мына формуламен анықталады

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.1.4.8)$$

Осыдан соң жылдамдық векторының бағыттаушы косинустарын есептей аламыз

$$\cos(\vec{v}, \vec{i}) = v_x/v, \quad \cos(\vec{v}, \vec{j}) = v_y/v, \quad \cos(\vec{v}, \vec{k}) = v_z/v. \quad (2.1.4.9)$$

2.1.5 Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің үдеуін анықтау

Қозғалмайтын $Oxyz$ координаттар жүйесіндегі нүкте қозғалысы

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2.1.5.1)$$

теңдеулерімен анықталады дейік. Осы теңдеулер арқылы нүкте үдеуін қалай есептеуге болатынын көрейік. Нүкте үдеуі деп (2.1.3.4) не (2.1.3.5) векторлық теңдікпен берілген векторды айтамыз. (2.1.3.5) теңдіктің оң жағындағы радиус-вектор \vec{r} -ді координаттар өстеріне жіктеп жазуға болады

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}. \quad (2.1.5.2)$$

(2.1.5.2)-дегі \bar{r} векторының компоненттерін (2.1.3.4) теңдігіне қойып

$$\bar{a} = \frac{d^2(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})}{dt^2}. \quad (2.1.5.3)$$

(2.1.5.3) теңдігінің оң жағындағы туындыны есептеп шықсақ, мына теңдікке келеміз

$$\bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}. \quad (2.1.5.4)$$

Енді үдеу векторы \bar{a} -ны үш құраушыға жіктеп оны (2.1.5.4) теңдігінің сол жағына қоямыз

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}. \quad (2.1.5.5)$$

(2.1.5.5) теңдігі орынды болуы үшін, бұл теңдіктің екі жағында тұрған өзара тәуелсіз $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бірлік векторларының әрбіреуінің араларындағы коэффициенттері бірі-біріне тең болуы керек

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (2.1.5.6)$$

Үдеу модулі мына формуламен анықталады

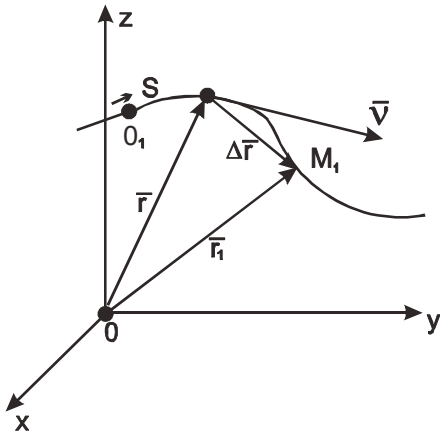
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1.5.7)$$

Үдеу векторының кеңістіктегі бағыты оның бағыттаушы косинустарымен анықталады

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = a_x/a, \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = a_y/a, \quad \cos(\bar{a}, \bar{k}) = a_z/a. \quad (2.1.5.8)$$

2.1.6 Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығын анықтау

Нүкте M -нің қозғалысы координаттар жүйесінде табиғи тәсілде берілген дейік. Демек, нүктенің траекториясы AB көрсетілген (2.1.8-сурет). Осымен қатар, доғалық қашықтық $S = \overset{\cup}{OM}$ уақытқа тәуелді функция ретінде берілген $S = f(t)$. Енді нүктенің жылдамдығын есептеу жолын көрсетейік. Ол үшін жылдамдық векторының анықтамасы (2.1.2.3)–те берілген және O_1 санақ нүктесі, қашықтықты есептеуде оң бағытты пайдаланамыз



2.1.8-сурет

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt},$$

мұндағы, \bar{r} нүктенің радиус векторы. (2.1.2.3)–дің екі жағынан модуль алайық

$$|\bar{v}| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \frac{d|\bar{r}|}{dt}. \quad (2.1.6.1)$$

Бұл жерде уақыт дифференциалы dt оң таңбалы шама екені ескеріледі. Енді радиус векторы дифференциалының модуліне тең болатынын пайдаланайық

$$|d\bar{r}| = |dS|. \quad (2.1.6.2)$$

(2.1.6.1) теңдегі арқылы (2.1.6.2) өрнегінен мынадай формуланы аламыз

$$v \frac{dS}{dt}. \quad (2.1.6.3)$$

Доғалық координаттың уақыт бойынша алынған туындысының таңбасы “+”, не “–” болуы мүмкін. Егер қозғалыс доғаны есептеудің оң бағытында орындалса, онда $dS/dt > 0$ болатындықтан $v = dS/dt > 0$ ал қозғалыс доғалық қашықтықты есептеу бағытына қарсы бағытта орындалатын жағдайда $dS/dt < 0$. Траекторияның M нүктесінде жүргізілген жанаманың бірлік векторын $\bar{\tau}$ деп белгілейік. Бұл $\bar{\tau}$ векторы S доғалық қашықтықты есептеудің оң бағытына сәйкес бағытталаатынын ескерсек, онда (2.1.6.3)–ті векторлық түрде жаза аламыз

$$\bar{v} = v\bar{\tau}.$$

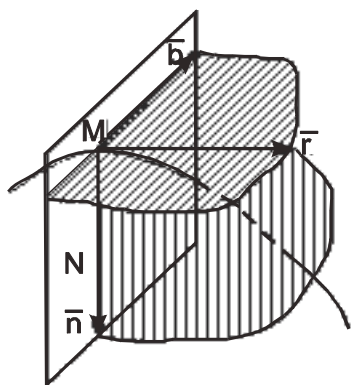
Сонымен, нүкте қозғалысы табиғи тәсілде берілген болса, онда оның жылдамдығының модулі де, бағыты да толық анықталады.

2.1.7 Табиғи үш жақ. Табиғи өстер. Үдеу векторының жанاما және нормаль құраушылары

1. Табиғи үш жақ. Табиғи өстер. Траекторияның бір-біріне шексіз жақын орналасқан үш нүктесі арқылы өтетін жазықтық, оның ортаңғы нүктесіне жүргізілген, жанаспа жазықтық деп аталады.

Жанамаға перпендикуляр, M нүктесі арқылы өтетін, N -жазықтығы траекторияның осы нүктедегі нормаль жазықтығы деп аталады.

Траекторияның M нүктесіндегі жанама арқылы өтетін нормаль және жанаспа жазықтықтарға перпендикуляр үшінші жазықтық траекторияның сол нүктедегі түзулеуші жазықтығы деп аталады (2.1.9-сурет). Жанаспа жазықтықта жатқан нормаль қисықтың M нүктесіндегі бас нормаль деп, ал жанаспа жазықтыққа осы нүктеде жүргізілген перпендикуляр бинормаль деп аталады. Жанаманың оң бағыты ($\bar{\tau}$ бірлік векторы) қозғалыспен бағыттас келеді. Бас нормальдың оң бағыты (\bar{n} бірлік векторы) траекторияның ойыс жағына қарай бағытталады. Бинормальдың оң бағыты (\bar{b} бірлік векторы) $\bar{\tau}$ және \bar{n} векторларымен оң координаттар жүйесін құрайтындай етіп алынады. Бас нүктесі M болатын бұл координаттар жүйесі $M\bar{\tau}\bar{n}\bar{b}$ табиғи координаттар жүйесі деп немесе табиғи үшжақ деп аталады. Координаттар жазықтары екі-екіден алынған бірлік

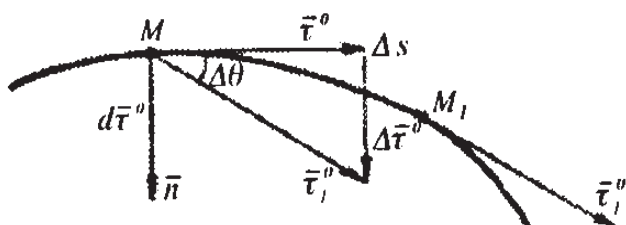


2.1.8-сурет

векторларымен анықталады. $(\bar{\tau}, \bar{n})$ – жанаспа жазықтық, (\bar{n}, \bar{b}) – нормаль жазықтық, $(\bar{b}, \bar{\tau})$ – түзулеуші жазықтық.

2 Қисық сызық қисықтығы. Нүктенің траекториясын жалпы жағдайда кеңістіктегі қисық сызық деп санаймыз. Нүкте траекториясының M нүктесі берілсін. Траекторияның осы нүктесінде және оған жақын орналасқан екінші нүктесі M_1 арқылы $\bar{\tau}$ және $\bar{\tau}_1$ жанама бірлік векторларын жүргізейік (2.1.10-сурет). M_1 нүктесі берілген M нүктесінен ΔS қашықтықта болсын, $\bar{\tau}_1$ векторын M нүктесіне параллель көшірейік. M нүктесіндегі $\bar{\tau}$ және $\bar{\tau}_1$ екі бірлік векторлар арасындағы бұрышты $\Delta\theta$ деп белгілейік. Бұл бұрыштың ΔS доға ұзындығына қатынасын алайық

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S} = k_{opt}. \quad (2.1.7.1)$$



2.1.10-сурет

(2.1.7.1) қатынасын траекторияның MM_1 доғасының орташа қисықтығы дейміз. Осы орташа қисықтық ұғымын пайдалана отырып қисықтық, яғни траекторияның берілген нүктедегі қисықтығы деген ұғым енгізе аламыз.

Қисықтың берілген M нүктесіндегі қисықтығы деп орташа қисықтықтың ΔS нөлге ұмтылғандағы шегіне тең шаманы айтамыз

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} k_{i\delta\delta} = k. \quad (2.1.7.2)$$

Орташа қисықтық өрнегі (2.1.7.1) арқылы (2.1.7.2) теңдігін мына түрде жазайық

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta S} = k. \quad (2.1.7.3)$$

(2.1.7.3)-теңдіктің сол жағындағы қатынастың алымының және бөлімінің де шекті мәндерін анықтайық.

ΔS нөлге ұмтылғандағы немесе M_1 нүктесінің траектория бойымен берілген M нүктесіне ұмтылғандағы $\Delta \theta$ бұрыштың шекті мәнін $d\theta$ деп белгілеп, бұл бұрышты сыбайластық бұрыш деп атаймыз.

ΔS -тің M_1 нүктесінің траектория бойымен M -ге ұмтылғандағы шегі $d\theta$ доға элементіне тең. Осы түсіндірмелерді пайдалана отырып, (2.1.7.3)-анықтаманы былай жазамыз

$$k = \frac{d\theta}{dS}. \quad (2.1.7.4)$$

(2.1.7.4)-формула қисық сызықтың берілген M нүктесіндегі қисықтығын анықтайды. Ол былай айтылады. *Траекторияның берілген нүктесіндегі қисықтығы элементар сыбайластық бұрыштың доға элементіне қатынасына тең шама.*

3 Қисықтың берілген нүктедегі қисықтық радиусы.

Қисықтың M нүктесі берілсін, оның осы M нүктесіндегі қисықтық радиусы деп осы нүктедегі k -ға кері шаманы айтамыз. Қисықтың берілген M нүктесіндегі қисықтық радиусы ρ десек, онда ол осы айтылған анықтама бойынша мынаған тең

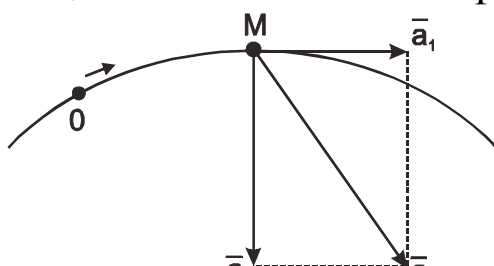
$$\rho = \frac{1}{k}. \quad (2.1.7.5)$$

4 Үдеу векторының жанама және нормаль құраушылары.

Кеңістікте бойымен M нүктесі қозғалатын қисық берілсін, нүктенің траектория бойындағы M орнына $S = \overline{OM}$ доғасы сәйкес келеді. Бұл доғаның t -уақытқа тәуелділігі берілсін

$$S = f(t). \quad (2.1.7.6)$$

Қозғалыс заңы (2.1.7.6) теңдігі түрінде берілген M нүктесінің үдеуінің



2.1.11-сурет

векторы \bar{a} -ны табиғи өстер бағытта-рындағы құраушыларға жіктеу керек. Осы мақсатты көздеп жылдамдық векторы \bar{v} -ны жанама бірлік векторы $\bar{\tau}$ арқылы өрнектейік

$$\bar{v} = v\bar{\tau}. \quad (2.1.7.7)$$

мұндағы, v , жылдамдық векторы \bar{v} -ның $\bar{\tau}$ бағытындағы проекциясы $v_r=v$. Егер нүкте қозғалысы доға S -тың ұзындығы есептеудің оң бағытына бағыттас орындалса, онда $v_r=v$, ал егер оның қозғалысы S -ті есептеудің оң бағытына қарсы бағытта өтетін болса, онда $v_r=-v$.

Екі жағынан уақыт бойынша туынды алу арқылы (2.1.7.7)-ді мына түрге келтіреміз

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (2.1.7.8)$$

Бірлік векторы $\bar{\tau}$ -дың дифференциалы, мынаған тең екені белгілі

$$d\bar{\tau} = d\theta \cdot \bar{n}. \quad (2.1.7.9)$$

Осы (2.1.7.9)–теңдікте әрі қарай түрлендірейік

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\bar{n} = \frac{d\theta}{dS} \frac{dS}{d\theta}\bar{n} = \frac{v}{\rho}\bar{n}. \quad (2.1.7.10)$$

мұндағы, ρ траекторияның M нүктесіндегі қисықтық радиусы. Соңғы (2.1.7.10) теңдікті ескерсек (2.1.7.8)–теңдіктен үдеу векторының мынадай жіктелуін аламыз

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}. \quad (2.1.7.11)$$

Бұдан, үдеудің жанама және бас нормаль бағыттары бойынша (2.1.11-сурет) тек екі құраушыға жіктелетінін көреміз. Демек, үдеу векторы жанаспа жазықтықта жатады, сондықтан да оның бинормальдағы құраушысы нөлге тең болады деген қорытындыға келеміз. Олай болса, үдеудің табиғи үшжақ өстеріндегі құраушылары мына түрде беріледі

$$\dot{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \quad (2.1.7.12)$$

Үдеу векторының, $\bar{\tau}$ бағытындағы құраушысы $\bar{a}_\tau = \bar{\tau} \cdot d v/dt$ жанама (тангенциаль) үдеу, ал оның \bar{n} -бағытындағы құраушысы $\bar{a}_n = \bar{n} \cdot v^2/\rho$ нормаль үдеу болады, (2.1.7.8)–теңдікті қысқаша мына түрде жазуға да болады (2.1.11-сурет)

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}. \quad (2.1.7.13)$$

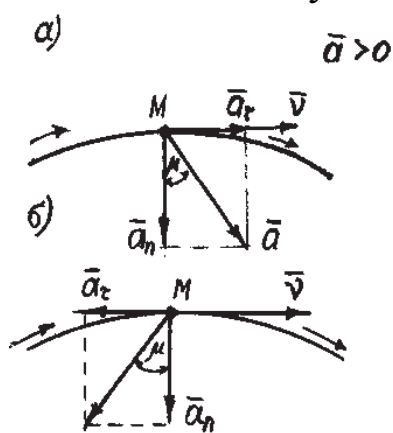
Оның модулі

$$\bar{a} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (2.1.7.14)$$

Жанама үдеу жылдамдықтың шама жағынан өзгеруін сипаттайды, өйткені ол жылдамдықтың модулінен уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең. Олай болса, нормаль үдеу жылдамдықтың бағытының өзгеруін сипаттауға тиіс. Нормаль үдеудің шамасы әруақытта оң сан болғандықтан, толық \bar{a} үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталғандықтан оны центрге тартқыш үдеу деп те атайды. Толық үдеудің бағыты, оның бас нормальдың оң бағытымен жасайтын μ -бұрышымен анықталады (2.1.11-сурет)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (2.1.7.15)$$

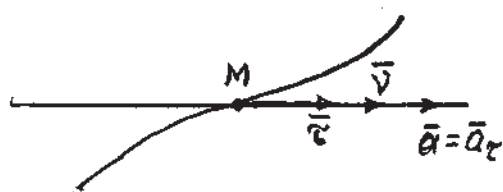
Осы формуладан, жанама үдеу \bar{a}_τ -дың таңбасына қарап, яғни жылдамдық модулі v -ның өсуіне не кемуіне байланысты, толық



2.1.12-сурет

үдеудің бас нормальдан қозғалыстың бағытына қарай, не оған қарсы бағытқа ауытқитынын көртеміз. Егер $a_\tau > 0$ (жылдамдықтың шамасы уақыт өткен сайын өсіп отыратын) болса, онда жанама үдеу \bar{a}_τ де қозғалыстың бағытына қарай бағытталады. Мұндай қозғалыс *үдемелі қозғалыс* деп аталады (2.1.12-сурет). Егер $a_\tau \neq 0$ болса, онда қозғалыс қисық сызықты қозғалыс, ал $a_n = 0$ ($\rho = \infty$) болса, онда ол түзу сызықты қозғалыс

болады. Тек жеке уақыт кезеңінде ғана $a_n = 0$ болса, онда сол сәтте қозғалушы нүкте траекторияның кері иілу нүктесінде (2.1.13-сурет) болғаны, не сол сәтте нүктенің жылдамдығы нөлге тең ($v = 0$) болғаны.



2.1.13-сурет

Егер $a_\tau < 0$ (жылдамдық шамасы қозғалыс кезінде кеміп отыратын) болса, \bar{a}_τ және \bar{a} векторлары қозғалысқа қарсы бағытталады, ал қозғалыс *кемімелі қозғалыс* деп аталады (2.1.12, б-сурет).

Егер барлық уақытта да $a_{\tau} \neq 0$ жылдамдықтың шамасы тұрақты, яғни $v = const$ болса, қозғалыс *бірқалыпты қозғалыс* деп аталады. Егер тек қана жеке уақыт кезеңі үшін $a_{\tau} \neq 0$ болса, онда алгебралық жылдамдық өзінің экстремалды мәнін қабылдағаны. Ал барлық уақытта да $a_{\tau} = a_n = 0$ болса, онда нүкте бірқалыпты түзу сызықты қозғалыста болғаны.

2.1.8 Нүкте қозғалысының кейбір жеке түрлері

Траекторияның түріне қарай нүкте қозғалысы екі топқа бөлінеді. Қозғалыс кезінде түзу сызық сызатын нүктені түзу сызықты қозғалыс жасайды дейміз, траекториясы қисық сызық түрінде болып келетін нүктені екінші топқа жатқызамыз. Нүкте жылдамдығының өзгеруіне қарап бұл екі топтағы нүкте қозғалыстарының әрқайсысын әр түрге бөліп атаймыз. Алдымен нүктенің түзу сызықты қозғалысына жеке тоқтап өтейік.

1. Түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс. Түзудің қисықтық радиусы $\rho = \infty$ болғандықтан түзу сызықты қозғалыстағы нүктенің нормаль үдеуі нөлге тең болады да, оның толық үдеуі жанама құраушысына тең болады

$$a = a_{\tau} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.1.8.1)$$

Нүктенің жылдамдығы тұрақты, түзу сызықты қозғалысы – *түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс* деп аталады. Мұндай қозғалыстың (2.1.8.1)-формула бойынша үдеуі нөлге тең болады да, қозғалыс кезіндегі уақыттардың бәрінде жылдамдық векторы модулін өзгертпей сақтайды.

Түзу сызықты, бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мынадай

$$a = 0, \quad v = const, \quad s = s_0 + vt. \quad (2.1.8.2)$$

2. Түзу сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс. Үдеуі тұрақты нүктенің түзу сызықты қозғалысы – *бірқалыпты айнымалы қозғалыс* деп аталады, мұндай қозғалысты сипаттайтын формулалар элементар физикадан белгілі

$$a = const, \quad v = v_0 + at, \quad s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.1.8.3)$$

3. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалыс. Нүктенің қисық сызықты қозғалысында $v = const$ болса, онда ол *бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс* деп аталады. Демек, бірқалыпты қисық сызықты

қозғалыс кезінде нүктенің жанама үдеуі нөлге тең болады да, толық үдеуі өзінің нормаль құраушысына тең болып келеді. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мына түрде жазылады

$$v = \text{const}, \quad a_{\tau} = 0, \quad a = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.1.8.4)$$

Нүкте жылдамдығын өрнектейтін теңдеуді интегралдау арқылы бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс заңын табамыз

$$s = s_0 + v_0 t. \quad (2.1.8.5)$$

4. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс.

Нүктенің жанама үдеуі қозғалыс кезінде үнемі тұрақты, яғни

$$a = \text{const}, \quad (2.1.8.6)$$

болса, онда қисық сызықты қозғалыс *бірқалыпты айнымалы қозғалыс* деп аталады. Мына теңдікті түрлендіре отырып оны мына түрде жазайық

$$dv = a_{\tau} dt. \quad (2.1.8.7)$$

Осы теңдеуді интегралдау арқылы қозғалыс жылдамдығының өзгеру заңын табамыз

$$v = v_0 + a_{\tau} t, \quad (2.1.8.8)$$

мұндағы, v_0 нүктенің $t_0=0$ болған кездегі бастапқы жылдамдығы. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс заңын

$$ds = (v_0 + a_{\tau} t). \quad (2.1.8.9)$$

Теңдеуін интегралдау арқылы мына түрде аламыз

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_{\tau} t^2. \quad (2.1.8.10)$$

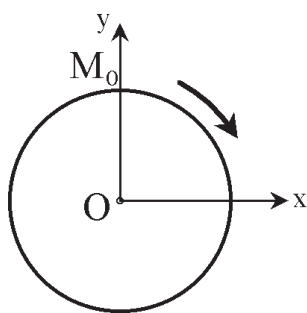
мұндағы, s_0 – бастапқы қашықтық.

5. Қисық сызықты қозғалыстың жалпы жағдайы. Үдеу векторы жылдамдық векторының өзгеру тездігін анықтайды. Ол жалпы жағдайда жанама және нормаль құраушыларға жіктеледі. Жанама үдеу жылдамдық векторының сан мәнінің өзгеруін, ал нормаль үдеу жылдамдық бағытының өзгеруін сипаттайды. Жалпы жағдайда, жылдамдықтың өзгеруі толығынан қарастырылатындықтан $a_{\tau} \neq 0$, $a_n = 0$ болып келеді.

Жалпы жағдайдағы қисық сызықты қозғалыс үдемелі және кемімелі деген екі түрге бөлінеді. Үдемелі қозғалыс кезінде a_{τ} және v шамаларының таңбалары бірдей, ал кемімелі қозғалыс кезінде бұлардың таңбалары қарама-қарсы болып келеді. Басқаша айтқанда, үдемелі қозғалыс кезінде жанама үдеу векторы жылдамдық

векторымен бірдей бір жаққа қарай бағытталады, ал кемімелі қозғалыс кезінде ол жылдамдық векторына қарама-қарсы бағытта болады. $a_n = -$ оң шама болғандықтан нормаль үдеу бас нормальмен бірдей бағытталады. Нормаль үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталуына байланысты, ол кейде центрге ұмтылғыш үдеу деп те аталынады. Осыдан, бұрын айтылған үдеу векторының үнемі траекторияның ойыс жағына қарай бағытталадындығын, нормаль үдеу туралы берілген осы түсінік, оны айқындай түседі.

1-мысал. Нүкте қозғалысының берілген $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$ теңдеулерінен оның траекториясының теңдеуін анықтау, сонымен қатар нүктенің бастапқы орнынан саналатын қашықтығын траектория бойында нүкте қозғалысының заңдылығы арқылы көрсету қажет.



1.16.2-сурет

Шешуі: Теңдеулердің екі жағын квадраттап және олардың мүшелерін қоссақ, алатынымыз $x^2 + y^2 = 9 \cdot \sin^2 t + 9 \cdot \cos^2 t$, немесе $x^2 + y^2 = 9$. Сонымен, нүкте траекториясы – центрі бас нүктесінде болатын радиусы 3 бірлікті ұзындықтағы шеңбер (1.16.2-сурет).

Траектория бойында қозғалыс заңдылығын анықтаймыз. x және y координаттарынан t бойынша туынды таба отырып, алатынымыз

$$\dot{x} = 3 \cdot \cos t, \quad \dot{y} = -3 \cdot \sin t.$$

Осыны қолданып, келесіні аламыз

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_0^t 3 dt \quad \text{немесе} \quad s = 3 \cdot t.$$

Алынған теңдеу траектория бойында нүкте қозғалысының заңдылығын береді. Берілген теңдеулерден $t = 0$ болғанда $x = 0$, $y = 3$, яғни нүкте M_0 орнында болатындығын және t өсіп бастағанда оң таңбаны қабылдап x өсетінін, ал y кемітетінін көреміз.

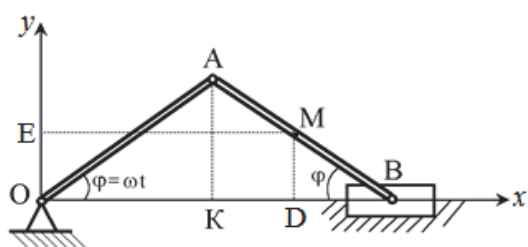
2 мысал. Қосиін OA тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады және $OA = AB = a$ (1.16.3-сурет). Қосиін-бұлғақты механизм бұлғағының ортасында орналасқан M нүктесінің және жылжыма B -ның жылдамдықтарын табу керек.

Шешуі: M және B нүктелерінің қозғалыс теңдеулері берілмеген, сондықтан, оларды құру қажет. Механизмді кез келген орнында кескіндейміз. M және A нүктелерінен өстерге MD , ME және AK перпендикуляр түзулерді тұрғызамыз. Онда алатынымыз

$$x_M = OD = OK + KD = OA \cdot \cos \varphi + AM \cdot \cos \varphi,$$

$$y_M = MD = MB \cdot \sin \varphi,$$

$$x_B = OB = 2 \cdot OK = 2 \cdot AB \cdot \cos \varphi.$$



1.16.3 сурет

Мұнда

$$AB = OA = a, \quad AM = a/2, \quad \varphi = \omega \cdot t$$

ескере отырып, M және B нүктелерінің қозғалыс теңдеулерін құрамыз

$$x_M = \frac{3 \cdot a \cdot \cos(\omega t)}{2}, \quad y_M = \frac{a \cdot \sin(\omega t)}{2}, \quad x_B = 2 \cdot a \cdot \cos(\omega t).$$

M және B нүктелерінің жылдамдықтарын анықтаймыз

$$v_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2} a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t), \quad v_{My} = \dot{y}_M = \frac{a}{2} \omega \cdot \cos(\omega t),$$

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{a}{2} \cdot \omega \cdot \sqrt{8 \cdot \sin^2(\omega t) + 1},$$

$$v_B = \dot{x}_B = -2a \cdot \omega \cdot \sin(\omega t).$$

3-мысал. Дизельдің қосиін жұдырықшасының қозғалысы $x = 75 \cdot \cos 4t^2$, $y = 75 \cdot \sin 4t^2$ теңдеулерімен берілген (t – секундамен, x, y – сантиметрмен өлшенеді). Жұдырықша жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін табу керек.

Шешуі: Нүкте жылдамдығының осьтерге проекцияларын анықтаймыз

$$v_x = \dot{x} = -600 \cdot t \cdot \sin 4t^2, \quad v_y = \dot{y} = 600 \cdot t \cdot \cos 4t^2.$$

Жылдамдық модулі

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{600^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 600^2 \cdot t^2 \cdot \cos^2 4t^2} = 600 \cdot t \text{ см/с}.$$

Нүктенің жанама үдеуі жылдамдықтың жанама өске проекциясынан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d(600 \cdot t)}{dt} = 600 \text{ см/с}^2.$$

Нүкте толық үдеуінің координаттар остерінде проекцияларын анықтаймыз

$$a_x = \dot{v}_x = -4800 \cdot t^2 \cdot \cos 4t^2 - 600 \cdot \sin 4t^2,$$

$$a_y = \dot{v}_y = -4800 \cdot t^2 \cdot \sin 4t^2 + 600 \cdot \cos 4t^2.$$

Үдеу модулі мынадай өрнектермен анықталады

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 4800 \cdot t^4 \cdot \cos^2 4t^2 + 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin 4t^2 + \\ + 600^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 4800^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2 4t^2 - 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin 4t^2 + \\ + 600^2 \cdot \cos^2 4t^2 = 4800^2 \cdot t^4 + 600^2.$$

Толық үдеу мен жанама және нормаль құраушыларының арасында мынадай байланыс бар

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2.$$

Онда нүктенің нормаль үдеуі

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 4800 \cdot t^2.$$

4-мысал. Пойыз радиусы $R=800$ м шеңбер доғасы бойымен тең кемімелі қозғалыс жасайды және $s=800$ м жол жүргенде, бастапқы жылдамдығы $v_0=54$ км/сағ, ал соңғы жылдамдығы $v=18$ км/сағ тең болады (1.16.4-сурет). Пойыздың бастапқы және соңғы орнындағы толық үдеулерін, сонымен қатар осы доғаның ұзындығын жүріп өтетін уақытын анықтау қажет.

Шешуі: пойыздың бір нүктесінің қозғалысын қарастырамыз, мысалы ауырлық центрінің. Доғалық координаттың бас O нүктесін қозғалатын нүктенің бастапқы M_0 орнына қойып, қозғалыстың бағытын оң бағыт ретінде қабылдаймыз (1.16.4-сурет). Онда $s_0=0$.

Нүктенің тең айнымалы қозғалысы үшін, қозғалыс теңдеуі және жылдамдығы төмендегі формулалармен анықталады

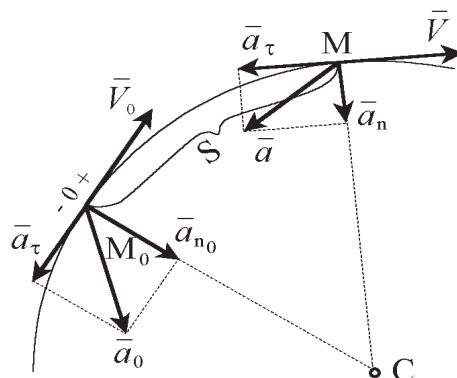
$$s = v_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2}, \quad v = v_0 + a_\tau \cdot t.$$

Мұндағы жанама кернеу тең кемімелі қозғалыс жағдайында теріс сан болып келеді.

Осы екі теңдеуден аламыз

$$a_\tau = \frac{v - v_0}{t}, \quad s = v_0 \cdot t + \frac{(v - v_0) \cdot t}{2}, \quad t = \frac{2s}{v + v_0}.$$

Есептің берілгені бойынша нүктенің жүрген жолы $s=800$ м, бастапқы жылдамдығы $v_0=54$ км/сағ $=15$ м/с, соңғы жылдамдығы $v=18$ км/сағ $=5$ м/с, шеңбер доғасының қисықтық радиусы $R=800$ м. Осыны ескере отырып табамыз



1.16.4-сурет

$$t = \frac{2 \cdot 800}{5 + 5} = 80 \text{ с}, \quad a_\tau = \frac{5 - 15}{80} = -0,125 \text{ м/с}^2.$$

Нүктенің бастапқы және соңғы орнындағы нормаль үдеуінің шамалары

$$a_{n_0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{15^2}{800} \approx 0,28 \text{ м/с}^2, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{800} \approx 0,03 \text{ м/с}^2.$$

Толық үдеудің бастапқы және соңғы орнындағы шамалары

$$a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n_0}^2} = \sqrt{0,125^2 + 0,28^2} \approx 0,308 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0,125^2 + 0,03^2} \approx 0,129 \text{ м/с}^2.$$

Мысал. Дизельдің қосиін жұдырықшасының қозғалысы: $x = 75 \cos 4t^2$, $y = 75 \sin 4t^2$ теңдеулерімен берілген. Жұдырықша жылдамдығын, жанама және нормаль құраушы үдеулерін табу керек.

Шешуі. Нүкте жылдамдығының өстерге проекцияларын анықтаймыз

$$V_x = \dot{x} = -600t \cdot \sin 4t^2, \tag{1}$$

$$V_y = \dot{y} = 600t \cdot \cos 4t^2.$$

Жылдамдық модулі мынадай формуламен анықталады

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{600^2 t^2 \sin^2 4t^2 + 600^2 t^2 \cos^2 4t^2} = 600t \text{ (см/с)}. \tag{2}$$

Жанама құраушы үдеуі жылдамдықтың жанама өске проекциясынан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d(600t)}{dt} = 600 \text{ (см/с}^2\text{)}. \tag{3}$$

Жылдамдықтың сәйкес өстердегі проекцияларынан уақыт бойынша бірінші туындыларын есептей отырып, үдеудің координаттар өстеріне проекцияларын анықтаймыз

$$a_x = \dot{V}_x = -4800 t^2 \cdot \cos 4t^2 - 600 \cdot \sin 4t^2,$$

$$a_y = \dot{V}_y = -4800 t^2 \cdot \sin 4t^2 + 600 \cdot \cos 4t^2.$$

Үдеу модулі мынадай формуламен анықталады

$$\begin{aligned} a^2 &= a_x^2 + a_y^2 = 4800^2 t^4 \cdot \cos^2 4t^2 + 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin 4t^2 + \\ &+ 600^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 4800^2 t^4 \cdot \sin^2 4t^2 - 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos^2 4t \cdot \sin^2 4t^2 + \\ &+ 600^2 \cdot \cos^2 4t^2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$a^2 = 4800^2 \cdot t^4 + 600^2$$

Толық үдеу мен жанама және нормаль құраушыларының арасында мынадай байланыс бар

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2. \quad (5)$$

(3)-ті ескере отырып (5) және (4)-тен алатынымыз

$$a_n^2 = 4800^2 t^4.$$

Осыдан

$$a_n = 4800t^2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

2.2 Қатты дененің қарапайым қозғалыстары

2.2.1 Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы

Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы деп оның әрбір екі нүктесін қосатын түзулердің кез келген өзіне-өзі тек параллель қозғалатындай қозғалыс түрін айтамыз. Демек ілгерілемелі қозғалыстағы дене бойынан алған кез келген түзу өзінің бастапқы бағытын өзгертпей сақтайды.

Қозғалмайтын $O_1\xi\eta\zeta$ өстер жүйесіне қатысты ілгерілемелі қозғалыс жасайтын қатты дене D берілсін. Оның кез келген бір нүктесі O -ны полюс ретінде қабылдап, денеге өзгерместей етіп бекітілген қозғалмалы координаттар жүйесін алайық.

Бұл қозғалмалы жүйенің өстерін негізгі жүйе өстеріне параллель бағыттаймыз (2.2.1-сурет). Таңдап алынған O -бас нүктенің қозғалмайтын $O_1\xi\eta\zeta$ жүйесімен салыстырғандағы кеңістіктегі орны $\bar{\rho}_0 = \overline{O_1O}$ радиус-векторымен, ал дененің кез келген M нүктесінің қозғалмалы $Oxuz$ жүйесімен салыстырғандағы орны $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус – векторымен анықталады. Дене абсолют қатты және тек қана ілгерілемелі қозғалыста болғандықтан \bar{r} радиус-вектор шамасы жағынан да, бағыты жағынан да тұрақты болады, яғни оның осы координаттар өстеріне проекциялары a, b, c тұрақты сандар болады. Суреттегі O_1OM векторлық үшбұрыштан, M нүктесінің $O_1\xi\eta\zeta$ жүйесіндегі орнын анықтайтын радиус-вектор $\bar{\rho}$ -ның өрнегін табамыз

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}, \quad (2.2.1.1)$$

мұндағы, $\bar{r} = \text{const}$.

Әртүрлі уақыт мезгіліндегі сәйкес нүктелерінің арасын қосатын кесінділер, мысалы OM кесіндісі, өзара параллель және тең болатын қисықтар (траекториялар) эквидистанттық немесе конгруэнтті қисықтар (траекториялар) деп аталады. Ілгерілемелі қозғалыстағы

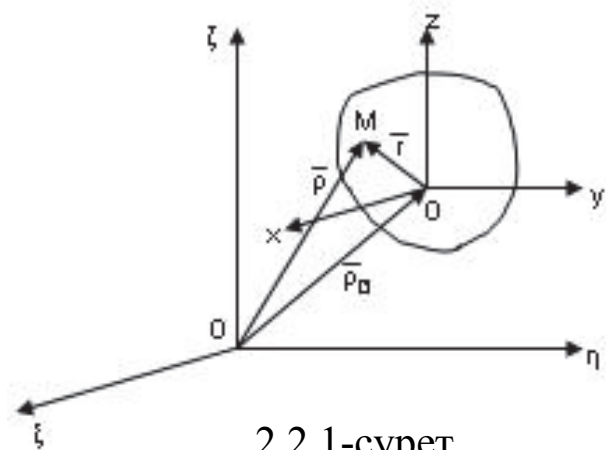
дене нүктелерінің траекториялары кез келген эквидистанттық қисық сызықтар болады.

Дененің (2.2.1.1) қозғалыс теңдеуінің екі жағынан да уақыт бойынша туынды аламыз. Сонда

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_0}{dt}, \text{ немесе } \bar{v}_M = \bar{v}_0, \quad (2.2.1.2)$$

яғни, ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің берілген бір уақыт мезгіліндегі жылдамдықтары өзара тең болады.

Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысын кез келген уақыт мезгілінде дененің барлық нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең болатын қозғалыс деп те атайды. Мұндай қозғалысты пермаменттік (тұрақты) ілгерілемелі қозғалыс деп атаймыз.



2.2.1-сурет

Дененің үдеу векторларының орналасуын анықтау үшін (2.2.1.2)-теңдіктен уақыт бойынша туынды ала аламыз

$$\bar{a}_M = \bar{a}_0, \quad (2.2.1.3)$$

яғни, пермаменттік ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт мезгіліндегі үдеулері өзара тең.

Сонымен, пермаменттік ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт мезгіліндегі сәйкес кинематикалық сипаттамалары бірдей, яғни олардың біреуінің ғана мысалы O нүктесінің қозғалысын зерттеп білсек болғаны.

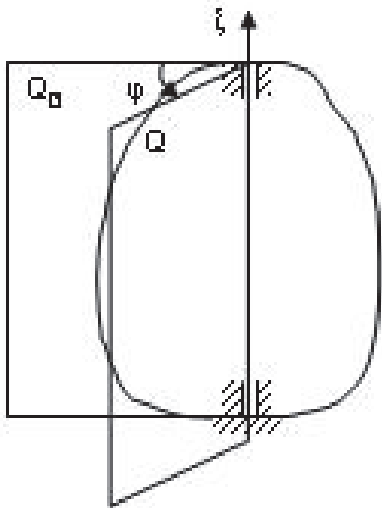
2.2.2 Қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысы

Қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын дене деп, екі нүктесі қозғалмайтын денені айтамыз. Қозғалмайтын нүктелерді қосатын түзу оның айналу өсі болады.

Қозғалмайтын O_0 және O жазықтықтарының арасындағы екі жақты бұрыш φ қатты дененің айналу бұрышы деп аталады. Бұл бұрыш берілген дененің кез келген уақыт мезгіліндегі орнын бірмәнді анықтайды. Демек, қозғалмайтын өсті айналатын қатты дененің бір ғана еркіндік дәрежесі болады. Дененің қозғалмайтын өс

төңірегіндегі орны бір параметрмен анықталады. Мұндай параметр рлің φ бұрышы атқарады. Ол уақыттың бірімәнді функциясы болып келеді

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.2.2.1)$$



2.2.2-сурет

Бұл (2.2.2.1) теңдеуі қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі деп аталады.

Айналу бұрышы φ –дің таңбасын анықтауда оң бұранда ережесіне сүйенеміз. Егер φ бұрышы айналу өсі $OzQin$ -оң ұшынан қарағанда қозғалмайтын Q_0 жарты жазықтықтан Q жарты жазықтыққа қарай сағат тілінің қозғалысына қарсы бағытта сана-латын болса, айналу бұрышын оң таңбалы деп санаймыз. Ал егер ол кері бағытпен анықталса, оны “-” таңбамен алуымыз

керек. Айналу бұрышы үнемі радианмен өлшенеді.

Дененің қозғалмайтын өсті айналуын сипаттауға қажетті екінші бір кинематикалық шаманы бұрыштық жылдамдық деп атайды. Оның алгебралық шамасы ω әрпімен белгіленеді. Бұрыштық жылдамдық ω дененің айналу бұрышы φ -дің уақыттың өтуіне қарай өзгеру тездігін белгілейтін шама. Алдымен белгілі бір уақыт аралығына сәйкес келетін айналу бұрышының өзгеруін қарастырайық. Егер оның t уақытына сәйкес мәні $\varphi(t)$ –болсын, ал уақыттың $t_1 = t + \Delta t$ мезгіліндегі мәні $\varphi(t + \Delta t)$ болсын. Демек Δt уақыт аралығында дене $\Delta\varphi$ бұрышына айналыс жасайды

$$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \quad (2.2.2.2)$$

осындағы айналу бұрышының өсімшесі (2.2.2.2)-нің оған сәйкес келетін уақыт өсімшесі Δt -ға қатынасын құрайық та, оны ω_{opt} деп белгілейік

$$\omega_{i\delta\delta} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.2.2.3)$$

$\omega_{i\delta\delta}$ орташа бұрыштық жылдамдығы деп атайды. (2.2.2.3)-тің екі жағында $\Delta t \rightarrow 0$ кездегі шегі

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{i\delta\delta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{i\delta\delta} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.2.2.4)$$

(2.2.2.4)-тің оң жағындағы шек $\varphi(t)$ функциясының туындысын береді.

Ал оның сол жағындағы шек дененің берілген t уақыт мезгіліндегі бұрыштық жылдамдығы ω -ны береді. Осы түсіндірмелерді қабылдап (2.2.2.4) теңдігін мына түрде жазамыз

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.2.2.5)$$

Бұрыштық жылдамдық векторлық шама. $\vec{\omega}$ – векторы дененің айналу өсінің бойында орналасып, оң бұранда ережесіне сәйкес келетін бағытпен бағытталады.

Жоғарыда айтылған φ бұрышын санаудың оң бағыты жөніндегі анықтаманы ескере отырып, бұрыштық жылдамдық векторын мынадай формуламен өрнектеуге болады

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \omega \vec{k}, \quad (2.2.2.6)$$

мұндағы \vec{k} , Oz өсінің бірлік векторы.

Дененің айналмалы қозғалысын сипаттаушы үшінші кинематикалық шама, бұрыштық үдеу ұғымына тоқтап өтейік. Алдымен орташа бұрыштық үдеуді анықтаймыз. Берілген t уақыт мезгіліндегі айналмалы қозғалыстың бұрыштық жылдамдығы $\omega(t)$ болсын, ал $t+\Delta t$ уақыт мезгілінде ол $\omega(t+\Delta t)$ болсын дейік. Сонда Δt уақыт аралығында бұрыштық жылдамдық өсімшесі мынаған тең болады

$$\Delta\omega = \omega(t + \Delta t) - \omega(t). \quad (2.2.2.7)$$

Осы шамалар қатынасын дененің Δt уақыты аралығындағы орташа бұрыштық үдеу деп атап, оны ε_{opt} әрпімен белгілейміз

$$\varepsilon_{i\delta\delta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (2.2.2.8)$$

Бұл қатынасты пайдалана отырып, дененің берілген уақыт t мезгіліндегі, яғни лездік бұрыштық үдеудің анықтамасын бере аламыз.

Берілген уақыттағы бұрыштық үдеу деп орташа бұрыштық үдеудің $\Delta t \rightarrow 0$ кездегі үдеудің шегін айтамыз. Бұрыштық үдеуді ε -деп белгілесек, айтылған анықтама мына формуламен беріледі

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{i\delta\delta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (2.2.2.9)$$

(2.2.2.9)–теңдіктің оң жағында $\omega(t)$ функциясының уақыт бойынша алынған туындысы тұрғанын ескерсек, оны мына түрде қайталап жаза аламыз

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ немесе } \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.2.2.10)$$

Бұрыштық үдеу бұрыштық жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең немесе φ айналу бұрышынан уақыт бойынша алынған екінші туындыға тең болатын шама. Бұрыштық үдеу векторы $\bar{\varepsilon}$ де айналу өсінің бойында орналасады. Бұрыштық үдеу векторын мынадай формуламен өрнектеуге болады

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \bar{k} \text{ немесе } \bar{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \bar{k}. \quad (2.2.2.11)$$

Бір қалыпты айналмалы және бір қалыпты айнымалы айналмалы қозғалыстар. Егер қозғалыс кезінде бұрыштық үдеу $\varepsilon=0$ болса, онда қозғалыс $\omega=\text{const}$ тұрақты бұрыштық жылдамдықпен орындалады. Мұндай қозғалысты бір қалыпты айналмалы қозғалыс деп атаймыз. Осындай қозғалыстың бұрыштық жылдамдығының анықтамасынан мынадай өрнек алынады

$$d\varphi = \omega dt.$$

Егер $t_0 = 0$ болғанда $\varphi = \varphi_0$ десек, соңғы теңдіктен мынадай формула шығады

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (2.2.2.12)$$

мұндағы бастапқы $\varphi_0 = 0$ болып келген жағдайда (2.2.2.12)–теңдіктен

$$\varphi = \omega t, \text{ және } \omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2.2.2.13)$$

Дененің айналысы кезінде оның бұрыштық үдеуі ε тұрақты болатын болса, онда мұндай айналмалы қозғалысты бір қалыпты айнымалы дейміз.

Бұрыштық үдеу анықтамасынан

$$d\omega = \varepsilon dt.$$

Бұл теңдікті сәйкес алынған шектерде ($t_0=0$ саналады) интегралдау арқылы, мынадай формула аламыз

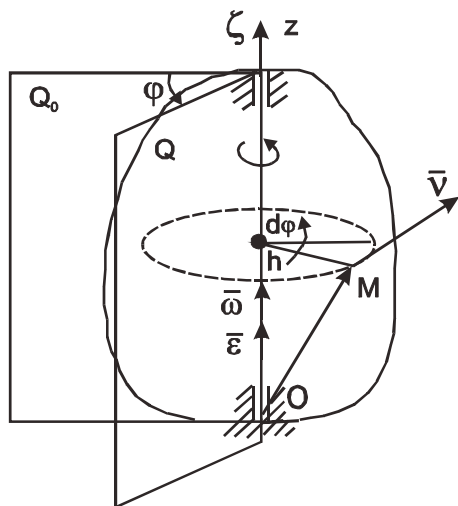
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (2.2.2.14)$$

Бұл формуламен $\varepsilon=\text{const}$ болған жағдайдағы бұрыштық жылдамдық анықталады. (2.2.2.13)–тің екі жағында dt -ға көбейтіп интегралдау арқылы мынадай формула аламыз

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (2.2.2.15)$$

2.2.3 Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары және үдеулері

Қозғалмайтын өсті айналатын қатты дене нүктелерінің қозғалысын қарастырайық. Мұндай дененің барлық нүктелерінің қозғалыс кезіндегі траекториялары, жазықтықтары айналу өсіне перпендикуляр, ал центрлері айналу өсінде жататын, концентрлі шеңберлер болады. Дененің айналу өсінен h қашықтықта жатқан кез келген бір нүктесі M -ді алайық. Бұл нүктенің жылдамдығының шамасы



2.2.3-сурет

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h \cdot \omega. \quad (2.2.3.1)$$

формуласымен есептелінеді, ал \vec{v} векторы, радиусы h , центрі O нүктесінде жататын шеңберге жанамамен, айналыс болатын жаққа қарай бағытталады (2.2.3-сурет).

(2.2.3.1)-ші формула нүкте M -нің жылдамдығын геометриялық әдіспен табуға мүмкіндік береді. Ал жылдамдықты векторлық тәсілді қолданып табуға да болады. Ол үшін берілген нүкте M -нің $Oxyz$ өстер жүйесіндегі $\vec{r} = \overline{OM}$ радиус-векторын алайық. Осы \vec{r} және $\vec{\omega}$ векторының векторлық көбейтіндісін құрайық: $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (2.2.3-сурет).

Бұл көбейтіндінің модулі

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = |\vec{\omega}| |\vec{r}| \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega h. \quad (2.2.3.2)$$

(2.2.3.2)-тендік, векторлық көбейтіндінің модулі, нүкте жылдамдығының (2.2.3.1) формуламен есептелінетін модуліне тең екенін көрсетеді. Осыдан соң $\vec{\omega} \times \vec{r}$ векторының бағытына тоқтайық. Бұл вектор, үшбұрыш ΔO_1MO жазықтығына M -нүктесіне тұрғызылған перпендикуляр бойыменен \vec{v} векторымен бірдей бір жаққа қарай бағытталғанын 2.2.3-суреттен көруге болады. Сонымен бұл айтылғандардан, екі вектор, $\vec{\omega} \times \vec{r}$ және \vec{v} бір-біріне тең екенін көреміз. Демек мынадай формуланың орынды екені дәлелденеді

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.2.3.3)$$

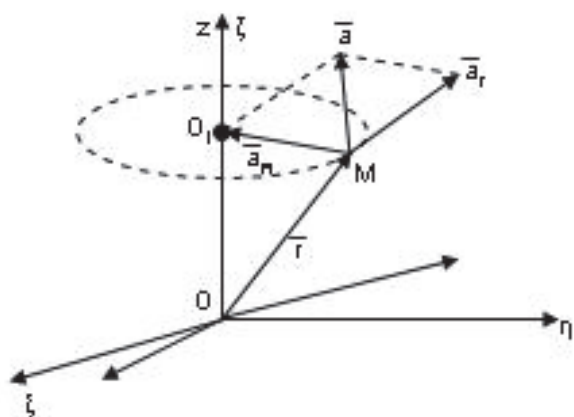
(2.2.3.3)-формула қатты дене кинематикасындағы маңызды формула. Бұл формула *Эйлер формуласы* деп аталады.

Дененің кез келген нүктесі M , радиусы $h=O_1M$ және жазықтығы айналу өсіне перпендикуляр орналасқан, шеңбер сыза отырып қозғалады дедік. Демек бұл нүктенің толық үдеуін екі құраушыға жіктеу арқылы анықтай аламыз (2.2.4-сурет). Шеңбер бойымен қозғалған нүктенің жанама үдеуі

$$\dot{a}_\tau = \frac{dv}{dt} = h \frac{d\omega}{dt} = h \cdot \varepsilon, \quad (2.2.3.4)$$

және оның нормаль үдеуі

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 h. \quad (2.2.3.5)$$



2.2.4-сурет

Егер дененің айналымы қозғалысы үдемелі болса, онда жанама үдеу жылдамдықпен бірдей бір жаққа қарай бағытталады, ал ол кемімелі болған жағдайда жанама үдеу жылдамдыққа қарама-қарсы жаққа қарай бағытталады. Ендігі жерде айналымы қозғалыстағы M нүктесінің толық үдеуі \bar{a} -векторын құраушылары \bar{a}_τ және \bar{a}_n

арқылы анықтау мына формулалар арқылы жүргізіледі

$$\bar{a} = a_\tau \bar{\tau} + a_n \bar{n}, \quad (2.2.3.6)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.2.3.7)$$

Егер \bar{r} векторының модулі $|\bar{r}| = \text{const}$ болып, оның бағыты ғана уақыт өсуіне қарай өзгертін болса, онда (2.2.3.3)-формуладан мынадай теңдік алынады

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.2.3.8)$$

Бұл теңдіктегі $\bar{\omega}$ радиус-вектор \bar{r} -дің бұрылуының бұрыштық жылдамдығы. Енді (2.2.3.8) теңдігінің екі жағынан уақыт бойынша туынды алайық

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.2.3.9)$$

(2.2.3.9)–теңдіктің оң жағындағы қосылғыш векторларды жеке-жеке қарастырайық. Ондағы бірінші қосылғыш вектор модулі M -нүктесінің жанама үдеуіне тең

$$\left| \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right| = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = |\varepsilon r \sin(\bar{\varepsilon}, \bar{r})| = \varepsilon h = a_{\tau}. \quad (2.2.3.10)$$

(2.2.3.10)–тің оң жағындағы бірінші вектор, M -нүктесіндегі жылдамдық векторы \bar{v} мен бағыттас. Демек, бұдан

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = \bar{a}_{\tau}. \quad (2.2.3.11)$$

Ал енді ондағы екінші қосылғыш вектордың модулі

$$\left| \bar{\omega} \times \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega^2 \times h = a_n. \quad (2.2.3.12)$$

Бұл вектор MO_1 түзуінің бойымен O_1 центріне қарай, айналу өсіне перпендикуляр бағытталады. Демек

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v} = \omega^2 h = a_n. \quad (2.2.3.13)$$

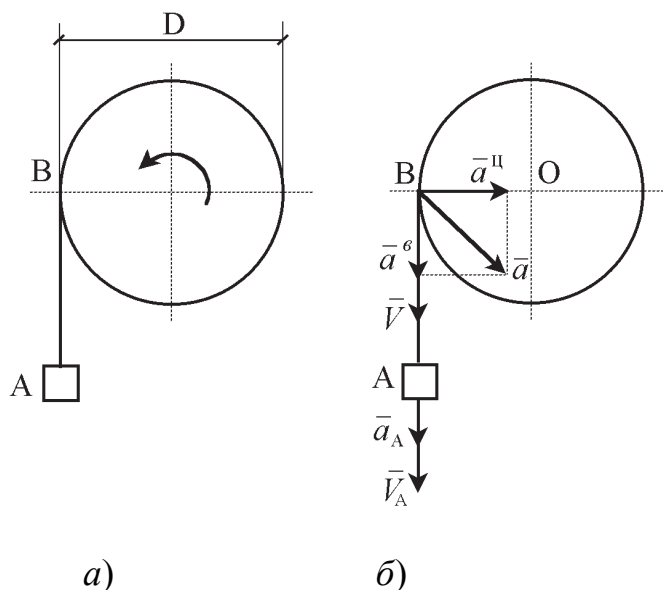
Сонымен, (2.2.3.4)-(2.2.3.4) формулаларын векторлық тәсілді қолданып та алуға болатынын көрсеттік.

Атанаққа оралған жіпке ілінген жүк A , атанақты айналмалы қозғалысқа келтіре отырып, тыныштық қалпынан бірқалыпты үдемелі төменгі бағытта қозғалады (1.17.3.а-сурет).

Атанақ бірінші 3 сек арлығында 9 айналыс жасайды. Атанақтың диаметрі $D=30$ см. Атанақ бетіндегі нүктенің және жүктің 5 сек уақыт мезгіліндегі жылдамдығын және үдеуін табу керек.

Шешуі: атанақтың тең айнымалы айналмалы қозғалыс теңдеуін және бұрыштық жылдамдығының формуласын жазамыз

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2},$$



1.17.3-сурет

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t.$$

Бастапқы $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ мәндерін ескере отырып, аламыз:

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad \omega = \varepsilon \cdot t.$$

Атанақтың $t = 3 \text{ c}$ уақыт мезгілінде айналу бұрышы белгілі:
 $\varphi = 2\pi \cdot N = 18\pi \text{ рад}$. Сонда атанақтың бұрыштық үдеуі

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot \varphi}{t^2} = 4\pi \text{ рад}/\text{c}^2 \quad \text{және} \quad t = 5 \text{ c} \text{ уақыт мезгіліндегі бұрыштық}$$

жылдамдығы $\omega = \varepsilon \cdot t = 4\pi \cdot 5 = 20\pi \text{ рад}/\text{c}$.

Атанақтың бетіндегі B нүктесінің (1.17.3.б-сурет) сызықтық жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін осы уақыт мезетінде анықтаймыз

$$v_B = R \cdot \omega = 0,15 \cdot 20\pi = 9,42 \text{ м}/\text{c},$$

$$a_{B\tau} = R \cdot \varepsilon = 0,15 \cdot 4\pi = 1,88 \text{ м}/\text{c}^2,$$

$$a_{Bn} = R \cdot \omega^2 = 0,15 \cdot (20\pi)^2 = 591,6 \text{ м}/\text{c}^2.$$

Атанақтың бетіндегі нүктенің толық үдеуінің модулі

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = \sqrt{1,88^2 + 591,6^2} \approx 592 \text{ м}/\text{c}^2.$$

Жүктің жылдамдығы атанақтың бетіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығына тең

$$v_A = v_B = 9,42 \text{ м}/\text{c}.$$

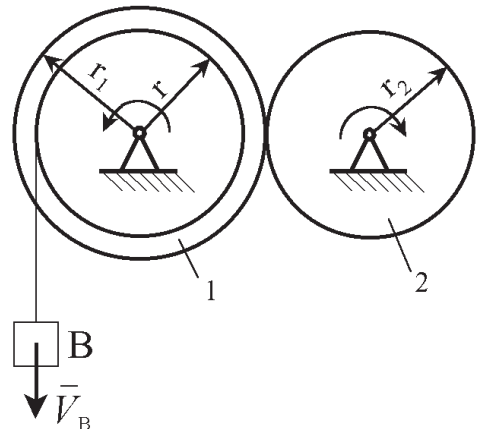
Жүктің үдеуі атанақтың бетіндегі нүктенің жанама үдеуіне тең

$$a_A = a_{B\tau} = 1,88 \text{ м}/\text{c}^2.$$

1.17.2-мысал. Радиусы r_1 тістегеріш 1-ге отырғызылған радиусы r білікті жүк B айналмалы қозғалысқа келтіреді. Жүк тыныштық қалпынан қозғалып бастайды және тұрақты a үдеуімен қозғалады. Тістегеріш 1-мен іліністе болатын радиусы r_2 тістегеріш

2-нің қозғалыс заңдылығын табу керек (1.17.4-сурет).

Шешуі: жүк B бастапқы жылдамдықсыз тұрақты a үдеуімен қозғалады, сондықтан кез келген уақыт мезетінде $v_B = a \cdot t$ болады.



1.17.4-сурет

Біліктің бетіндегі нүкте жылдамдығы осы жылдамдыққа және $\omega_1 r$ –ге тең. Сондықтан $\omega_1 \cdot r = a \cdot t$, $\omega_1 = \frac{a \cdot t}{r}$. Іліністегі нүкте C -ның сызықтық жылдамдығы екі тістегерішке ортақ

$$v_C = r_1 \cdot \omega_1 = \omega_2 \cdot r_2, \quad \text{осыдан} \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_1 = \frac{r_1 \cdot a \cdot t}{r_2 \cdot r}. \quad \text{Осыны}$$

интегралдау арқылы айналу бұрышын өрнектейміз

$$\varphi_2 = \int \omega_2 dt = \int \frac{r_1 \cdot a \cdot t}{r_2 \cdot r} dt = \frac{r_1 \cdot a \cdot t^2}{2r_2 \cdot r} + C.$$

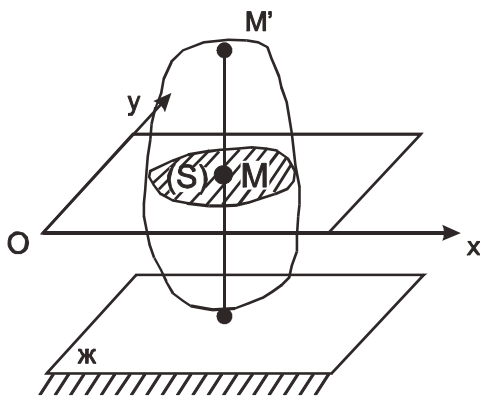
Егер айналу бұрышын бастапқы уақыт мезгілінен бастап есептесек, алынған өрнекке $t=0$ және $\varphi_2=0$ қою керек, сонда $C=0$ шығады. Нәтижесінде тістегеріш 2-нің айналмалы қозғалыс заңдылығын табамыз

$$\varphi_2 = \frac{r_1 \cdot a \cdot t^2}{2r_2 \cdot r}.$$

2.3 Қатты дененің жазық параллель қозғалысы

2.3.1 Қатты дененің жазық параллель қозғалысының заңы, оның анықталу тәсілдері

Егер қатты дененің барлық нүктелері қандайда бір қозғалмайтын жазықтыққа параллель қозғалатын болса, онда дененің мұндай қозғалысын жазық – параллель қозғалыс дейміз (2.3.1-сурет). Қозғалмайтын жазықтықты (ж)-деп белгілейік. Дененің O нүктесі арқылы (ж) жазықтығына параллель етіп (ж) жазықтығы дененің (S) қимасын береді.



2.3.1-сурет

Бұл (S) – қиманың барлық нүктелерінің негізгі (ж) – жазықтығынан қашықтықтары қозғалыс кезінде өзгермейді, тұрақты болады.

Демек, (S) – қимасы үнемі (ж) – жазықтығында жатады және ол өзінің пішінін өзгертпейді.

Сөйтіп, қатты дененің жазық-параллель қозғалысын зерттеу оның қозғалмайтын жазықтыққа параллель қималарының бірінің мысалы (S)-тің, жататын (ж) – жазықтықтың бетімен қозғалуын зерттеуге

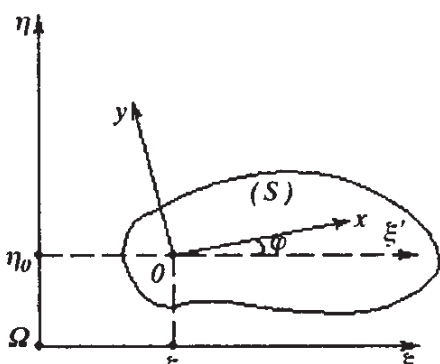
келтіріледі. Қозғалмайтын $\Omega\xi\eta\zeta$ және жазық фигура (S) -ке қатаң бекітілген $Oxyz$ координаттар жүйелерін таңдап алайық (2.3.2-сурет).

Қозғалмалы $Oxyz$ координаттар жүйесінің бас нүктесі O -ны бұдан былай «полюс»-дейміз.

Полюс O -ның өстеріне қатысты координаттарын ξ_0 және η_0 деп белгілейік. Сонда, мына теңдеулер

$$\xi = \xi_0(t), \quad \eta = \eta_0(t). \quad \varphi = \varphi_0(t). \quad (2.3.1.1)$$

жазық фигураның қозғалмайтын $\Omega\xi\eta$ координаттар жазықтығындағы қозғалысын анықтайды. Демек, бұлар жазық фигураның өз жазықтығындағы қозғалысының, күрделі қозғалыс екенін көрсетеді. Оны негізгі екі құрауышы қозғалысқа жіктеуге болады. Олардың



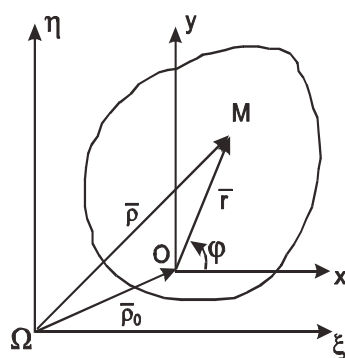
2.3.2-сурет

біреуі, жылдамдығы полюс жылдамдығына тең, ілгерілемелі қозғалыс, ал екіншісі, қозғалмайтын центр ретінде қарастырылатын полюс O арқылы өтіп, жазық фигура жазықтығына перпендикуляр орналасатын лездік өс жанындағы, лездік айналыс.

2.3.2 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене (жазық фигураның) нүктелерінің жылдамдықтары

Полюс ретінде алынған нүктені O деп белгілейік (2.3.3-сурет).

Мұндағы, $\bar{\rho} = \overline{\Omega M}$, $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{\rho}_0 = \overline{\Omega O}$.



(2.3.3-сурет)

Бұл үш вектор қозғалыстың кез келген мезгілінде мынадай векторлық теңдікті қанағаттандырып отырады

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}. \quad (2.3.2.1)$$

(2.3.2.1)-теңдіктің екі жағын да дифференциалдасақ, мынадай теңдік аламыз

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (2.3.2.2)$$

$$\text{мұндағы } \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{v}_M, \quad \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} = \bar{v}_0.$$

Ал (2.3.2.1) теңдігінің оң жағындағы екінші қосылғыш вектор, қозғалысы қарастырылып отырған, M нүктесінің қозғалмалы Oxy жүйесіне қатысты жылдамдығын өрнектейді. Бұл жылдамдық

векторын \vec{v}_{MO} -деп белгілейміз. Оқығанда оны M нүктесінің полюс O -ға қатысты алынған жылдамдығы деп атаймыз. Осы белгілеулер арқылы (2.3.2.2)-теңдікті мына түрде жазамыз

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}. \quad (2.3.2.3)$$

1-теорема. Жазық фигураның кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен осы нүктенің полюске қатысты алынған жылдамдығының геометриялық қосындысына тең.

M нүктесінің полюске қатысты жылдамдығы келесі формуламен анықталады

$$\vec{v}_{MO} = \vec{\omega} \times \overline{OM} \quad (2.3.2.4)$$

Оның шамасы $v_{MO} = \omega \cdot OM$, бағыты $\vec{v}_{MO} \perp \overline{OM}$ және бұрыштық жылдамдық бағытына сәйкес (2.3.4-сурет).

Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын есептеуге қолданылатын екінші теореманы (2.3.2.3) теңдіктен оңай алуға болады. Оның екі жағын да OM түзуіне проекциялаймыз. Сонда

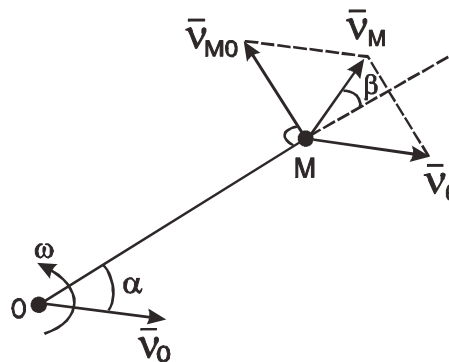
$$v_M \cos \beta = v_O \cos \alpha. \quad (2.3.2.5)$$

2-теорема. Жазық фигураның кез келген екі нүктесінің жылдамдықтарының осы нүктелер арқылы жүргізілген түзуге проекциялары өзара тең болады.

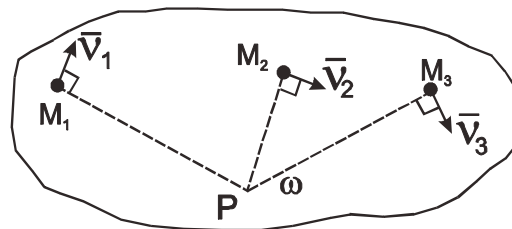
2.3.3 Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану арқылы есептеу

Жылдамдықтардың лездік центрі деп, берілген лездік уақыт t мезгілінде, жылдамдығы нөлге тең болатын жазық фигура жазықтығының бір нүктесін айтамыз.

Егер жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жылдамдығы берілсе және оның екінші бір нүктесінің жылдамдығының бағыты ғана белгілі болса, онда бұл фигура жазықтығының кез келген нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрі арқылы табуға болады.



2.3.4-сурет



2.3.5-сурет

Жазық фигура (S)-тің бір нүктесі M_1 -дің жылдамдық векторы \bar{v}_1 берілсін және оның екінші бір нүктесі M_2 -нің жылдамдық векторы жататын түзу бағыты белгілі болсын дейік (2.3.5-сурет).

M_1 және M_2 нүктелерінің жылдамдықтарының берілген бағыттары арқылы лездік центр P -ның орнын табамыз.

Олардың жылдамдықтары лездік радиустар PM_1 , PM_2 , PM_3 ұзындықтарына пропорционал болып келеді

$$v_1 = \omega \cdot PM_1, \quad v_2 = \omega \cdot PM_2, \quad v_3 = \omega \cdot PM_3,$$

мұндағы, ω жазық фигураның P центрді айналысының лездік бұрыштық жылдамдығы. Оны белгілі жылдамдық арқылы табуға

болады: $\omega = \frac{v_1}{PM_1}$. Осыдан қалған екі теңдіктердегіні орнына қойсақ

$$v_2 = v_1 \frac{PM_2}{PM_1}, \quad v_3 = v_1 \frac{PM_3}{PM_1}.$$

Жылдамдықтар бағыттары: $\bar{v}_{M1} \perp PM_1, \bar{v}_{M2} \perp PM_2, \bar{v}_{M3} \perp PM_3$.

2.3.4 Жазық параллель қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері

Жазық фигураның кез келген M нүктесінің үдеуі осы фигураның лездік ілгерілемелі және полюсті айнала қозғалысының үдеулерінің қосындысынан тұрады, яғни

$$\bar{a}_M = \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \frac{d\bar{v}_O}{dt} + \frac{d\bar{v}_{MO}}{dt^2} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MO}. \quad (2.3.4.1)$$

Мұндағы \bar{a}_{MO} - M нүктесінің полюске қатысты үдеуі, ол \bar{a}_{MO}^τ жанама және \bar{a}_{MO}^n нормаль құраушыларына жіктеледі. Онда

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n. \quad (2.3.4.2)$$

(2.3.4.2)–формула келесі теореманы береді.

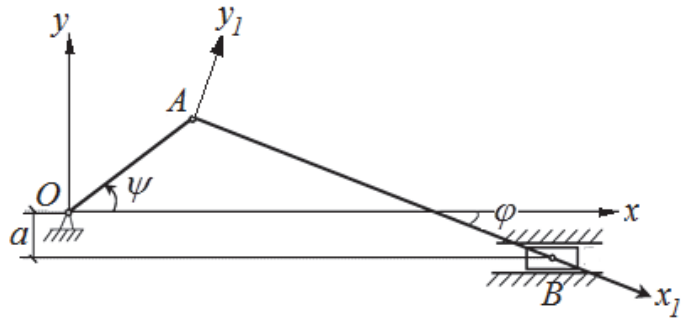
Теорема. Жазық фигураның қандайда бір нүктесінің жазық қозғалыс кезіндегі толық үдеуі полюс үдеуі мен бұл нүктенің полюске қатысты алынған үдеуінің векторлық қосындысына тең.

M нүктесінің полюске қатысты жанама және нормаль үдеулері келесі формулдармен анықталады:

$$\bar{a}_{MO}^\tau = \bar{\varepsilon} \times \overline{OM}, \quad \bar{a}_{MO}^n = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MO} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OM}) \quad (2.3.4.3)$$

Олардың шамалары: $a_{MO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OM$, $a_{MO}^n = \omega^2 \cdot OM$, бағыттары: $\vec{a}_{MO}^{\tau} \perp \overline{OM}$ және бұрыштық үдеу бағытына сәйкес, \vec{a}_{MO}^n полюске қарай бағытталады.

1-мысал. Қосиін-бұлғақты механизмде қосиіннің айналу центрі жылжыма B -ның көлденең траекториясынан a қашықтықта орналасқан (2.3.6-сурет). Қосиіннің бұрылу бұрышы $\psi = k \cdot t$ заңдылығымен өзгереді, мұндағы k – тұрақты коэффициент. Қосиіннің ұзындығы $OA = r$, ал бұлғақтың ұзындығы $AB = l$. Бұлғақ AB -ның жазық параллель қозғалыс теңдеулерін анықтау керек.



2.3.6-сурет

Шешуі: бас нүктесі O болатын қозғалмайтын xOy координаттар жүйесін жүргіземіз. Бас нүктесі A болатын қозғалмалы x_1Ay_1 координаттар жүйесін таңдап аламыз. Сонымен, қосиіннің A нүктесі полюс болады. Полюстің қозғалыс теңдеулерін жазамыз

$$x_A = OA \cdot \cos \psi = r \cdot \cos kt, \quad y_A = OA \cdot \sin \psi = r \cdot \sin kt.$$

Бұлғақтың бұрылу бұрышы мен уақыт арасындағы байланысы болатын үшінші теңдеуді табу үшін, AB кесіндісін y осіне проекциялаймыз. x_1 және x осьтерінің арасындағы бұрышты φ арқылы белгілеп, мынадай теңдік аламыз

$$AB \cdot \sin \varphi = OA \cdot \sin \psi + a,$$

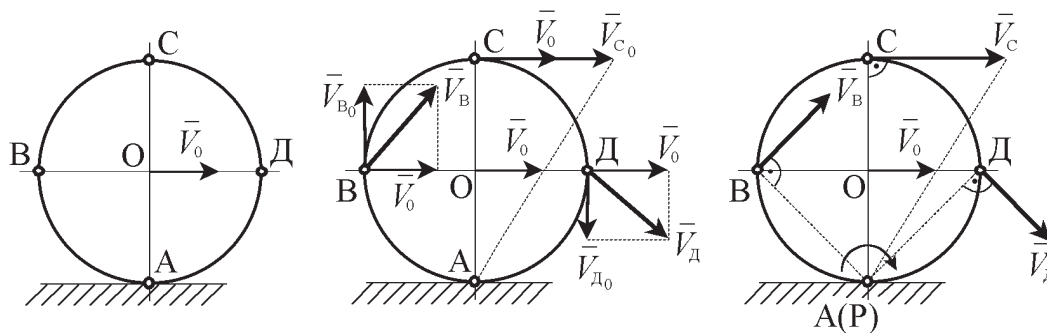
немесе, $AB = l$, $OA = r$, $\psi = k \cdot t$ болғандықтан

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \cdot \sin kt + \frac{a}{l}.$$

Бұлғақ AB -ның жазық параллель қозғалыс теңдеулері мынадай болады

$$x_A = r \cdot \cos kt, \quad y_A = r \cdot \sin kt, \quad \sin \varphi = \frac{r \cdot \sin kt}{l} + \frac{a}{l}.$$

2-мысал. Радиусы $R = 0,5$ м түзу рельс бойымен сырғанамай дөңгелеп қозғалады және оның центрінің жылдамдығы тұрақты $v_0 = 10$ м/с. Дөңгелектің көлденең және вертикаль диаметрлерінің соңғы A , B , C , D нүктелерінің жылдамдықтарын және дөңгелектің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.



2.3.7-сурет

Шешуі: I-тәсіл (жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтары туралы теореманы пайдалану).

Полюс ретінде O центрін қабылдаймыз (2.3.7-сурет). Онда дөңгелектің кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен полюсті айнала қозғалыс жылдамдығының геометриялық қосындысына тең, мысалы $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO}$. Дөңгелек сырғанамай дөңгелеп қозғалатын болғандықтан дөңгелек пен рельстің жанасушы A нүктесінің жылдамдығы нөлге тең $v_A=0$, яғни A нүктесі лездік жылдамдық центрі болып табылады. Бұл нүктеде полюсті айнала қозғалыс жылдамдығы \vec{v}_{AO} -мен полюс жылдамдығы \vec{v}_O -ның шамалары тең, ал бағыттары қарама-қарсы, яғни $\vec{v}_{AO} = -\vec{v}_O$.

A, B, C және D нүктелерінен полюске дейінгі ара қашықтықтары бірдей. Сондықтан, нүктелердің полюсті айнала қозғалыс жылдамдықтары өзара тең, яғни $v_{BO} = v_{CO} = v_{DO} = v_{AO} = v_O$.

Әрбір нүктеден полюс жылдамдығы \vec{v}_O -ны және дөңгелектің радиусына перпендикуляр полюсті айнала қозғалыс жылдамдығын тұрғызып алатынымыз

$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = v_O \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м / с},$$

$$v_C = v_O + v_{AO} = 2v_O = 20 \text{ м / с},$$

$$v_D = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = v_O \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м / с}.$$

Бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \frac{v_{BO}}{BO} = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ рад/с}.$$

II-тәсіл (жылдамдықтар лездік центрін пайдалану).

Дөңгелектің жылдамдықтар лездік центрі A -ны полюс ретінде қабылдаймыз. Онда дөңгелектің барлық нүктелерінің жылдамдықтары лездік жылдамдық центрін айнала қозғалыс жылдамдықтары болады. Барлық нүктелердің жылдамдықтарының шамалары мынадай қатынастармен анықталады

$$v_C = v_O \frac{PC}{PO} = v_O \cdot 2 = 20 \text{ м/с},$$

$$v_B = v_O \frac{PB}{PO} = v_O \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с},$$

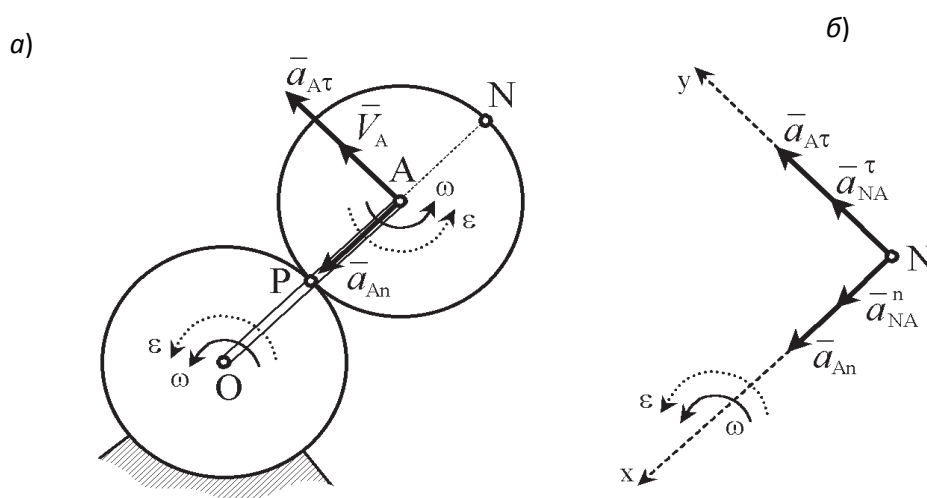
$$v_D = v_O \frac{PD}{PO} = v_O \cdot \sqrt{2} = 14,14 \text{ м/с}.$$

$$\text{Мұндағы } PB = PD = R \cdot \sqrt{2}.$$

Бұрыштық жылдамдығы мынадай қатынаспен анықталады

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ рад/с}.$$

3-мысал. Радиусы $R = 12 \text{ см}$ тістегерішті радиусы сондай қозғалмайтын тістегеріштің осі O -ға қатысты айнала қозғалатын қосиін OA қозғалысқа келтіреді. Қосиін $\varepsilon = 8 \text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады және бұрыштық жылдамдығы $\omega = 2 \text{ рад/с}$. 2-тістегеріштің N нүктесінің үдеуін анықтау керек (2.3.8.a-сурет).



2.3.8-сурет

Шешуі: Есепті шешу үшін 2-тістегеріштің қозғалысын қарастырамыз. Ондағы A нүктені полюс ретінде қабылдап, A нүктесінің жылдамдығын және үдеуінің құраушыларын анықтаймыз:

$$v_A = OA \cdot \omega = 2R \cdot \omega = 0,24 \cdot 2 = 0,48 \text{ м/с},$$

$$a_{A\tau} = OA \cdot \varepsilon = 0,24 \cdot 8 = 1,92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{An} = OA \cdot \omega^2 = 0,24 \cdot 2^2 = 0,96 \text{ м/с}^2.$$

\bar{v}_A , $\bar{a}_{A\tau}$, \bar{a}_{An} векторларының бағыттары 2.3.8,а-суретте көрсетілген.

Тістегеріш 2-нің бұрыштық жылдамдығы ω_2 – анықтаймыз. Тістегеріштің жанасу P нүктесі жылдамдықтардың лездік центрі болады, сондықтан $\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{R} = \frac{0,48}{0,12} = 4 \text{ рад/с}$.

ω_2 -ның бағытын (тістегеріштің айналу бағытын) \bar{v}_A анықтайды.

Тістегеріш 2-нің бұрыштық үдеуі ε_2 – ні анықтаймыз. $AP = R$ шамасы барлық уақытта тұрақты, сондықтан

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv_A}{dt} = \frac{a_{A\tau}}{R} = \frac{1,92}{0,12} = 16 \text{ рад/с}^2.$$

Нүкте N -нің үдеуін мынадай формуламен анықтаймыз

$$\bar{a}_N = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{NA}^\tau + \bar{a}_{NA}^n.$$

Бұл үшін \bar{a}_{NA}^τ және \bar{a}_{NA}^n үдеулерінің шамаларын анықтаймыз.

Біздің жағдайда $NA = R$, сонда

$$a_{NA}^\tau = NA \cdot \varepsilon_2 = 0,12 \cdot 16 = 1,92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{NA}^n = NA \cdot \omega_2^2 = 0,12 \cdot 16 = 1,92 \text{ м/с}^2.$$

Енді $\bar{a}_{A\tau}$, \bar{a}_{An} , \bar{a}_{NA}^τ , \bar{a}_{NA}^n векторларының бағыттарын көрсетеміз (2.3.8,б-сурет). Nx және Ny осьтерін жүргізіп, \bar{a}_N үшін векторлық теңдікті осы осьтерге проекциялаймыз

$$a_{Nx} = a_{An} + a_{NA}^n = 0,96 + 1,92 = 2,88 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Ny} = a_{A\tau} + a_{NA}^\tau = 1,92 + 1,92 = 3,84 \text{ м/с}^2.$$

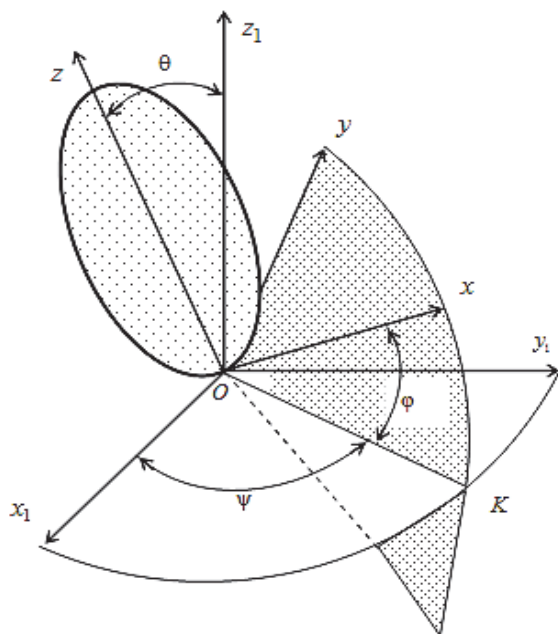
$$\text{Осыдан } a_N = \sqrt{a_{Nx}^2 + a_{Ny}^2} \approx 4,8 \text{ м/с}^2.$$

2.4 Қатты дененің қозғалмайтын нүктені айнала қозғалысы.

Еркін қатты дененің жалпы жағдайдағы қозғалысы

2.4.1 Бір нүктесі қозғалмайтын дененің қозғалысы

Бір нүктесі қозғалмайтын дененің қозғалысын айналмалы немесе



2.4.1 сурет

сфералық дене деп атау қабылданған. Қозғалмайтын жүйе $Ox_1y_1z_1$ және қарастырылып отырған денеге қатаң бекітілген жүйе $Oxyz$. Бұл координаттар жүйелерінің бастары болып дененің қозғалмайтын O нүктесі қабылданған (2.4.1 сурет).

Қатты дененің әр уақыт мезетінде сәйкес орнын, қозғалмайтын жүйенің орнымен салыстыра қарасақ, онда бұл дененің орны қозғалмалы жүйенің орнымен толық анықталады. Ал қозғалмалы жүйенің қозғалмайтын жүйеге қатысты орны белгілі бір бұрыштармен анықталады. Ондай бұрыштардың саны тоғыз. Бұл

бұрыштардың үшеуі ғана тәуелсіз бұрыштар, ал қалған алтауын осы тәуелсіз бұрыштар арқылы өрнектеу арқылы табуға болады. Бірақ, алты бұрыштарды тәуелсіз бұрыштар арқылы анықтау, әдетте, көп қиындық келтіреді, сондықтан, қозғалмайтын бір ғана нүктесі бар қатты дененің орнын анықтау үшін, көп жағдайда, ерекше бұрыштар қолданылады. Бұл бұрыштардың саны үшеу және олар Эйлер бұрыштары деп аталады.

Қозғалмалы жазықтықтың (xOy) қозғалмайтын жазықтықпен (x_1Oy_1) қиылысу нүктесін K әрпімен белгілейміз (2.4.1-сурет). Суретте көрсетілген OK сызығы түйіндер сызығы деп аталады. Егер Oz өсі Oz_1 өсіне кіші бұрышпен сағат тілінің айналуына қарсы бағытпен бұрылса, онда OK сызығының бағыты оң деп есептеледі.

Эйлер бұрыштары:

ψ - прецессия бұрышы, x_1Oy_1 жазықтығында жатады, түйіндер сызығы (OK) және Ox_1 өсінің арасындағы бұрыш;

φ - таза айналу бұрышы немесе меншіктік айналу бұрышы, xOy жазықтығында жатады, түйіндер сызығы (OK) және Ox өсінің арасындағы бұрыш;

θ - нутация бұрышы, zOz_1 жазықтығында жатады, Oz_1 және Oz өстерінің арасындағы бұрыш.

Аталған тоғыз бұрыштар Эйлер бұрыштары арқылы өрнектеліп, қатты дененің сфералық қозғалысын зерттеуді жеңілдетеді. Бір нүктесі қозғалмайтын қатты дене қозғалыста болған кезде Эйлер бұрыштары өзгеріп отырады.

Егер қатты дененің сфералық қозғалысының төмендегі теңдеулері (қатты дененің сфералық қозғалысының теңдеулері)

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (2.4.1.1)$$

берілсе, онда әр уақыт мезетінде сәйкес Эйлер бұрыштарын табуға болады, демек, дененің қозғалмайтын жүйеге қатысты орнын анықтауға болады.

Эйлер-Даламбердің теоремасы «Қозғалмайтын нүктесі бар кез келген дененің қарапайым орын ауыстыруы дегеніміз, осы қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін айналымның кейбір лездік айналу өсі төңірегінде қарапайым бұрылысы болатынын білдіреді» деп тұжырымдайды. Лездік айналу өсі осы уақыт мезетінде ғана қозғалыссыз болады және кез келген басқа уақыт мезетінде бұл басқа өс болып кетеді. Лездік айналу өсі дененің қозғалмайтын нүктесі арқылы өтіп, оның шеткі жоғарғы қабаты мен құрастырылған қабатын қозғалысы барысында сипаттайды.

Дененің қозғалысын сипаттау үшін бұрыштық жылдамдық векторы енгізіледі. Бұрыштық жылдамдық векторы $\bar{\omega}$ лездік айналу өсінде орналасқан және оның төбесінен айналуы сағат тілі жүрісіне қарсы бағытталған.

Қатты дененің лездік бұрыштық жылдамдығын, айналу қозғалысы секілді, вектор ретінде көрсетеміз. Вектор, айналу қозғалысы секілді, лездік айналу өсінің бойында жатады, ал оның бағытын денеге қараған кезде, ол сағат тіліне қарсы бағытта қозғалатын жаққа қарай бағыттаймыз. Бұрыштық жылдамдық векторын дененің қозғалмайтын нүктесіне түсірген ұтымды болады. Дененің лездік бұрыштық жылдамдығын $\bar{\omega}$ символымен белгілейміз. Дененің сфералық қозғалысы кезінде $\bar{\omega}$ шамасы, жалпылама алғанда, модулі мен бағыты өзгереді. Сонымен сфералық қозғалыстағы дененің лездік бұрыштық үдеуі деп $\bar{\omega}$ шамасының модулі мен бағытының өзгеруін сипаттайтын шаманы, яғни

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (2.4.1.2)$$

Векторлар $\bar{\omega}$ және $\bar{\varepsilon}$ бір осьтің бойымен бағытталмайды. Лездік бұрыштық жылдамдық векторы $\bar{\omega}$ лездік айналу өсінің бойымен бағытталады, ал $\bar{\varepsilon}$ векторы бұрыштық үдеуі өсі деп аталатын өстің бойымен бағытталады.

Лездік бұрыштық жылдамдық пен лездік бұрыштық үдеу, бір ғана қозғалмайтын нүктесі бар қатты дененің кинематикалық күйін сипаттайтын, негізгі шамалар болып табылады.

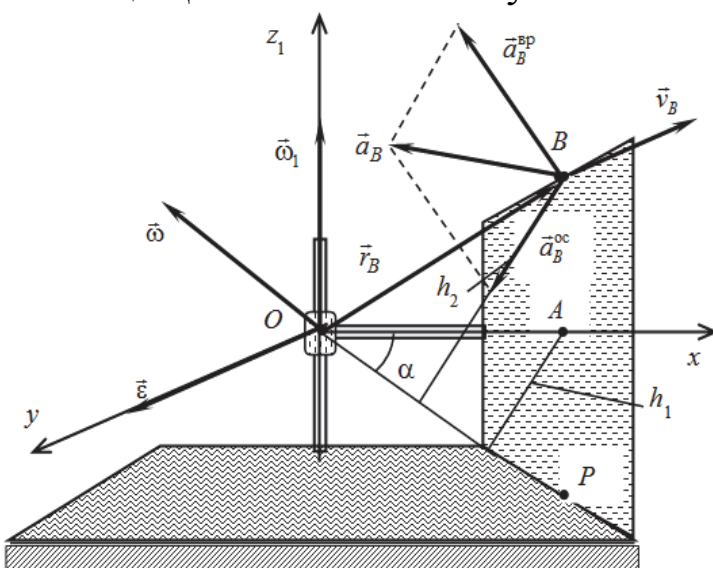
Бұрыштық жылдамдық өзгерісін ұзындығы және бағыты бойынша бұрыштық үдеу көрсетеді, сондықтан бұрыштық үдеу және бұрыштық жылдамдық коллинеарлы емес. Нүктенің жылдамдық векторы сияқты, бұрыштық жылдамдық векторының соңын сипаттайтын траекторияға бұрыштық үдеу жанама бойымен бағытталған.

Дене нүктесінің үдеуі мен жылдамдығы мынадай формуламен анықталады

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad \bar{a} = \bar{a}^{\text{айн}} + \bar{a}^{\text{oc}}, \quad \bar{a}^{\text{айн}} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{a}^{\text{oc}} = \bar{\omega} \times \bar{v}, \quad (2.4.1.3)$$

Мысал. - Қозғалмалы конустың Ox өсі қозғалмайтын Oz_1 өсіне қатысты тұрақты $\bar{\omega}_1$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады (2.4.2-сурет). Осы қозғалмалы конус қозғалмайтын конустың бүйір бетімен сырғанамай домалайды. P , A , B нүктелерінің жылдамдықтарын және қозғалмалы конустың бұрыштық жылдамдығын, сонымен қатар $\omega_1 = 1 \text{ рад/с}$, $OA = 50 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$ болғанда B нүктесінің үдеуін анықтау керек.

Шешуі. Ең алдымен дене айналысының лездік өсін орналастырып алайық. Қозғалмайтын конус бетімен қозғалмалы конус сырғанамай



2.4.2 сурет

қозғалатын болғандықтан, P нүктесін қос-қанда, осы уақыт мезетінде қозғалмалы конустың барлық нүктелері қозғалмайтын конус нүктелерімен сәйкес келеді. Бұл нүктелердің жылдамдықтары нөлге тең. Бұдан шығатын қорытынды, біріншіден, дененің лездік айналу өсі осы уақыт мезетінде OP түзуінде орналасқан, екіншіден, P нүктесінің жылдамдығы нөлге тең.

Ox өсінде жатқан A нүктесінің жылдамдығы $v_A = \omega_1 \cdot OA = 1 \cdot 50 = 50 \text{ см/с}$.

A нүктесінен лездік айналу өсіне дейінгі ара қашықтық h_1 -ді белгілеу арқылы дененің бұрыштық жылдамдығын табамыз

$$\omega = \frac{v_A}{h_1} = \frac{v_A}{OA \cdot \sin \alpha} = 2 \text{ рад/с. Ары қарай } B \text{ нүктесінің жылдамдығын}$$

анықтаймыз

$v_B = \omega \cdot h_2 = \omega \cdot 2h_1 = 100 \text{ см/с}$. B нүктесінің үдеуін анықтаймыз. $\vec{\omega}$ векторы қозғалмайтын Oz_1 өсінің төңірегінде айналады, оның бұрыштық жылдамдығы $\vec{\omega}_1$ модулі бойынша тұрақты болғандықтан $\vec{\omega}$ векторының модулі де тұрақты

$$\omega = \omega_1 \cdot \frac{OA}{OA \cdot \sin \alpha} = 2 \text{ рад/с} = \text{const.}$$

Осыған байланысты, оның уақыт бойынша алынған туындысын, яғни $\vec{\varepsilon}$ векторын, мына формула бойынша анықтаймыз $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$. Бұл вектор y өсі бойымен бағытталып, $\vec{\omega}_1$ және $\vec{\omega}$ векторлары орналасқан жазықтыққа перпендикуляр. Оның модулі

$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1,732 \text{ рад/с}^2.$$

B нүктесінің радиус-векторын қозғалмайтын нүкте арқылы жүргіземіз және оның үдеуінің құраушы векторларын анықтаймыз

$$r_B = OB = OA / \cos \alpha = 57,74 \text{ см},$$

$$\vec{a}_B^{\text{айн}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_B, \quad a_B^{\text{айн}} = \varepsilon \cdot OB = 100 \text{ см/с}^2,$$

$$\vec{a}_B^{\text{oc}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_B, \quad a_B^{\text{oc}} = \omega \cdot v_B = 200 \text{ см/с}^2.$$

Косинустар теоремасы бойынша $\vec{a}_B^{\text{айн}}$ и \vec{a}_B^{oc} векторларының арасындағы бұрышы 120° -қа тең, нүкте үдеуінің модулін табамыз

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{айн}})^2 + (a_B^{\text{oc}})^2 + 2 \cdot a_B^{\text{айн}} \cdot a_B^{\text{oc}} \cdot \cos 120^\circ} = 173,21 \text{ см/с}^2.$$

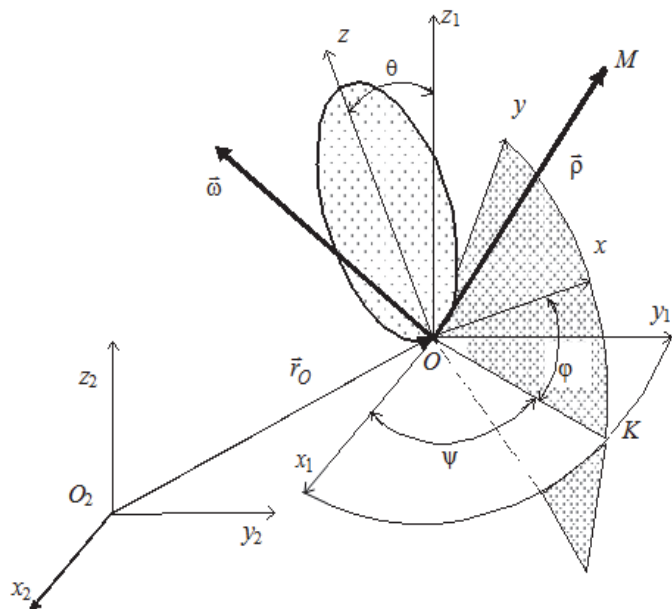
Айналмалы үдеу векторы жылдамдық векторымен бір түзудің бойында жатпайды.

2.4.2 Еркін қатты дененің қозғалысы

Еркін қатты дененің кеңістіктегі орнын анықтау үшін екі координаттар жүйесін алайық: $Ox_2y_2z_2$ қозғалмайтын жүйесі және қозғалыстағы денеге бекітілген қозғалмалы жүйесі $Oxyz$. Сонымен қоса, тағы бір $Ox_1y_1z_1$ жүйесін аламыз, бұл жүйенің басы екінші

жүйенің басымен бір нүктеде, яғни O нүктесінде болады, ал өстері қозғалмайтын жүйенің өстеріне параллель орналасқан (2.4.3-сурет).

Дененің қозғалмайтын координаттар жүйесіне қатысты кеңістіктегі орны, қозғалмалы жүйенің ($Ox_1y_1z_1$) кеңістіктегі орнымен



2.4.3 сурет

толығымен анықталады. Бұл қозғалмалы жүйенің, қозғалмайтын жүйеге қатысты орны, координаттар жүйесінің басы O нүктесімен және Ox, Oy, Oz осьтерінің $Ox_1y_1z_1$ жүйесіне қатысты орнымен анықталады.

Бұл кезде O нүктесінің қозғалмайтын жүйеге қатысты орны оның x_2, y_2, z_2 координаттарымен, ал $Ox_1y_1z_1$ жүйесіне қатысты орны Эйлер бұрыштарымен анықталады.

Дене еркін қозғалыста болған кезде, оның $O_2x_2y_2z_2$ қозғалмайтын жүйеге қатысты кеңістіктегі орнын анықтайтын алты шамалардың барлығы да өзгереді.

Дененің қозғалысы белгілі болу үшін, аталған алты шамалардың барлығы да, уақытқа тәуелді функциясы ретінде берілу керек, демек

$$\begin{aligned} x_{2O} &= f_1(t), & y_{2O} &= f_2(t), & z_{2O} &= f_3(t), \\ \psi &= f_4(t), & \varphi &= f_5(t), & \theta &= f_6(t). \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

Бұл теңдеулер, еркін қатты дене қозғалысының теңдеулері деп аталады. Сонымен, еркін қатты дененің еркіндік дәрежесі – алтау.

Алғашқы үш тәуелділіктер ілгерілемелі қозғалысқа, ал екінші үш тәуелділіктер – сфералық қозғалысқа сәйкес келеді.

Сфералық қозғалыс қазіргі жағдайда O полюсі арқылы өтетін лездік айналу өсінің төңірегіндегі қарапайым бұрылыстар сериясында берілуі мүмкін болғандықтан, дененің кез келген нүктесінің жылдамдығы мен үдеуі сәйкесінше ілгерілемелі қозғалыстың жылдамдығы мен үдеуінің, сонымен қатар полюске қатысты қозғалыстағы нүктенің жылдамдығы мен үдеуінің геометриялық жиынтығына тең болады. Еркін қатты дене қозғалысының жылдамдығы мен үдеуін анықтау үшін мынадай формуланы жазамыз

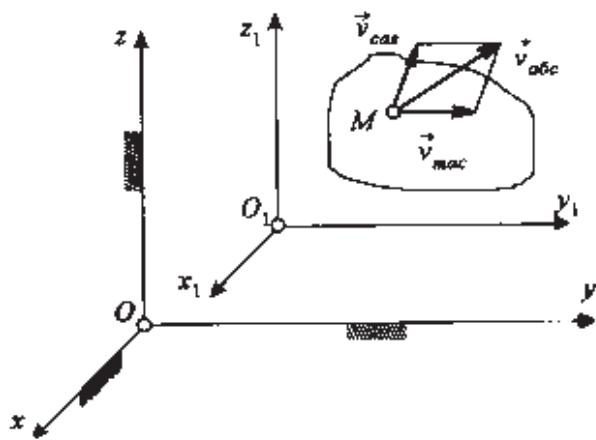
$$\bar{v} = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad \bar{a} = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}). \quad (2.4.2.2)$$

Мұнда \bar{v} және \bar{a} – дененің M нүктесінің жылдамдығы мен үдеуі; \bar{v}_O және \bar{a}_O – O полюсінің жылдамдығы мен үдеуі; $\bar{\omega}$ – дененің бұрыштық жылдамдығы. $Oxuz$ қозғалмалы координат жүйесіндегі M нүктесінің радиус-векторы $\bar{\rho}$.

2.5 Қатты дененің күрделі қозғалысы

2.5.1 Ілгермелі қозғалыстарды қосу

Қатты дене уақыт мезетінде ілгермелі қозғалыстың екі түрімен (салыстырмалы және тасымал) қозғалыста болсын (2.5.1-сурет).



2.5.1-сурет

$O_1x_1y_1z_1$ есептеу жүйесіне қатысты \bar{v}_{sal} жылдамдығымен, ал қозғалмайтын $Oxuz$ жүйесіне қатысты \bar{v}_{mac} жылдамдығымен қозғалыста болсын. Ілгермелі қозғалыс кезінде дене нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең (геометриялық тұрғыдан) болатындықтан, осы дененің нүктелерінің салыстырмалы және тасымал жылдамдықтары да геометриялық

теңдікте болады. Сондықтан, жылдамдықтарды қосу теоремасы негізінде – дене нүктелерінің абсолют жылдамдықтары сәйкес векторлар $(\bar{v}_{sal}, \bar{v}_{mac})$ арқылы тұрғызылған параллелограмның диагоналына тең болады

$$\bar{v}_{abs} = \bar{v}_{sal} + \bar{v}_{mac}. \quad (2.5.1.1)$$

Сонымен, егер қатты дененің екі ілгермелі қозғалысын қоссақ, онда дененің абсолют қозғалысы да ілгермелі қозғалыс болады, ал оның жылдамдығы осы қозғалыстың құраушы қозғалыстарының геометриялық қосындысына тең болады. Егер қатты дене уақыт мезетінде бірнеше ілгермелі қозғалыста болса, онда дененің абсолют қозғалысы да ілгермелі қозғалыс болады, ал оның жылдамдығы осы барлық қозғалыстардың құраушы қозғалыстарының геометриялық жиынына тең болады, яғни

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_n. \quad (2.5.1.2)$$

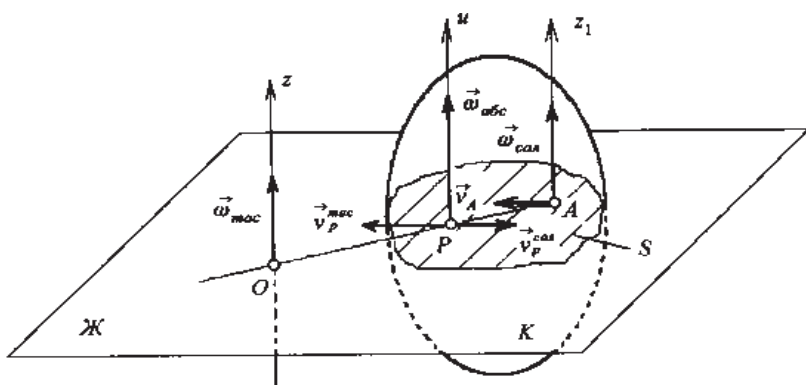
2.5.2 Қатты дененің параллель өстерді айналуындағы лездік айналуларын қосу

Егер қатты дене параллель өстерді айнала қозғалысы кезінде, бір уақытта, айнарудың екі түріне қатысса, онда оның барлық нүктелері айналу өсіне перпендикуляр жазықтықта қозғалады, яғни, дененің абсолют қозғалысы жазық қозғалыс болып табылады. Мұндай қозғалыстардың үш түрі болады.

Олар:

- 1) айнарудың құраушылары бір жаққа бағытталған;
 - 2) айнарудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айнарудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері бір-біріне тең болмайды;
 - 3) айнарудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айнарудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері өзара тең.
- Қозғалыстардың аталған түрлерін жеке-жеке қарастырайық.

1. Айнарудың құраушылары бір жаққа бағытталған.



2.5.2 сурет

Қатты дене Az_1 өсін айнала қозғалсын, ал бұл өстің өзі қозғалмайтын Oz өсін айнала қозғалсын (2.5.2-сурет). Бұл кезде дененің Az_1 өсін айнала қозғалуы салыстырмалы қозғалыс болады, ал дененің осы өспен бірге Oz өсін айнала қозғалуы – тасымал қозғалысы болып табылады.

Қатты дененің осы қозғалыстардағы бұрыштық жылдамдықтарын $\bar{\omega}_{сал}$ және $\bar{\omega}_{mac}$ символдарымен белгілейік. Қарастырылып отырған денені айналу өсіне перпендикуляр \mathcal{J} жазықтығымен екіге бөлеміз. Қиылған жердегі жазықтықтың түрі S фигурасымен көрсетілген. Осы жазықтық (S) қозғалысы дененің жалпы қозғалысын анықтайды.

Суретте көрсетілген A және O нүктелері \mathcal{J} жазықтығындағы айналу өстерінің іздері болып табылады. Уақыт мезетінде S фигурасының лездік жылдамдық центрі болатыны белгілі. Сонымен қатар, фигураның кез келген нүктесінің абсолют жылдамдығы

салыстырмалы және тасымал жылдамдықтарынан тұратынын ескерсек, онда бұл жылдамдықтардың өзара тең және қарама-қарсы бағытталатыны белгілі. Ал S фигурасының лездік жылдамдық центрі A және O нүктелерінің араларында жататын болғандықтан, ол нүктені P нүктесімен белгілейміз де, лездік жылдамдық центрі дейміз. Бұл кезде салыстырмалы жылдамдықтың модулі тасымал жылдамдығының модуліне тең болады, яғни $\bar{v}_P^{mac} = \bar{v}_P^{cal}$. Ал келесі шамалар $\bar{v}_P^{cal} = AP \cdot \bar{\omega}_{cal}$, $\bar{v}_P^{mac} = OP \cdot \bar{\omega}_{mac}$ бұрыннан белгілі болғандықтан

$$\frac{\omega_{cal}}{\omega_{mac}} = \frac{OP}{AP}. \quad (2.5.2.1)$$

Фигураның абсолют бұрыштық жылдамдығын табу үшін, A нүктесін қарастырайық. Бұл нүкте салыстырмалы қозғалысқа қатыспайды, сондықтан

$$\bar{v}_A^{abc} = \bar{v}_A^{mac}.$$

Бірақ $v_A^{abc} = AP \cdot \omega_{abc}$, $v_A^{mac} = OA \cdot \omega_{mac}$ және $OA = OP + AP$ болғандықтан (2.5.2.1)-ші формуланы пайдаланып, келесі өрнекті аламыз

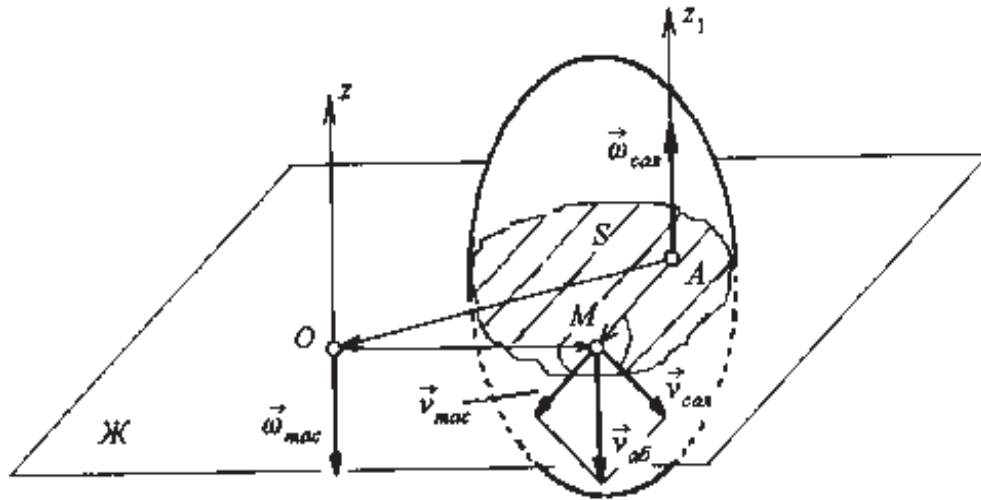
$$\bar{v}_{cal} = \bar{\omega}_{cal} \cdot AM. \quad (2.5.2.2)$$

Енді дененің қозғалысына келетін болсақ, оның осы мезеттегі абсолют қозғалысын лездік жылдамдық центрі арқылы өтетін және айналууды құрайтын өстерге параллель (Pu) лездік өсін айналу қозғалысы ретінде қабылдаймыз. Сонымен, қатты дененің параллель өстерді айналуындағы бір бағыттағы екі лездік айналысын қосқанда дененің абсолют қозғалысы пайда болады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығының модулі және құрама айналулардың бұрыштық жылдамдықтарының жиыны бір-біріне тең болады.

Лездік өс (Pu) дененің сыртында жатуы да мүмкін. Сонымен қатар, ол екі цилиндрлік беттер жасай отырып, кеңістіктегі орнын үнемі өзгертіп отырады.

2. Айналуудың құраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналуудың бұрыштық жылдамдықтарының модульдері бір-біріне тең болмайды.

Қатты дене Az_1 өсін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{cal}$ болсын, сонымен қатар, өс осы айналу өсімен бірге Oz өсін айнала қозғалсын (2.5.3-сурет), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{mac}$ болсын. Айналу бағыттары әртүрлі және $\omega_{mac} < \omega_{cal}$.



2.5.3-сурет

Жоғарыдағы ойымызды жалғастыра отырып, дененің осы мезеттегі абсолют қозғалысы лездік (Pu) өсін айнала қозғалысы болып табылады.

Қарастырылып отырған жағдайда лездік өс Oz және Az_1 өстерінің сырт жағында жатады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығы өзінің модулі бойынша, айналу кұраушы бұрыштық жылдамдықтардың модульдерінің айырмасына тең болады, яғни

$$\omega_{abc} = \omega_{cal} - \omega_{mac}. \quad (2.5.2.3)$$

Сонымен, қатты дененің параллель өстерді айналуындағы әр бағыттағы, бұрыштық жылдамдықтарының модульдері әртүрлі екі лездік айналысын қосқанда дененің абсолют қозғалысы пайда болады. Дененің абсолют бұрыштық жылдамдығының модулі, айналу кұрайтын бұрыштық жылдамдықтардың айырмасына тең болады.

Бұл кезде де лездік өстер екі цилиндрлік беттер жасай отырып, кеңістіктегі орнын үнемі өзгертіп отырады.

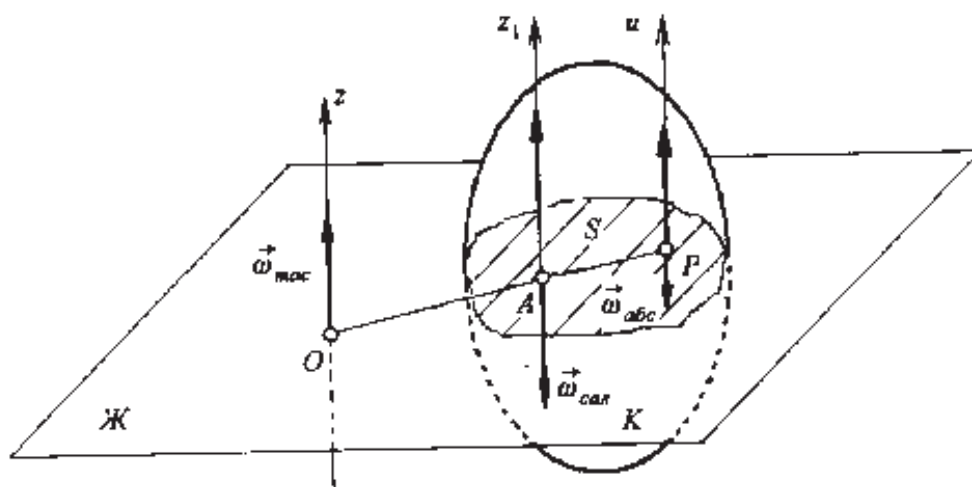
3. Айналу кұраушылары әр жаққа бағытталған, ал айналу кұраушы бұрыштық жылдамдықтарының модульдері өзара тең.

Қатты дене Az_1 өсін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{cal}$ болсын, сонымен қатар, ол осы айналу өсімен бірге Oz өсін айнала қозғалсын (2.5.4-сурет), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{mac}$ болсын. Айналу бағыттары әртүрлі және $\omega_{cal} = -\omega_{mac}$.

Қатты дененің параллель осьтердегі модульдері өзара тең, бірақ қарама-қарсы бағытталған бұрыштық жылдамдықтармен айнала қозғалысындағы екі лездік айнарудың осындай жиынтығы лездік айнарудың жұбы деп аталады.

Қарастырып отырған денені айналу өсіне перпендикуляр $Ж$ жазықтығымен екіге бөліп, қиылған жердегі S жазықтығының айналуын қарастырайық (2.5.4-сурет).

Осы S жазықтығының кез келген M нүктесінің салыстырмалы қозғалысы $v_{сал} = \omega_{сал} \cdot AM$ шамасына тең және тасымал қозғалысы Oz



2.5.4 сурет

болғандықтан, оның абсолют қозғалысы

$$v_{аб} = v_{сал} + v_{мас} = \omega_{сал} \cdot AM + \omega_{мас} \cdot OM.$$

Бұл өрнектегі $\bar{\omega}_{сал}$ шамасын $-\bar{\omega}_{мас}$ арқылы алмастырып, $OM - AM = OA$ екенін ескеріп, келесі формуланы аламыз

$$v_{аб} = \omega_{сал} \cdot OA = \omega_{мас} \cdot AO.$$

Бұл өрнектегі $\bar{\omega}_{мас}$ және OA шамалары M нүктесінің S жазықтығының қай жерінде орналасқанына тәуелді болмағандықтан, осы жазықтықтың барлық нүктелерінің жылдамдықтары бірдей деп қорытынды жасауға болады. Ал мұндай жағдай тек дененің лездік ілгермелі қозғалысына тән екені белгілі.

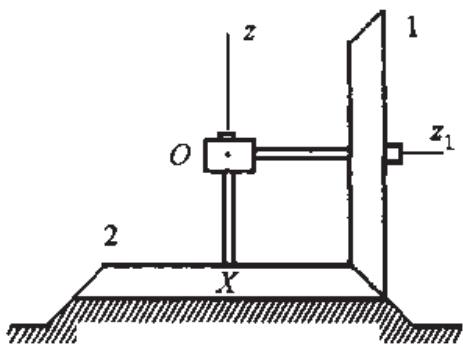
Сонымен, модульдері өзара тең және параллель, бірақ қарама-қарсы бағытталған екі бұрыштық жылдамдықтардың жұбы деп, ал \bar{v} векторы – бұрыштық жылдамдықтар жұбының моменті деп аталады, яғни

$$v = \omega_{мас} \cdot AO. \quad (2.5.2.4)$$

Егер қозғалыстың барлық уақытында бұрыштық жылдамдықтардың жұбы бар болса, онда мұндай қозғалыс үздіксіз (перманентті) ілгермелі қозғалыс болып табылады.

2.5.3 Қатты дененің өзара қиылысатын өстерді айналуындағы лездік айналуларын қосу

Қатты дененің өзара қиылысатын екі өстерді бір кезде айналуындағы құрама қозғалысын қарастырайық. Мұндай қозғалыстың мысалы ретінде 2.5.5-суретте көрсетілген механизмнің жұмысын келтіруге болады. Бұл суреттегі конус тәріздес 2-ші тісті доңғалақ (шестерня) қозғалмайды, ал 1-ші тісті доңғалақ қозғалыста (теңселу) болады.



2.5.5 сурет

Қатты дене уақыттың осы сәтінде Oz_1 өсін айнала қозғалсын, ал оның салыстырмалы бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{сал}$ болсын, сонымен қоса, ол осы айналу өсімен бірге қозғалмайтын Oz өсін айнала қозғалсын (2.5.5-сурет), ал оның бұл кездегі тасымал бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}_{мас}$ болсын. Айнарудың салыстырмалы және тасымал өстерінде жатқан O нүктесі қозғалмайтын нүкте, сондықтан дененің абсолют қозғалысы, осы қозғалмайтын O нүктесін айнала қозғалатын сфералық қозғалыс болып табылады, сонымен қатар, дененің осы сәттегі қозғалысы – қозғалмайтын нүкте арқылы өтетін лездік өсті айналу қозғалысы болып табылады.

2.5.4 Қатты дененің лездік ілгермелі және айналу қозғалыстарын қосудың жекеленген түрлері

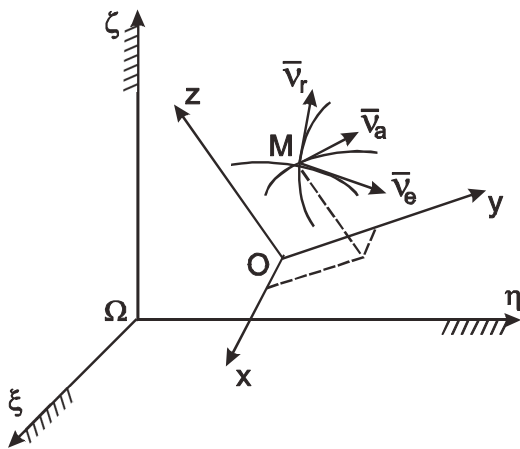
Қатты дененің күрделі қозғалысы лездік ілгерлемелі қозғалысынан және айналу қозғалысынан тұруы мүмкін. Мысал ретінде вертолеттің пропеллерінің қозғалысын келтіруге болады.

Күрделі қозғалыстың үш түрін айыруға болады:

- ілгерлемелі қозғалыстың жылдамдығы айналу өсіне перпендикуляр;
- ілгерлемелі қозғалыстың жылдамдығы айналу өсіне параллель;
- ілгерлемелі қозғалыстың жылдамдығы айналу өсімен сүйір немесе доғал бұрыш жасайды.

2.6 Нүктенің күрделі қозғалысы

2.6.1. Салыстырмалы, тасымал және абсолют қозғалыстары



2.6.1-сурет

Кейде берілген M нүктесінің қозғалысын бір мезгілде екі координаттар жүйесіне қатысты қарастыру керек. Осы екі жүйенің бірін $\Omega\xi\eta\zeta$ -деп белгілеп, оны шартты түрде қозғалмайтын (немесе негізгі) деп ұйғарайық. Екінші координаттар жүйесі $Oxyz$, негізгі жүйеге қатысты кез келген түрдегі қозғалыс жасайтын болсын. Ал берілген нүкте M қозғалмалы жүйеге қатысты өзі де қозғалыс жасайды және оның бұл

қозғалысы $Oxyz$ жүйе қозғалысына тәуелсіз болып келеді дейік (2.6.1-сурет).

Негізгі $\Omega\xi\eta\zeta$ -ға қатысты нүктенің қозғалысын шартты түрде абсолют (күрделі) қозғалыс деп атаймыз. Оның абсолют жылдамдығын \bar{v}_a , үдеуін \bar{a}_a деп белгілейміз.

M -нүктесінің қозғалмалы $Oxyz$ жүйесіне қатысты қозғалысы салыстырмалы қозғалыс ретінде алынады.

Салыстырмалы қозғалыс жылдамдығы \bar{v}_r , салыстырмалы үдеу \bar{a}_r -деп белгілінеді.

Қозғалушы M нүктенің жылжымалы жүйе $Oxyz$ -ке ілесе қозғалуы оның тасымал қозғалысы ретінде алынады. Тасымал қозғалыс жылдамдығы \bar{v}_e , тасымал үдеу \bar{a}_e -деп белгіленеді.

Мысал. Жүк көтергіш суреттегі жазықтыққа перпендикуляр және нүкте O арқылы өтетін өсті тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады: $\varphi = kt$. Жүк көтергіштің Ox_1 өсімен сәйкес келетін сйдағы бойымен қозғалатын арбашық M -нің қозғалыс теңдеулері мынадай түрде берілген

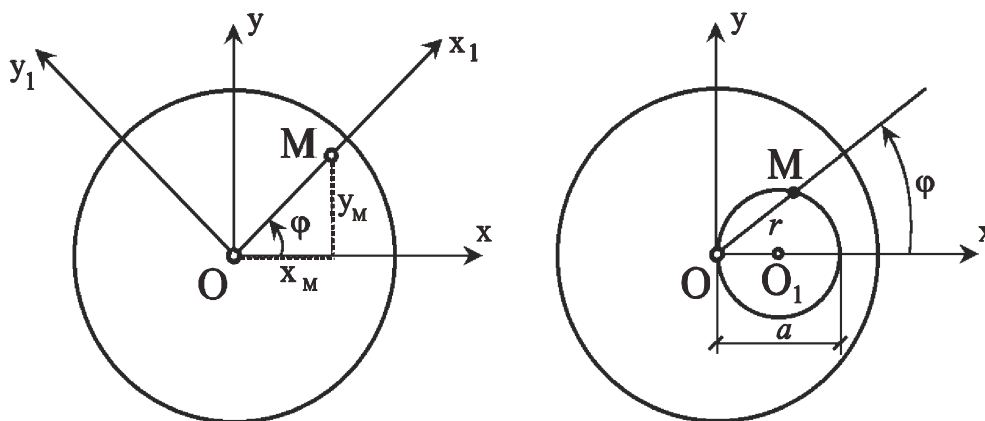
$$x_1 = \alpha \cos kt, \quad y_1 = 0.$$

Арбашық M -нің абсолют қозғалыс теңдеулерін және оның траекториясын анықтау керек (2.6.2, a -сурет).

Шешуі. Жүк көтергіштің өсті тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалысы тасымал қозғалысын береді. Арбашықтың сйдақ

бойымен қозғалысын, оның салыстырмалы қозғалысы ретінде қарастырамыз.

Бұл жағдайда қарастырып отырған M -нүктесінің абсолют координаттары мына түрдегі формулалармен анықталады:



2.6.2-сурет

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cdot \cos \varphi - y_1 \cdot \sin \varphi, \\ y &= x_1 \cdot \sin \varphi - y_1 \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Біздің есепте

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cdot \cos kt, \\ y_1 &= 0, \quad \varphi = kt. \end{aligned} \right\}$$

Сөйтіп, M нүктесінің абсолют қозғалысының заңы мынадай теңдеулерімен беріледі

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \cdot \cos^2 kt, \\ y &= a \cdot \cos kt \cdot \sin kt. \end{aligned} \right\}$$

Күрделі қозғалыс траекториясын полярлық координаттар жүйесінде алған тиімді

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a \cdot \cos kt, \quad \varphi = kt.$$

Осыдан

$$r = a \cdot \cos \varphi.$$

Бұл теңдеу диаметрі a -ға тең жүйенің бас нүктесі арқылы өтетін шеңбердің теңдеуі (2.4.2, б-сурет).

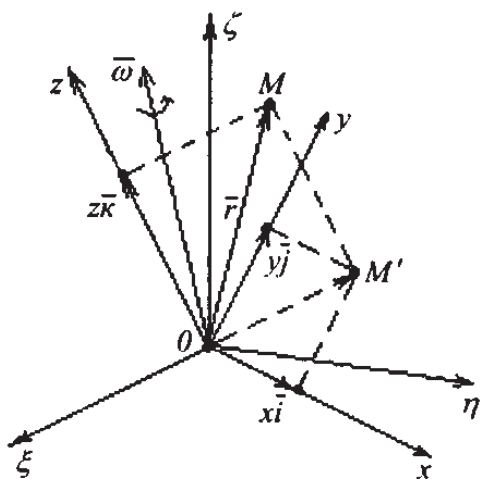
2.6.2. Қозғалмалы координаттар өстеріндегі өзінің құраушылары арқылы берілген вектордың абсолют және салыстырмалы туындылары

Нүктенің күрделі қозғалысын әрі қарай қарастыру кезінде кез келген қозғалыстағы координаттар жүйесіне байланысты анықталған вектордан уақыт бойынша туынды алу мәселесі келіп туындайды. Міне, осыған байланысты вектордың абсолют және салыстырмалы туындылары деген ұғымдарды пайдалануымыз қажет болады. Осы ұғымдардың тиісті анықтамаларына тоқтап, одан соң вектордың абсолюттік туындысы мен салыстырмалы туындылары арасындағы байланыстарды табуымыз керек. Ол үшін қозғалмайтын координаттар жүйесі $O\xi\eta\zeta$ мен қатар, оған қатысты, лездік бұрыштық жылдамдығы $\bar{\omega}$ -ға тең сфералық қозғалыс жасайтын $Oxyz$ қозғалмалы координаттар жүйесі берілген дейік (2.6.3-сурет). Олардың бас нүктелері полюс O –да жататын болсын.

Қандайда уақыт t -ға тәуелді өзгертін вектор $\bar{r} = \bar{r}(t)$, қозғалмалы координаттар жүйесіне қатысты алынған вектор болсын, яғни оның осы санақ жүйесінің өстеріндегі проекциялары белгілі уақыт функциялары болып келген дейік. Демек, бұл вектор өзінің қозғалмалы өстердегі проекциялары арқылы жіктелген

$$\bar{r}(t) = r_x(t) \cdot \bar{i} + r_y(t) \cdot \bar{j} + r_z(t) \cdot \bar{k}. \quad (2.6.2.1)$$

мұндағы, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ –векторларын тұрақты деп алынған сәттегі (2.6.2.1)-теңдікпен берілген. \bar{r} векторынан уақыт бойынша алынған туындыны *вектордың салыстырмалы туындысы* дейміз.



2.6.3-сурет

Салыстырмалы туындыны $\frac{\tilde{d}}{dt}$ символымен белгілейміз. Сонда бұл анықтаманы өрнектейтін мынадай теңдік аламыз

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dr_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dr_z}{dt} \cdot \bar{k}. \quad (2.6.2.2)$$

Бұл формула $\bar{r} = \bar{r}(t)$ векторының $Oxyz$ қозғалмалы координаттар жүйесіне қатысты өзгеру тездігін (жылдамдығын) көрсетеді. Осы формуладан вектордың өзгеру тездігі

оның қозғалмалы өстердегі проекцияларының өзгеруіне тәуелді болып келетінін байқаймыз.

(2.6.2.1)-теңдіктің екі жағынан (2.6.2.2)-теңдікті ескере отырып уақыт бойынша толық туынды аламыз

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + r_x \frac{d\bar{i}}{dt} + r_y \frac{d\bar{j}}{dt} + r_z \frac{d\bar{k}}{dt}, \quad (2.6.2.3)$$

мұндағы бірлік векторлардан уақыт бойынша алынған туындыларды қатты дене кинематикасында анықталған Эйлер формуласының көмегімен түрлендіреміз

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega} \times \bar{i}), \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = (\bar{\omega} \times \bar{j}), \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = (\bar{\omega} \times \bar{k}) \quad (2.6.2.4)$$

(2.6.2.4) теңдіктерден (2.6.2.3) теңдігіндегі орындарына қоямыз

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{dt} &= \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + r_x (\bar{\omega} \times \bar{i}) + r_y (\bar{\omega} \times \bar{j}) + r_z (\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} (r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}) = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{r}). \end{aligned}$$

Сонымен, соңғы теңдіктен вектордың абсолюттік (толық) туындысы мен салыстырмалы (локальды) туындысын байланыстыратын мынадай формула аламыз

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.6.2.5)$$

(2.6.2.5)-формуланы кинематиканың, вектордың салыстырмалы туындысы жөніндегі, леммасы деп атайық. Мұндағы, $\tilde{d}\bar{a}/dt$ вектор \bar{a} -ның салыстырмалы туындысы, ал $\bar{\omega}$ -қозғалмалы координаттар жүйесі $Oxyz$ –тің полюс O нүктесі арқылы өтетін өске катысты айналуының бұрыштық жылдамдығы. Осы айтылғандарды пайдалана отырып (2.6.2.5) формуласын мынадай лемма түрінде айта аламыз.

Лемма. *Вектордың уақыт бойынша алынған абсолют туындысы сол вектордың салыстырмалы туындысына бұрыштық жылдамдық векторымен вектордың өзін векторлық түрде көбейтіп алып қосқанда шығатын векторға тең.* (2.6.2.5)

Осы тақырып соңында мынадай ескерту айтамыз. Кинематиканың салыстырмалы туынды туралы леммасы (2.6.2.2)-теңдік түріндегі жіктелуімен берілген векторлар үшін қолданылады. Салыстырмалы туынды ұғымы тек осындай векторларға арналған.

2.6.3. Жылдамдықтарды қосу туралы теорема

Бізге күрделі қозғалыстағы M нүктесі берілсін. Осының алдында айтқанымыздай бұл нүктенің қозғалмайтын жүйеге қатысты орны $\bar{\rho}$ -радиус-векторымен, ал қозғалмалы жүйеге қатысты \bar{r} -радиус-векторымен анықталып отыратын болсын. Сонда

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}, \quad (2.6.3.1)$$

мұндағы, $\bar{\rho}_0$ полюс үшін алынған O нүктесінің радиус векторы.

Анықтама бойынша нүктенің абсолют жылдамдығы \bar{v}_a , оның радиус векторынан уақыт бойынша алынған абсолют туындысына тең

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}}{dt}, \quad \bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (2.6.3.2)$$

мұндағы, бірінші қосылғыш O –полюстің абсолют жылдамдығын

$$\bar{v}_0 = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt}, \quad (2.6.3.3)$$

береді, ал екінші қосылғыш нүктенің полюске қатысты радиус-векторының абсолют туындысын өрнектейді.

Сондықтан

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{r}), \quad (2.6.3.4)$$

мұндағы ω -қозғалмалы $Oxyz$ санақ жүйесінің бұрыштық жылдамдығы. Салыстырмалы туынды

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dr_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dr_z}{dt} \cdot \bar{k} = \bar{v}_r. \quad (2.6.3.5)$$

(2.6.3.5)-теңдік нүктенің салыстырмалы жылдамдығын береді.

(2.6.3.5)–теңдікті (2.6.3.4)-тің орнына қойсақ мынадай формула шығады

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_r + (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.6.3.6)$$

Енді (2.6.3.3) және (2.6.3.6) теңдіктері арқылы (2.6.3.2)–теңдікті соңғы түріне келтіреміз

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + \bar{v}_r + (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.6.3.7)$$

(2.6.3.7)–формула қозғалушы нүкте M -нің абсолют жылдамдығын өрнектейді.

Қозғалушы нүктені қозғалмалы жүйеге ойша бекітілген деп жоримыз, яғни $\bar{v}_r = 0$. Сонда M нүктесі қозғалмалы жүйемен тек

тасымалданады. Бұл жағдайда (2.101) –формуладан мынадай формула шығады

$$\bar{v}_e = \bar{v}_o + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \quad (2.6.3.8)$$

Қозғалушы M –нің абсолют жылдамдығы өрнектейтін (2.6.3.7) (2.120) формуланы ықшамдалған түрге келтіреміз

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r \quad (2.6.3.9)$$

(2.6.3.9)–формула жылдамдықтарды қосу туралы теореманы береді.

Теорема. Нүктенің абсолют жылдамдығы тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың векторлық қосындысына тең болады.

2.6.4 Үдеулерді қосу туралы теорема (Кориолис теоремасы)

M нүктесінің \bar{a}_a -абсолют үдеуін қарастырайық. Анықтама бойынша нүктенің абсолют үдеуі абсолют туындыға тең

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d(\bar{v}_r + \bar{v}_e)}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_e}{dt}. \quad (2.6.4.1)$$

Тасымал жылдамдық және салыстырмалы жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туындыларды жеке-жеке қарастырайық

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_o}{dt} + \frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r})}{dt} = \frac{d\bar{v}_o}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (2.6.4.2)$$

мұндағы, \bar{r} радиус-векторынан уақыт бойынша алынған абсолют туындыны есептеуге мына формуланы қолданамыз

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.6.4.3)$$

Салыстырмалы радиус-вектор \bar{r} -дің салыстырмалы туындысы, анықтама бойынша салыстырмалы жылдамдықты береді

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \bar{v}_r, \quad (2.6.4.4)$$

(2.6.4.1) теңдікті ескере отырып, (2.6.4.3), (2.6.4.4)–теңдіктерді(2.4.4.2)–дегі орнына қоямыз. Сонда (2.6.4.1)–теңдіктен тасымал жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туындыны өрнектейтін формула аламыз

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_o}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\omega} \times \bar{v}_r.$$

(2.6.4.1)–теңдіктің оң жағындағы екінші қосылғыш вектор салыстырмалы жылдамдықтан уақыт бойынша алынған абсолют туынды. Ал салыстырмалы жылдамдық өзінің қозғалмалы координаттар жүйесі өстеріндегі проекциялары арқылы мына түрде беріледі

$$\bar{v}_r = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}.$$

Сондықтан да $d\bar{v}_r/dt$ -ны есептеуді өрнектейтін формуланы қолдана аламыз

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r. \quad (2.6.4.5)$$

(2.6.4.4) және (2.6.4.5)–теңдіктерді пайдалана отырып, (2.6.4.1)–теңдіктен мына түрдегі формулаға келеміз

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r + \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt}. \quad (2.6.4.6)$$

(2.6.4.6)–теңдік іздеп отырған M нүктесінің абсолют үдеуінің өрнегін береді. Бұл үдеуді, кейде күрделі қозғалыстағы M нүктесінің толық үдеуі деп те атаймыз.

(2.6.4.6)–теңдіктің оң жағындағы қосылғыштардың кинематикалық мазмұндарын ашайық.

Егер $\bar{\omega} = 0$, $\bar{v}_0 = 0$ болса, онда (2.6.4.6)–теңдік осы жағдайда мынадай түрге келеді

$$\bar{a}_r = \frac{\tilde{d}\bar{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.6.4.7)$$

Егер $\bar{v}_r = 0$, $\bar{a}_r = 0$ болса, онда

$$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.6.4.8)$$

Соңғы теңдіктегі $\bar{a}_0 = d\bar{v}/dt$ полюс O -ның үдеуін белгілейді. (2.6.4.8)–теңдік, нүктенің тасымал жылдамдығы \bar{v}_e -нің тасымал қозғалыс кезіндегі өзгеру тездігін сипаттайды. Оны тасымал үдеу дейміз.

Зерттеп отырған (2.6.4.1)–теңдіктің оң жағында әлі аты аталмаған, екі еселенген векторлық көбейтінді түріндегі бір қосылғыш қалды. Оны \bar{a}_c -деп белгілейік

$$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.6.4.9)$$

(2.4.4.8)-формуламен есептелінетін толық үдеудің құраушысын Кориолис деп атайды. Қабыл алынған (2.6.4.6), (2.6.4.7), (2.6.4.8) белгілеулері арқылы (2.6.4.1)–теңдікті ықшамдап жазуға болады

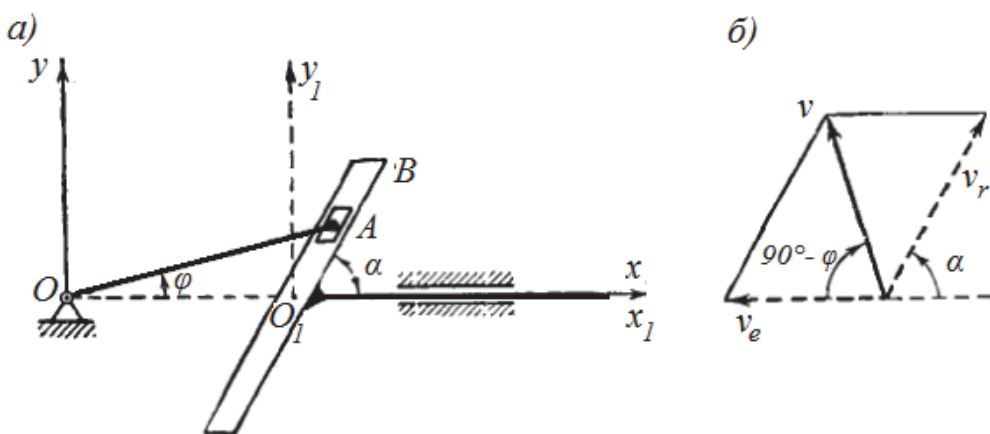
$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (2.6.4.9)$$

(2.6.4.9)-теңдікті Кориолистің үдеулерді қосу теоремасы деп атаймыз:

Кориолис теоремасы. *Нүктенің абсолют үдеуі тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің геометриялық қосындысына тең болады.*

1-мысал. Иіңтірек $OA=r$ сызба жазықтығында қозғалмайтын O нүктесіне қатысты $\varphi=kt$ заңымен айналады (2.6.4,a-сурет). Сол кезде A сырғағы B көлбеу кулисасы ішінде қозғалып, оны Ox осі бойымен орын ауыстыруға мәжбүр етеді. Кулисаның Ox өсімен жасайтын бұрышы α . A нүктесінің абсолют, салыстырмалы және тасымал жылдамдығын анықтау керек.

Шешуі: $O_1x_1y_1$ координат жүйесін B кулисамен байланыстырып, A нүктесінің қозғалысын күрделі, яғни екі қозғалыстан тұратын қозғалыс ретінде қарастырамыз. A нүктесінің қозғалатын $O_1x_1y_1$ координат жүйесімен бірге қозғалысы тасымал болып табылады, оның тасымал жылдамдығы \bar{v}_e кулисаның жылдамдығына тең және x оське параллель бағытталады. A нүктесінің $O_1x_1y_1$ координат жүйесіне қатысты қозғалысы, яғни кулиса ішіндегі қозғалысы, салыстырмалы қозғалыс болады, оның салыстырмалы жылдамдығы \bar{v}_r кулиса бойымен бағытталады. A нүктесінің қозғалмайтын Ox координат жүйесіне қатысты қозғалысы абсолют қозғалыс болады, есепте берілген деректер бойынша абсолют жылдамдықты анықтауға болады: $v = \omega \cdot r = \dot{\varphi} \cdot r = kr$. A нүктесінің абсолют жылдамдығының \bar{v} векторы OA –ға перпендикуляр иіңтірек айналу бағытына сәйкес бағытталады.



2.6.4-сурет

Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Тұрғызуды шамасы мен бағыты белгілі \bar{v} абсолют жылдамдық векторынан бастаймыз, содан кейін \bar{v} векторының басынан салыстырмалы \bar{v}_r векторына параллель түзуді, ал \bar{v} векторының ұшынан \bar{v}_e тасымал жылдамдығына параллель түзуді жүргіземіз. Нәтижесінде шыққан үшбұрышта жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша векторлардың нұсқамаларын қоямыз (2.6.4,б-суретті қараңыз). Синустар теоремасын қолданамыз

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{v_e}{\sin[180^\circ - \alpha - (90^\circ - \varphi)]},$$

$$\text{немесе } \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{v_r}{\cos \varphi} = \frac{v_e}{\sin[90^\circ + (\varphi - \alpha)]}.$$

Осыдан

$$v_r = \frac{v \cos \varphi}{\sin \alpha} = \omega r \frac{\cos(kt)}{\sin \alpha}, \quad v_e = \frac{v \sin[90^\circ + (\varphi - \alpha)]}{\sin \alpha} = \omega r \frac{\cos(kt - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

2-мысал. M нүктесі D дене үстінде $s_r = OM = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot t)$ см теңдеуі бойынша қозғалады, а дене вертикаль оське қатысты $\varphi_e = 0,9t^2 - 9t^3$ рад теңдеуі бойынша айналады (2.6.5,а-сурет). $t_1 = 2/9$ с уақыт мезгілінде M нүктесінің абсолют жылдамдығы мен абсолют үдуді анықтау керек.

Шешуі: Қарастырылатын уақыт мезгілінде сурет жазықтығы үшбұрыш D -ның жазықтығымен беттеседі деп алайық. M нүктесінің салыстырмалы жылдамдығы және салыстырмалы үдеуі келесідей тыбылады

$$v_r = \dot{s}_r = 24\pi \sin 3\pi t, \quad a_r^r = \dot{v}_r = 72\pi^2 \cos 3\pi t, \quad a_r^n = 0.$$

$t_1 = 2/9$ с болғанда

$$s_r = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot 2/9) = 20 \text{ см}, \quad v_r = 65,2 \text{ см/с}, \quad a_r^r = -355 \text{ см/с}^2.$$

Салыстырмалы жылдамдық шамасы оң болғандықтан, оның \bar{v}_r векторы s_r қашықтығының оң бағытымен бағытталады. Салыстырмалы үдеу \bar{a}_r^r векторы оған қарсы бағытталады, өйткені оның шамасы теріс таңбамен шықты (2.6.5,б-сурет).

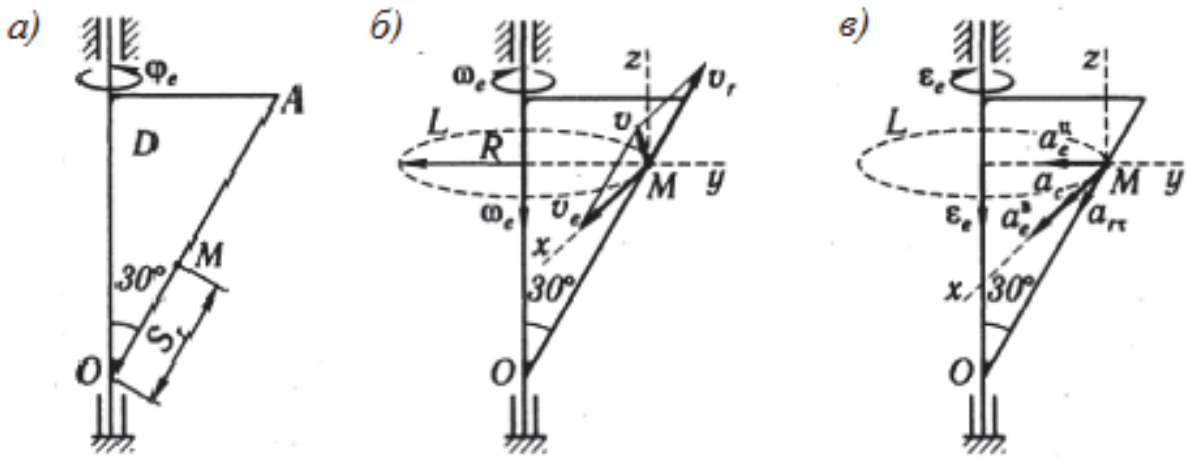
Енді M нүктесінің тасымал қозғалысын, яғни қарастырылатын уақыт мезгілінде M нүктесімен түйісетін D дене үстіндегі нүктенің қозғалысын қарастырамыз. Оның траекториясы радиусы $R = s_r \cdot \sin 30^\circ = 10$ см шеңбер L болып табылады. Сонда M нүктесінің тасымал жылдамдығы мен тасымал үдеуі келесі формулалармен анықталады

$$v_e = \omega_e R, \quad a_e^\tau = \varepsilon_e R, \quad a_e^n = \omega_e^2 R,$$

мұндағы $\omega_e = \dot{\varphi}_e = 1,8t - 27t^2$, $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 1,8 - 54t$.

Уақыт $t_1 = 2/9c$ болғанда $\omega_e = -0,93 \text{ рад}/c$, $\varepsilon_e = -10,2 \text{ рад}/c^2$.

Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің теріс таңбалары, ω_e мен ε_e бағыттары бұрыш φ_e -ні есептеу бағытына қарсы екенін білдіреді. Тасымал жылдамдық модулі $v_e = 9,3 \text{ см}/c$, оның \bar{v}_e векторы тасымал траекторияға жанама ω_e бағытына сәйкес бағытталады. Тасымал жанама және тасымал нормаль үдеулердің модульдері: $a_e^\tau = 102 \text{ см}/c^2$, $a_e^n = 9 \text{ см}/c^2$. Тасымал жанама үдеу векторы \bar{a}_e^τ тасымал жылдамдық \bar{v}_e векторымен бағыттас, тасымал нормаль үдеу векторы \bar{a}_e^n шеңбер L -дің центріне қарай бағытталады.



2.6.5-сурет

Кориолис үдеу векторы келесі формуламен анықталады: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r$. Сонда кориолис үдеу шамасы: $a_c = 2 \cdot |\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$, мұндағы бұрыш $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 150^\circ$. Табылған мәндерді ескеріп аламыз: $a_c = 61 \text{ см}/c^2$. Кориолис үдеудің бағытын векторлық көбейтіндісі ережесімен немесе Жуковскийдің ережесімен анықтауға болады. Жуковский ережесімен анықтау үшін \bar{v}_r векторын тасымал айналу осіне перпендикуляр жазықтыққа проекциялаймыз, содан кейін шыққан векторды сол жазықтықта тасымал айналу бағытымен 90° -ке айналдырамыз, сонда ол x осі бойымен бағытталады (2.6.5, в-сурет).

Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, мұнда $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$, сондықтан абсолют жылдамдық модулі

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 65,9 \text{ см/с}.$$

Үдеулерді қосу туралы теорема бойынша $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c$ немесе $\bar{a} = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c$. Абсолют үдеуді проекциялар әдісімен табуға болады

$$a_x = a_e^\tau + a_c = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -a_e^n + a_r^\tau \cos 60^\circ = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = -a_r^\tau \cos 30^\circ = 308 \text{ см/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 395 \text{ см/с}^2.$$

2.7 «Кинематика» бөлімі бойынша есептер

2.7.1-есеп. Нүктенің жазықтықта қозғалысының берілген тендеулері бойынша нүкте траекториясын және оның t_1 уақыт мезгілінде жылдамдығын, толық, жанама, нормаль үдеулері мен траектория қисықтығы радиусын анықтау керек. Нүкте координаталары сантиметрмен, уақыт секундамен берілген.

а) $x=10 \cdot \sin(\pi \cdot t)$, $y=10 \cdot \cos(\pi \cdot t)$, $t_1 = 1/3 \text{ с}$;

б) $x=30 \cdot \cos(\pi \cdot t/2) + 10$, $y=10 \cdot \sin(\pi \cdot t/2)$, $t_1 = 1/2 \text{ с}$;

в) $x=20 \cdot \sin(\pi \cdot t)$, $y=4 \cdot t$, $t_1 = 1/6 \text{ с}$;

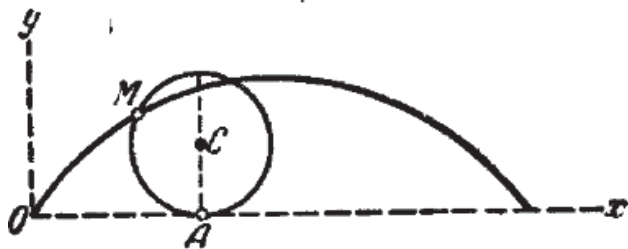
г) $x=10 \cdot \sin(\pi \cdot t)$, $y=20 \cdot \cos(\pi \cdot t)$, $t_1 = 1/3 \text{ с}$.

Жауабы: а) центрі координат басында орналасқан, радиусы 10 см тең шеңбер, $v = \text{const} = 31,4 \text{ см/с}$, $a_\tau = 0$, $a = a_n = \text{const} = 98,6 \text{ см/с}^2$, $\rho = 10 \text{ см}$;

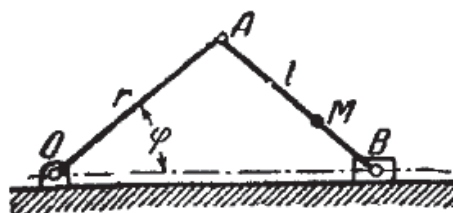
б) эллипс $\frac{(x-10)^2}{30^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$, $v=35,1 \text{ см/с}$, $a=55,1 \text{ см/с}^2$, $a_\tau=44,1 \text{ см/с}^2$, $a_n=33 \text{ см/с}^2$, $\rho=37,3 \text{ см}$;

в) синусоида $x = 20 \sin(\pi y/2)$, $v = 62,9 \text{ см/с}$, $a=683,1 \text{ см/с}^2$, $a_\tau = -682 \text{ см/с}^2$, $a_n = 38,8 \text{ см/с}^2$, $\rho = 102 \text{ см}$;

г) парабола $y = 10 - 1,25x^2$, $v=0$, $a_\tau=0$, $a = a_n = 394,6 \text{ см/с}^2$, $\rho=0$.



2.7.2-есепке сурет



2.7.3-есепке сурет

2.7.2-есеп. Горизонталь x осі бойымен сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің M нүктесі үдеуінің шамасы мен бағытын және траекториясының қисықтық радиусын анықтау керек. Нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген: $x = 20t - \sin(20t)$, $y = 1 - \cos(20t)$. Мұнда t – секундамен, x, y – метрмен өлшенеді.

Жауабы: үдеу $a=400 \text{ м/с}^2$ және MC бойымен дөңгелек центріне бағытталады, $\rho=2MA$.

2.7.3-есеп. Иіктіректі-сырғақты механизмнің M нүктесінің траекториясын анықтап, оның $\varphi=0$ болатын уақыт мезгілінде жылдамдығын, үдеуін және траекториясының қисықтық радиусын табу керек. Берілгені: $r=l=60 \text{ см}$, $MB=l/3$, $\varphi=4\pi \cdot t$ (t – секундамен өлшенеді).

Жауабы: эллипс $\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$, $v = 80\pi \text{ см/с}$, $a = 1600 \pi^2 \text{ см/с}^2$,

$\rho = 4 \text{ см}$.

2.7.4-есеп. Снаряд вертикаль жазықтықта келесі теңдеулер бойынша қозғалады: $x = 300t$, $y = 400t - 5t^2$ (t – секундамен, x, y – метрмен өлшенеді). Бастапқы уақыт мезгілінде снаряд жылдамдығы мен үдеуін, атыс биіктігі мен алыстығын, бастапқы және ең биік орнында снаряд траекториясының қисықтық радиусын табу керек.

Жауабы: $v_0=500 \text{ м/с}$, $a_0=10 \text{ м/с}^2$, $h=8 \text{ км}$, $s=24 \text{ км}$, $\rho_0=41,67 \text{ км}$, $\rho=9 \text{ км}$.

2.7.5-есеп. Нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген: $x=20\sin(3t^2)$, $y=20\cos(3t^2)$ (t – секундамен, x, y – сантиметрмен өлшенеді). Нүктенің жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтау керек.

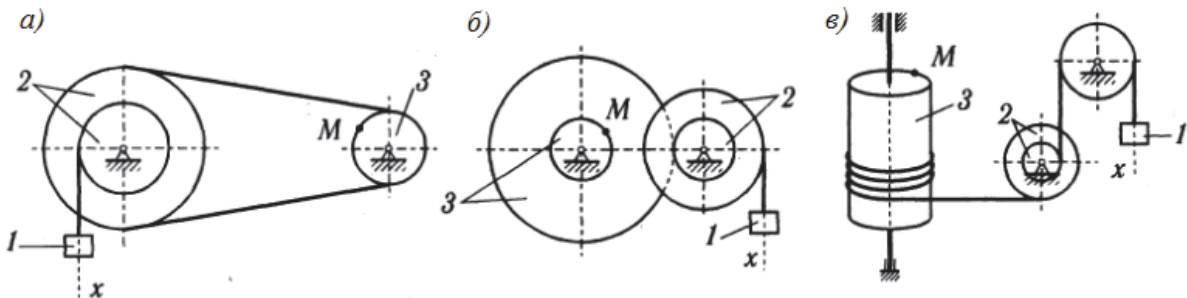
Жауабы: $v=120t \text{ см/с}$, $a_\tau=120 \text{ см/с}^2$, $a_n=720t^2 \text{ см/с}^2$.

2.7.6-есеп. Бастапқы айналу жиілігі $n_0=90 \text{ айн/мин}$ тең болған дөңгелек бір уақыт мезгілінен тең үдемелі айналып, $1,5 \text{ мин}$ өткен соң $n=150 \text{ айн/мин}$ айналу жиілігіне ие болады. Дөңгелектің бұрыштық үдеуін анықтап, оның $1,5 \text{ мин}$ ішінде жасаған айналым санын табу керек.

Жауабы: $\pi/45 \text{ рад/с}^2$, 180 айналым .

2.7.7-есеп. Дененің айналу заңы берілген: $\varphi = 5t + 1,2t^3 \text{ рад}$. Дененің бұрыштық жылдамдығы 70 рад/с тең болатын уақыт мезгілін анықтап, оның сол уақытта жасайтын айналым санын табу керек.

Жауабы: $4,25 \text{ с}$, жуық 18 айналым .



2.7.8-есепке сурет

1.23.8-есеп. 1 жүгі $x=x(t)$ заңы бойынша төмен түсіп, 2 және 3 дөңгелектерді қозғалтады. t_1 уақыт мезгілінде M нүктесінің жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтау керек. Берілгені:

a) $x=5t^2-2t$ см, $t_1=1$ с, $R_2=30$ см, $r_2=10$ см, $R_3=15$ см;

б) $x=25t^2+10t+40$ см, $t_1=2$ с, $R_2=40$ см, $r_2=20$ см, $R_3=80$ см, $r_3=18$ см;

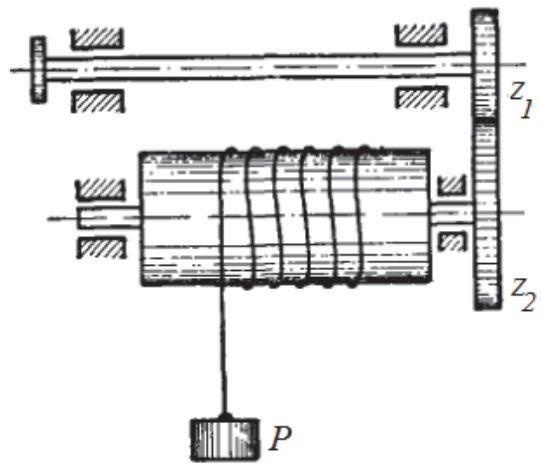
в) $x=0,4t^2-0,5t+0,3$ м, $t_1=4$ с, $R_2=0,3$ м, $r_2=0,15$ м, $R_3=0,4$ м.

Жауабы: а) $v_M=24$ см/с, $a_{M\tau}=30$ см/с², $a_{Mn}=38,4$ см/с²;

б) $v_M=11$ см/с, $a_{M\tau}=5$ см/с², $a_{Mn}=7,56$ см/с²;

в) $v_M=3,8$ м/с, $a_{M\tau}=1,6$ м/с², $a_{Mn}=36,1$ м/с².

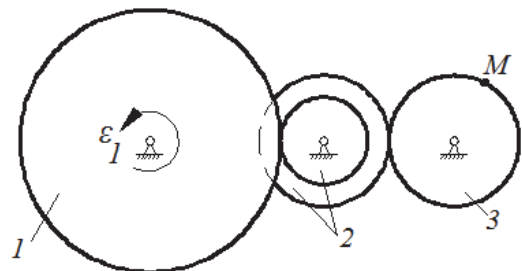
2.7.9-есеп. z_1 тісі бар дөңгелек орналасқан жетекші білік $\varphi_1=2\pi t^2$ рад заңымен айналып, z_2 тісі бар дөңгелек орналасқан жетектегі білікті айналдырады. Сол кезде P жүгі радиусы R цилиндрге оралатын арқан арқылы көтеріледі. P жүгінің үдеуін анықтау керек.



2.7.9-есепке сурет

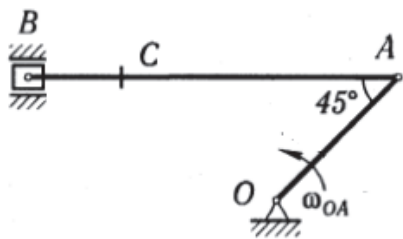
Жауабы: $4\pi R \frac{z_1}{z_2}$.

2.7.10-есеп. 1 дөңгелек тыныштық күйінен $\varepsilon_1=0,3t$ рад/с² бұрыштық үдеуімен айналып, 2 және 3 дөңгелектерді айналдырады. Дөңгелектердің радиустері: $R_1=0,6$ м, $R_2=0,3$ м, $r_2=0,2$ м, $R_3=0,15$ м. $t=4$ с уақыт мезгілінде M нүктесінің жылдамдығын, жанама және нормаль үдеулерін анықтау керек.

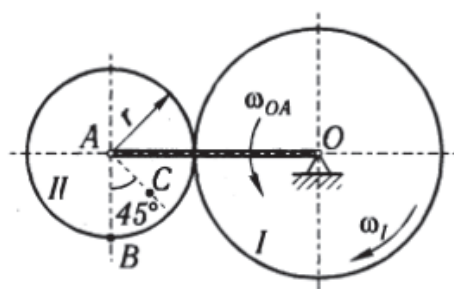


1.7.10-есепке сурет

Жауабы: $v_M=2,16$ м/с, $a_{M\tau}=1,08$ м/с², $a_{Mn}=31,1$ м/с².



2.7.11-есепке сурет



2.7.12-есепке сурет

2.7.11-есеп. Механизмнің көрсетілген орналасуында AB буынының бұрыштық жылдамдығын және B , C нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA}=5 \text{ рад/с}$, $OA=40 \text{ см}$, $AB=70 \text{ см}$, $BC=20 \text{ см}$.

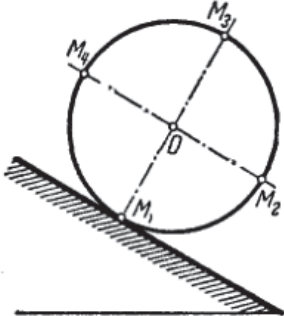
Жауабы: $\omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$, $v_B = 141 \text{ см/с}$, $v_C = 146 \text{ см/с}$.

2.7.12-есеп. I дөңгелектің және OA буынының бұрыштық жылдамдықтары $\omega_I=3 \text{ рад/с}$ және $\omega_{OA}=4 \text{ рад/с}$. II дөңгелектің бұрыштық жылдамдығын және B , C нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау керек. Берілгені: $OA=60 \text{ см}$, $r=20 \text{ см}$, $AC=15 \text{ см}$.

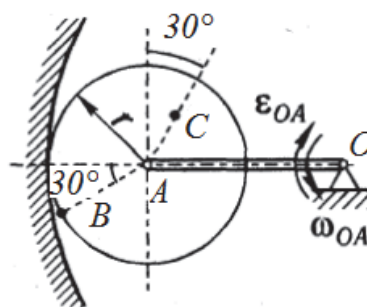
Жауабы: $\omega_{II} = 18 \text{ рад/с}$, $v_B = 433 \text{ см/с}$, $v_C = 197 \text{ см/с}$.

2.7.13-есеп. Радиусы $R=0,5 \text{ м}$ дөңгелек вертикаль жазықтықта көлбеу түзу бойымен сырғанаусыз домалайды. Қарастырылатын уақыт мезгілінде дөңгелек центрінің жылдамдығы $v_O=1 \text{ м/с}$, үдеуі $a_O=3 \text{ м/с}^2$. Дөңгелектің M_1 , M_2 , M_3 , M_4 нүктелерінің үдеулерін анықтау керек.

Жауабы: $a_{M1}=2 \text{ м/с}^2$, $a_{M2}=3,16 \text{ м/с}^2$, $a_{M3}=6,32 \text{ м/с}^2$, $a_{M4}=5,83 \text{ м/с}^2$.



2.7.13-есепке сурет

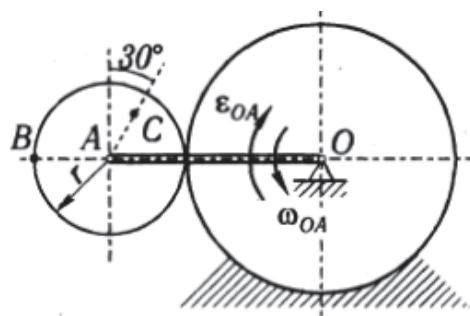


2.7.14-есепке сурет

2.7.14-есеп. Қозғалмайтын бет үстінде сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін, оның B , C нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA}=2 \text{ рад/с}$, $\epsilon_{OA}=6 \text{ рад/с}^2$, $OA=0,6 \text{ м}$, $r=0,4 \text{ м}$, $AC=0,2 \text{ м}$.

Жауабы: $\omega=3 \text{ рад/с}$, $\epsilon=9 \text{ рад/с}^2$, $v_B=0,6 \text{ м/с}$, $v_C=1,6 \text{ м/с}$, $a_B=7,5 \text{ м/с}^2$, $a_C=3,4 \text{ м/с}^2$.

2.7.15-есеп. Қозғалмайтын дөңгелек үстінде сырғанаусыз домалайтын дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуін және оның B , C нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтау керек. Берілгені: $\omega_{OA}=4 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=2 \text{ рад/с}^2$, $OA=1 \text{ м}$, $r=0,4 \text{ м}$, $AC=0,3 \text{ м}$.



1.7.15-есепке сурет

Жауабы: $\omega=10 \text{ рад/с}$, $\varepsilon=5 \text{ рад/с}^2$,
 $v_B=8 \text{ м/с}$, $v_C=4 \text{ м/с}$, $a_B=56,1 \text{ м/с}^2$,
 $a_C=33,7 \text{ м/с}^2$.

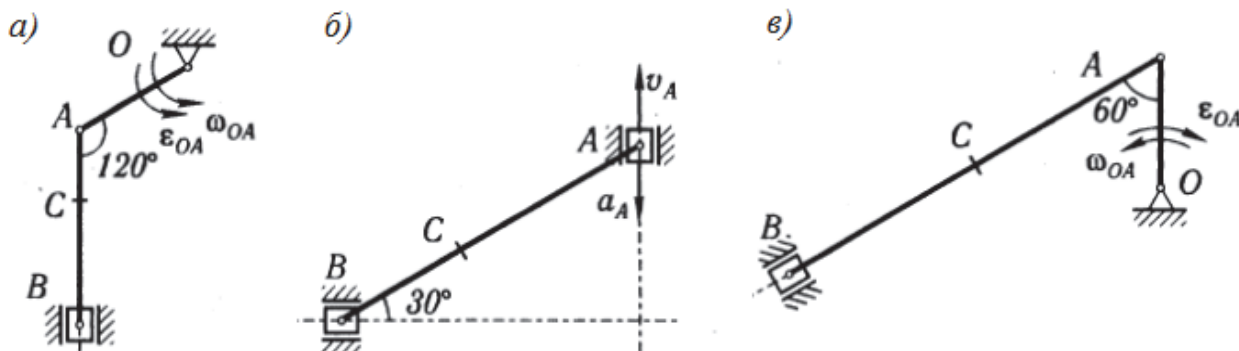
2.7.16-есеп. Механизмдердің көрсетілген орналасуында олардың B , C нүктелерінің жылдамдықтарын және үдеулерін анықтау керек. Берілгені:

- а) $\omega_{OA}=1 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=2 \text{ рад/с}^2$, $OA=0,4 \text{ м}$, $AB=0,7 \text{ м}$, $AC=0,3 \text{ м}$;
- б) $v_A=10 \text{ м/с}$, $a_C=30 \text{ м/с}^2$, $AB=1 \text{ м}$, $AC=0,6 \text{ м}$;
- в) $\omega_{OA}=2 \text{ рад/с}$, $\varepsilon_{OA}=3 \text{ рад/с}^2$, $OA=0,3 \text{ м}$, $AB=1 \text{ м}$, $AC=0,5 \text{ м}$.

Жауабы: а) $v_B=0,35 \text{ м/с}$, $v_C=0,37 \text{ м/с}$, $a_B=0,44 \text{ м/с}^2$, $a_C=0,89 \text{ м/с}^2$;

б) $v_B=5,78 \text{ м/с}$, $v_C=5,29 \text{ м/с}$, $a_B=136,7 \text{ м/с}^2$, $a_C=94,3 \text{ м/с}^2$;

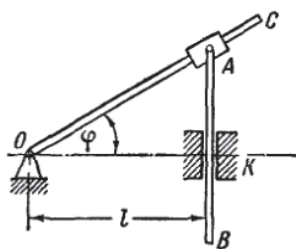
в) $v_B=0,52 \text{ м/с}$, $v_C=0,54 \text{ м/с}$, $a_B=0,27 \text{ м/с}^2$, $a_C=0,77 \text{ м/с}^2$.



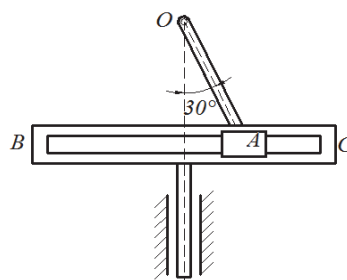
2.7.16-есепке сурет

2.7.17-есеп. Кулисалы механизмнің OC иінтірегі O осі аймағында теңселгенде A сырғағы OC бойымен қозғалып, AB буынын вертикаль түзу бойымен қозғалтады. $OK=l$ болғанда A сырғақтың OC иінтірегіне қатысты салыстырмалы қозғалысының жылдамдығын иінтіректің ω бұрыштық жылдамдығы мен φ айналу бұрышының функциясы түрінде анықтау керек.

Жауабы: $v_r = \omega l \frac{\text{tg} \varphi}{\cos \varphi}$.



1.7.17-есепке сурет

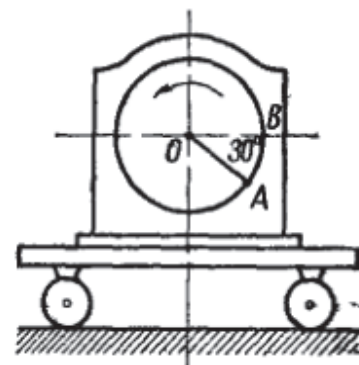


1.7.18-есепке сурет

2.7.18-есеп. Иіңтіректі-кулисасы механизмде ілгерілемелі қозғалыстағы BC кулисасы артында ұзындығы $OA=0,2$ м иіңтірек тұрақты 3π рад/с бұрыштық жылдамдығымен айналады. Иіңтіректің A шеті топса арқылы кулиса бойымен қозғалатын денемен байланысып, кулисаға қайтымды ілгерілемелі қозғалыс береді. Механизмнің көрсетілген орналасуында кулисаның жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: $0,942$ м/с.

2.7.19-есеп. $a=49,2$ см/с үдеуімен оң жаққа қозғалып тұрған арба үстіндегі электрмотор роторы іске қосылғанда $\varphi=t^2$ тендеу бойынша айналады (φ радианмен өлшенеді). Ротор радиусы 20 см тең. $t=1$ с уақыт мезгілінде ротор A нүктесінің суретте көрсетілген орналасуында абсолют үдеуін табу керек.



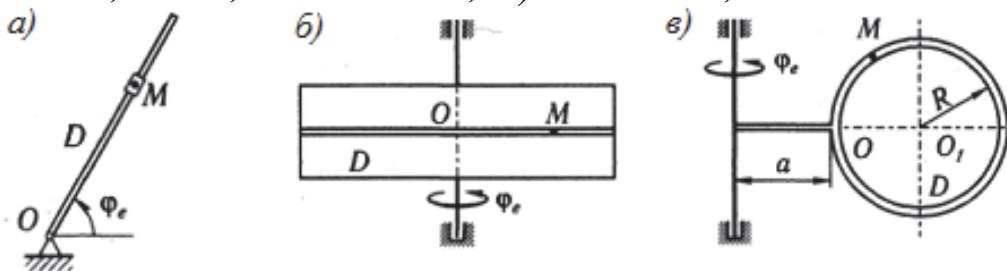
2.7.19-есепке сурет

Жауабы: $a_A = 74,6$ см/с², үдеу вертикаль жоғары бағытталған.

2.7.20-есеп. M нүктесінің t_1 уақыт мезгілінде абсолют жылдамдығы мен абсолют үдеуін анықтау керек. Берілгені:

- а) $\varphi_e = \pi \cdot t(2-3t)$ рад, $OM=30t^2$ см, $t_1=1$ с;
- б) $\varphi_e = 0,5t^2$ рад, $OM=20\sin(\pi \cdot t)$ см, $t_1=1/3$ с;
- в) $\varphi_e = 4t^2$ рад, $OM=\pi R t^2$ см, $R=a=10$ см, $t_1=1/2$ с.

Жауабы: а) $v=134$ см/с, $a=782$ см/с²;
 б) $v=31,9$ см/с, $a=177$ см/с²; в) $v=61$ см/с, $a=297$ см/с².



2.7.20-есепке сурет

3 Динамика

3.1 Материялық нүкте динамикасы

3.1.1 Кіріспе. Негізгі түсініктер және анықтамалар

Динамикада материялық нүктелер мен материялық денелердің қозғалыстары оларды болдыратын физикалық себептермен (күштермен) тығыз байланысты қарастырылады. Денеге түсірілген күштер мен олардың әсерлерінен болатын қозғалыс арасындағы тәуелділікті зерттеу, сөйтіп қозғалыстың жалпы заңдылығын табу мәселелері қаралады.

Динамиканың өзі екі бөлімге бөлінеді: *бірінші бөлімі материялық нүкте динамикасы болса, екінші материялық нүктелер жүйесінің динамикасы.*

Материялық нүкте деп қозғалыстың берілген жағдайларында өлшемдерін ескермеуге болатын денені айтамыз. Мұндай дененің кеңістіктегі орны массасы дененің массасына тең массамен жабдықталған геометриялық нүкте орнымен анықталады.

Әрбір денені материялық нүктелердің жиынтығы деп қарауға болады. Ендеше динамиканы материялық нүкте динамикасынан бастаған жөн. Динамиканың бұл бөлімінде бір ғана материялық нүкте қозғалысының заңдылығы анықталады. Материялық нүкте қозғалысы үшін анықталған заңдылықтарды бірнеше материялық нүктелер жағдайына жалпылай отырып материялық нүктелер жүйесінің заңдылығын аламыз. Осының нәтижесінде қатты дене қозғалысы толық сипаттайтын заңдылықтарды да табуға болады.

3.1.2 Динамиканың негізгі заңдары. Динамиканың бірінші және екінші есептері

Динамика негізіне, аксиомалар ретінде қабылданатын, бірнеше қағидалар жатады. Бұл қағидалар табиғаттағы құбылыстарға жасалған көптеген жылғы бақылаулар мен тәжірибелерді және қоғамдық практика нәтижелерін жалпылап қорытындылаудан алынған. Механика аксиомаларын ең толық және ақырғы түрінде айтып берген И.Ньютон еді. Сондықтан да оларды Ньютон заңдары деп атайды.

Ньютоның бірінші заңы (инерция заңы). *Егер материялық нүктеге ешбір күш әсер етпесе, онда ол өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын сақтайды.*

Бұл заң, басқа денелерден жеке дара алынған, материялық нүктеге арнап айтылған. Жеке дара нүкте басқа денемен әсерлескенге дейін өзінің тыныштық күйінде қала береді немесе алғашқы

қозғалысын сақтайды. Жеке дара (оңаша) алынған материялық нүкте деп отырған денеміз өз бетінше өзінің жылдамдығын өзгерте алмайды немесе тыныштық күйінен өз бетінше қозғалысқа келе алмайды. Бұл өзгеріс тек оған басқа бір дене әсер етсе, яғни бір күш әсер етсе пайда болады.

Ньютонның бірінші заңы материялық денелердің негізгі бір қасиетін, яғни өзін-өзі қозғалысқа келтіре алмайтын қасиетін сипаттайды. Ал, екінші жағынан бұл заң денелер өзіне түсірілген сыртқы күштердің әсерінен бірден қозғалысқа келе қоймай өзінің тыныштық күйін немесе түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын бірден өзгерте қоймай, ондай күйін сақтап қалуға тырысатын да қасиеті бар екенін көрсетеді. Оны денелердің инерциясы немесе материяның инерттігі дейді. Инерттілік – барлық денелерге тән қасиет. Дене (нүкте) жылдамдығын берілген шамаға дейін өзгерту үшін оған түсірілген күш әсері белгілі бір уақытқа созылуы керек. Ол уақыт аралығы неғұрлым көп болса, дене соғұрлым инерттірек келеді. Өзара әсерлесетін екі дененің қайсысы жылдамдығын баяуырақ өзгертсе, сонысы инерттілеу болады. *Ньютонның 1–заңын инерция заңы деп те атайды.*

Инерция заңында айтылған материялық нүктенің түзу сызықты бірқалыпты қозғалысын инерциялық қозғалыс дейміз.

Ньютон заңдары әсіресе инерция заңы орынды болатын координаттар өстерінің жүйелерін *инерциялық жүйелер деп атайды.* Бұдан былай үнемі инерциялық жүйелер қолданылады. Мұндай жүйелерге қатысты қаралатын денелердің, материялық нүктелердің қозғалыстарын абсолют қозғалыстар деп атайды.

Ньютонның екінші заңы (негізгі заң). *Материялық нүктеге әсер етуші күш осы нүкте үдеуімен бағытталады және шамасы үдеуге пропорционал болады.*

Материялық нүктеге түсірілген күшті \vec{F} деп, ал осыдан пайда болатын нүкте үдеуін \vec{a} -деп белгілейік, онда екінші заңды векторлық тендеу түрінде жаза аламыз

$$m'\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1.2.1)$$

мұндағы, m' – тұрақты шама. Тәжірибеге қарағанда әртүрлі материялық нүктелер үшін m' тұрақтысының шамасы да әртүрлі болады. Басқаша айтқанда, әрбір материялық нүктенің өзіне сай m' тұрақтысы болады

$$\vec{a} = \frac{1}{m'} \vec{F}. \quad (3.1.2.2)$$

Берілген \bar{F} күшінің әсерінен болатын материялық нүктенің үдеуі m' тұрақтысына пропорционал болады. m' тұрақтысының шамасы неғұрлым көп болса, берілген \bar{F} күшінің әсерінен болатын үдеу соғұрлым аз болады. Басқаша айтқанда m' тұрақтысы неғұрлым көп болса, материялық нүктенің инерттілігі (инерциясы) соғұрлым көп болады. Материялық нүктенің инерттілігінің өлшемі ретінде алынатын m' тұрақты шамасын материялық нүктенің инерттілік көрсеткіші, яғни инерттік массасы дейді.

Қысқаша айтқанда, дененің массасы – оның инерттілігін өрнектейтін шама. Екінші жағынан денелердің инерттілігінің әртүрлі, әр дәрежеде болуы ол денелерде материяның бірдей мөлшерде болмауының нәтижесінде. Әрбір дененің өзінде белгілі мөлшерде материя немесе материялық зат болады. Күнделікті өмірде денедегі материя мөлшерін дене салмағына қарай анықтайды. Бірақ дене салмағы, оның Жердің қай енділігінде екендігіне және теңіз бетінен саналатын биіктіктің өзгеруіне қарай өзгеріп отырады. Ал денедегі заттар мөлшері, яғни ондағы материя бұл жағдайларға тәуелді емес, ол тек дененің өзіне ғана тән қасиет. Сондықтан да салмақты денедегі заттар мөлшерінің өлшеуіші ретінде алуға болмайды. Бірақ дененің салмағының дененің еркін түсу үдеуіне қатынасы ауасыз ортада тұрақты болатыны, басқа ештеңеге тәуелді еместігі, тек берілген дененің өзіне ғана тән шама екендігі тәжірибеден белгілі. Егер берілген дененің салмағы P деп, ал еркін түсу үдеуін g деп белгілесек, онда осы дене үшін тұрақты қатынасты былай жазамыз

$$\frac{P}{g} = \text{const} = m. \quad (3.1.2.3)$$

Тек дененің өз қасиетіне ғана тәуелді болатын m шамасын дененің ауырлық массасы дейді. *Денедегі материя мөлшерінің өлшемі ретінде алынатын, (3.1.2.3) – қатынаспен анықталатын, шаманы дененің ауырлық (гравитациялық) массасы дейді.*

(3.1.2.3)-формула Жер бетіндегі денелердің массаларын анықтауға қолданылады. Сөйтіп Жер бетіндегі денелердің ауырлық массалары олардың салмақтарына пропорционал шама екенін анықтадық.

Көптеген тәжірибелердің нәтижелері ауырлық массасының инерттілік массасына тең болатынын көрсетеді. Олай болса, (3.1.2.1)-формуладағы m' шамасы мен (3.1.2.3)-формуладағы m шамасын теңестіреміз

$$m' = m. \quad (3.1.2.4)$$

Бұдан массаның дене инерциясының өлшемі болуымен қатар ол дененің гравитациялық қасиетін де анықтайтын физикалық шама екенін көреміз. Сондықтан да материялық және инерциялық қасиеттер Ньютон механикасында эквивалентті қасиеттер болып табылады.

Егер (3.1.2.4) теңдігін ескерсек, (3.1.2.1) қатынасын қайтадан былай жазуға болады

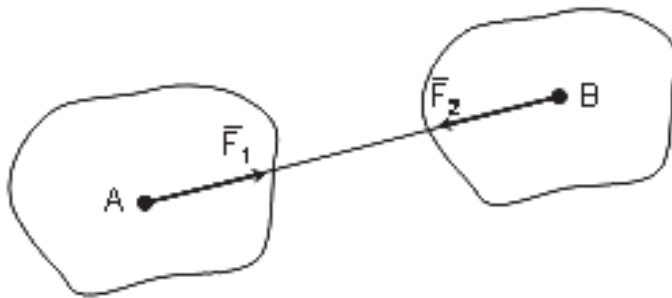
$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (3.1.2.5)$$

Ньютонның үшінші заңы (әсер және қарсы әсер заңы).

Материялық екі нүкте бір–біріне оларды қосатын түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған, модульдері тең күштерімен әсер етеді.

Екі планетаның өзара тартылу күштерін алсақ, олардың да бір біріне тең болып, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталатынын көреміз. Мысалға Ай мен Жердің өзара тартылысын алайық (3.1.1-сурет).

Ай A -ны өзіне тартатын жердің \bar{F}_1 күші мен Жер B -ны өзіне тартатын Айдың \bar{F}_2 күші мынадай шартты қанағаттандырады



3.1.1-сурет

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2, \quad |\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|.$$

Егер бір күшті әсер деп, ал екіншісін қарсы әсер деп атасақ, онда үшінші заңды басқаша былай да айтуға болады.

Әрбір әсерге тең және қарама-қарсы бағытталған қарсы әсер болады.

Ньютонның төртінші заңы (күш әсерінің тәуелсіздігі туралы заң). *Егер материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күш әсер етсе, онда олардың әрқайсысының нүктеге беретін үдеуі сол күш шамасына пропорционал болып, күштердің өзгелеріне және кинематикалық күйіне тәуелсіз болады.*

Толық үдеу жеке күштер әсерлерінен болатын үдеулердің векторлық қосындысына тең болады.

Егер материялық нүктеге бір мезгілде $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ күштері әсер ететін болса, онда бұл күштердің әрқайсысы массасы m -ге тең нүктеге өзінің шамасына пропорционал болатын үдеу береді

$$\bar{a}_1 = \frac{\bar{F}_1}{m}, \quad \bar{a}_2 = \frac{\bar{F}_2}{m}, \quad \dots, \quad \bar{a}_n = \frac{\bar{F}_n}{m}.$$

Демек, \bar{a}_k үдеулерінің әрқайсысы тек өзіне сәйкес \bar{F}_k күші арқылы анықталады да, нүктедегі өзге күштерге тәуелсіз болып келеді.

Осылайша материялық нүкте бір мезгілде үдеулері әр түрлі n қозғалысқа келеді. Кинематикада тағайындалған ереже бойынша бұл қозғалыс үдеулерін өзара геометриялық әдіспен қосуға болады

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n.$$

Ал мұндағы әрбір үдеудің орнына олардың күш арқылы анықталатын, жоғарыда көрсетілген өрнектерін қойсақ, сонда

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}_1}{m} + \frac{\bar{F}_2}{m} + \dots + \frac{\bar{F}_n}{m} = \frac{1}{m} (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n).$$

Бір нүктеге түсірілген күштердің теңәсерлі күші болады, ол күштердің геометриялық қосындысына тең

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \bar{R}.$$

Демек, нүктенің толық үдеуі

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sum \bar{F}_e.$$

Осыдан

$$m\bar{a} = \bar{R}.$$

Сонымен, Ньютонның екінші заңы материялық нүктеге бір мезгілде бірнеше күштер әсер еткенде де орынды болады. Ондағы \bar{R} күшін енді материялық нүктедегі барлық күштердің тең әсерлі күші деп түсіну керек.

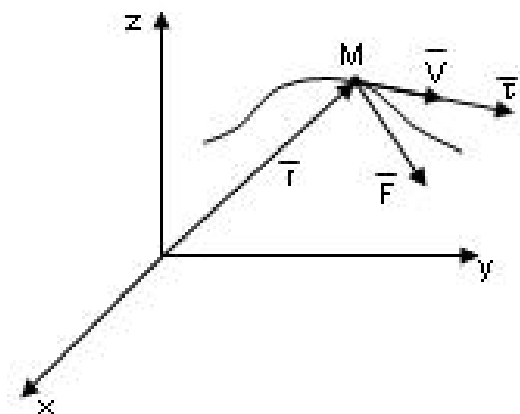
3.1.3. Материялық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулері

Радиус векторы \bar{r} -ге тең материялық нүктеге әсер етуші күш \bar{F} болсын. Нүкте қозғалысына негізгі заңды қолдансақ алатынымыз

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{3.1.3.1}$$

мұндағы, m нүкте массасы, \bar{a} -оның үдеуі. (3.1.3.1)–теңдеуі нүкте динамикасының негізгі теңдеуі деп аталады. Бұл – векторлық теңдеу. Оны әр түрлі координаттар өстеріне проекциялап жазуға болады.

Мысалы, оны қозғалмайды деп алынған (3.1.2-сурет) декарттық координаттар жүйесіндегі өстерге проекциялайық



3.1.2-сурет

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z,$$

немесе

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (3.1.3.2)$$

мұндағы, \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} -нүкте үдеуінің осы координаттық өстердегі проекция-лары, F_x , F_y , F_z , нүктеге әсер етуші күштің осы өстердегі проекциялары. (3.1.3.2)-теңдеулер материялық нүкте қозғалысының декарттық координаттар өстеріне

қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері деп аталады.

Нүкте қозғалысының векторлық (3.1.3.1)-теңдеуін табиғи өстеріне проекциялайық

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}, \quad ma_n = \sum F_{kn}, \quad ma_b = \sum F_{kb}. \quad (3.1.3.3)$$

Нүкте үдеуінің табиғи өстеріне проекциялары келесі белгілі формулдарымен анықталады

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

Осыны қолданып, материялық нүкте қозғалысының табиғи өстеріне қатысты дифференциалдық теңдеулерін аламыз

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}. \quad (3.1.3.4)$$

3.1.4 Динамиканың бірінші және екінші есептері

Нүкте динамикасында негізгі екі есеп бар. Оның біріншісінде материялық нүкте қозғалысының заңы және оның массасы m беріледі. Осы заңдылықта болатын қозғалысты тудыратын күшті табу керек болады. Екінші мәселеде берілген күш бойынша массасы m -ге тең нүкте қозғалысының заңын анықтау керек.

Динамиканың бірінші есебі. Нүкте динамикасының бірінші есебін шешу көп қиыншылық тудырмайды. Бірінші есепте нүкте массасы m және оның қозғалысының кинематикалық теңдеулері

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

берілген болады. Осы берілгендер арқылы (3.1.3.2) теңдеулерінен іздеп отырған күштің проекциялары табылады

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Осы күш проекциялары арқылы күштің өзін анықтап аламыз.

Нүкте динамикасының екінші есебі. Нүкте динамикасының екінші есебін шешу екінші ретті үш дифференциалдық теңдеулер жүйесі (3.1.3.2) -ні интегралдауға келтіріледі. Дифференциалдық теңдеулердің мұндай жүйесінің жалпы шешімі әлі табылмаған. Сондықтан біз ол жүйені шешудің жалпы сұлбасын көрсетіп өтейік. Бізге массасы m -ге тең материялық нүктенің берілген \bar{F} күші әсерінен болатын қозғалысының дифференциалдық теңдеулері (3.1.3.2) берілсін

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t), \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t). \end{aligned} \tag{3.1.3.3}$$

Берілген $\bar{F}(F_x, F_y, F_z)$ әсерінен болатын нүкте қозғалысын табу (3.1.3.3) дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Ол теңдеулерді түрлендіру нәтижесінде мынадай үш теңдеулер алдық дейік

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_1(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \varphi_2(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \varphi_3(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.3.4}$$

Онда (3.1.3.4)-ті интегралдау арқылы мынадай бірінші интегралдарды алған болар едік

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= C_2, \\ \varphi_3(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) &= C_3. \end{aligned} \tag{3.1.3.5}$$

(3.1.3.5)-дағы C_1, C_2, C_3 -тұрақтылары интегралдаудың кез келген тұрақтылары деп аталады.

(3.1.3.5) теңдеулерін тағы да бір рет интегралдап шығуымыз керек. Сол мақсатпен оларды қалай да түрлендіре отырып мынадай түрге келтіре алдық дейік

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi_1(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\psi_2(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\psi_3(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.3.6}$$

Онда бұларды оңай интегралдаған болар едік те, мынадай қатынастар алар едік

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_4, \\ \psi_2(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_5, \\ \psi_3(x, y, z, t; C_1, C_2, C_3) &= C_6.\end{aligned}\tag{3.1.3.7}$$

мұндағы, C_4, C_5, C_6 - интегралдау тұрақтыларының келесі үшеуі.

Уақыт, координаттар, кез келген тұрақты шамалар арасындағы тәуелділікті беретін және қозғалыс теңдеулері негізінде орынды болатын, (3.1.3.7) түріндегі қатынастарды қозғалыс теңдеулерінің екінші интегралдары деп атайды. (3.1.3.7) қатынастарынан x, y, z -терді табуға болады

$$\begin{aligned}x &= f_1(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= f_2(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= f_3(t; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\end{aligned}\tag{3.1.3.8}$$

(3.1.3.8) теңдіктері (3.1.3.3) қозғалыс теңдеулерінің жалпы шешімі болып табылады. Мұнда нүкте координаттары уақытқа және алты кез келген тұрақты шамаларға тәуелді функциялар ретінде анықталған.

Сонымен, жалпы жағдайда нүкте координаттары алты кез келген тұрақты шамаларға тәуелді болып шықты.

Басқаша айтқанда, қозғалыс теңдеулерін интегралдау арқылы материялық нүктенің берілген күш әсерінен мүмкін болатын қозғалыстарының барлығының да заңдарын табуға болады екен.

Мысалы, біз материялық нүктені ауасыз ортада бір орыннан әр түрлі бағыттағы жылдамдықпен ұшыруымызға болады. Онда ол нүкте ауырлық күші әсерінен бастапқы жылдамдықтың қалай бағытталуына байланысты түзу сызық бойымен немесе әр түрлі параболалар бойымен қозғалуы мүмкін.

Сол себепті күштің өзгеру заңдылығын

$$\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{v}),$$

көрсетумен қатар, нүктенің бастапқы орны мен жылдамдығын да нақтылы көрсетіп отыруымыз қажет.

Уақыт $t = t_0$ болғанда, нүктенің бастапқы орнын анықтайтын координаттар мынадай болды дейік

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0. \quad (3.1.3.9)$$

Ал бастапқы жылдамдық проекциялары мынадай болсын

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (3.1.3.10)$$

(3.1.3.9) және (3.1.3.10) қатынастарының жиынын бастапқы шарттар деп атаймыз. Осы бастапқы шарттар арқылы интегралдау тұрақтылары табылады. Ол үшін (3.1.3.5) және (3.1.3.7) теңдеулердегі $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ айнымалылары орнына олардың (3.1.3.9) және (3.1.3.10)-теңдеулерде көрсетілген бастапқы мәндерді қоямыз. Сонда

$$\begin{aligned} C_1 &= \varphi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_2 &= \varphi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_3 &= \varphi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_4 &= \psi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_5 &= \psi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ C_6 &= \psi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.1.3.11)$$

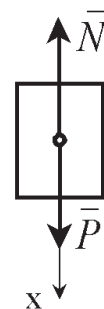
(3.1.3.11) бойынша анықталатын интегралдау тұрақтыларының мәндерін (3.1.3.8)–теңдеуге қойсақ, мынаны аламыз

$$\begin{aligned} x &= x(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.1.3.12)$$

(3.1.3.12)-теңдіктер берілген күш әсерінен болатын және бастапқы шарттарға сәйкес орындалатын нүкте қозғалысының заңын анықтайды. Сонымен, нүкте динамикасының екінші есебінің шешілуі осы сұлба бойынша жүргізіледі.

1-мысал. Массасы $1,02 \text{ кг}$ жүк жатқан көлденең (горизонталь) платформа 4 м/с^2 үдеуімен вертикаль төмен қозғалады. Олар бірге қозғалғанда жүктің платформаға түсіретін қысым күшін табу керек.

Шешуі: Жүкке бір ғана белсенді күш түсірілген – оның салмағы $\bar{P} = m\bar{g}$. Байланыстардан босату аксиомасын пайдаланып, ойша платформаны алып тастаймыз да, оның әсерін вертикаль жоғары



3.1.3 сурет

бағытталған \bar{N} реакция күшімен ауыстырамыз (3.1.3-сурет). x өсін қозғалысқа бағытталған төмен қарай тік бағыттап, жүк қозғалысының векторлық теңдеуін x өсіне проекциялап жазамыз

$$m \cdot a = P - N,$$

осы теңдеуден

$$N = P - m \cdot a = 1,02 \cdot 9,8 - 1,02 \cdot 4 = 5,92 \text{ Н}.$$

Сонда жүктің платформаға түсіретін қысым күші де $5,92 \text{ Н}$ -ға тең болады.

2-мысал. Массасы 2 кг материялық нүктенің қозғалысы мынадай теңдеулермен анықталады $x = 3 \cdot \cos 2\pi t$, $y = 4 \cdot \sin \pi t$ (x пен y метрмен өлшенеді). Нүктеге әсер етуші күштің проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін анықтау керек.

Шешуі: Алдымен нүкте үдеуінің проекцияларын табамыз. Ол үшін есептің шартында берілген қозғалыс теңдеулерінен уақыт бойынша екі рет туынды аламыз

$$\ddot{x} = -12 \cdot \pi^2 \cdot \cos 2\pi t, \quad \ddot{y} = -4 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi t.$$

Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін пайдалану арқылы күштің координаттар өстеріндегі проекцияларын табамыз

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = -12 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \cos 2\pi t, \quad F_y = m \cdot \ddot{y} = -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot \sin \pi t \text{ н}$$

емесе $F_x = -4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot x$, $F_y = -\pi^2 \cdot m \cdot y$.

Сан мәндерін орындарына қойып, аламыз

$$F_x = -0,0789x \text{ Н}, \quad F_y = -0,0197y \text{ Н}.$$

3-мысал. Массасы m -ге тең, бойында электрдің e заряды бар материялық нүкте кернеуі $E = A \cdot \sin kt$ болатын біртекті электр өрісінде орналасқан. Мұндағы A және k берілген тұрақты шамалар. Электр өрісінде материялық нүктеге $\bar{F} = e \cdot \bar{E}$ бағыты \bar{E} кернеуіне қарай бағытталған күш әсер етеді. Салмақ күшінің әсерін ескермей, бастапқы жылдамдығын нөлге тең деп санау керек. Нүктенің бастапқы орнын координаттардың бас нүктесі ретінде қабылдап, оның қозғалысын анықтау керек.

Шешуі: Материялық нүктеге әсер етуші бір ғана күш бар, ол $F = e \cdot A \cdot \sin kt$. Бастапқы жылдамдығын нөлге тең болғандықтан нүкте қозғалысы – түзу сызықты қозғалыс болады. Бойымен нүкте қозғалатын түзуді Ox өсі ретінде қабылдаймыз. Нүкте қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеу біреу ғана

$$m \cdot \ddot{x} = e \cdot A \cdot \sin kt \text{ немесе } \ddot{x} = \frac{e \cdot A}{m} \cdot \sin kt.$$

Осы теңдікті бір рет интегралдап, аламыз

$$\dot{x} = -\frac{e \cdot A}{k \cdot m} \cdot \cos kt + C_1.$$

C_1 тұрақтысын табу үшін бастапқы мәндер $t_0 = 0, v_0 = \dot{x}_0 = 0$

шамаларын жоғарыдағы \dot{x} өрнегіне қоямыз. Сонда $C_1 = \frac{e \cdot A}{k \cdot m}$.

Алдыңғы теңдікке C_1 мәнін қойып оны қайта жазуға болады

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e \cdot A}{k \cdot m} \cdot \cos kt + \frac{e \cdot A}{k \cdot m}.$$

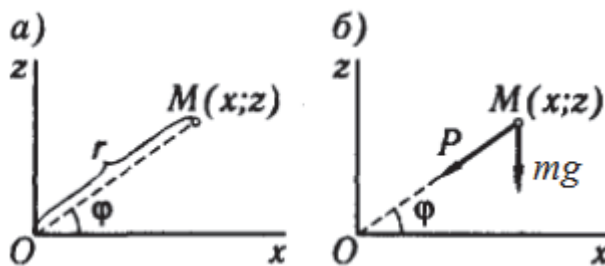
Соңғы теңдеуді тағы бір рет интегралдап, аламыз

$$x = \frac{e \cdot A}{k \cdot m} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right) + C_2,$$

мұндағы тұрақты C_2 -нің нөлге тең екендігін, $t_0 = 0$ болғанда $x = x_0 = 0$ болатын бастапқы шартынан анықтаймыз.

Сонымен, M нүктенің қозғалыс заңдылығы мынадай өрнекпен беріледі $x = \frac{e \cdot A}{k \cdot m} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right)$.

4-мысал. Массасы 1 кг тең M материялық нүктесі вертикаль xOz жазықтығында координат басына бағытталған $\bar{P} = -c\bar{r}$ тарту күші әсерінен қозғалады, мұнда \bar{r} - нүктенің радиус-векторы, пропорционалдық коэффициенті $c=4 \text{ Н/м}$ (3.1.4,а-сурет). Ортаның кедергі күші жылдамдық шаршысына пропорционалды, яғни кедергі күші $\bar{R} = -\mu\bar{v}$, мұнда $\mu=0,2 \text{ кг/м}$. Нүктенің бастапқы координаталары $x_0=0, z_0=10 \text{ м}$, бастапқы жылдамдығы $v_0=20 \text{ м/с}$ горизонталь бағытталған. M нүктесінің қозғалыс теңдеулерін және траекториясын анықтау керек.



3.1.4-сурет

Шешуі: Материялық нүктеге келесі күштер түсірілген: $m\bar{g}$ ауырлық күші, \bar{P} тарту күші және нүкте жылдамдығына қарсы бағытталған ортаның кедергі \bar{R} күші (3.1.4.б-сурет). Нүктеге түсірілген күштер және оның бастапқы жылдамдығы xOz

жазықтығында орналасады, сондықтан нүкте осы жазықтықта қозғалады. Нүкте қозғалысының теңдеуін векторлық түрде жазамыз:

$$m\bar{a} = m\bar{g} + \bar{P} + \bar{R} \quad \text{немесе} \quad m\bar{a} = m\bar{g} - c\bar{r} - \mu\bar{v}.$$

Осы теңдеуді координаттық осьтерге проекциялаймыз

$$ma_x = -cr_x - \mu v_x, \quad ma_z = -mg - cr_z - \mu v_z.$$

Мұнда нүкте үдеуінің проекциялары $a_x = \ddot{x}$, $a_z = \ddot{z}$, нүкте радиус-векторының проекциялары $r_x = r \cos \varphi = x$, $r_z \varphi = z$, нүкте жылдамдығының модулі $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ және оның проекциялары $v_x = \dot{x}$, $v_z = \dot{z}$ болатынын ескеріп, нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін келесі түрде аламыз

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x}, \quad \ddot{z} = -g - \frac{c}{m}z - \frac{\mu}{m}\dot{z}.$$

Алынған дифференциалдық теңдеулер сызықты емес, олардың аналитикалық шешімі табылмайды. Теңдеулердің сандық шешімін Mathcad жүйесінде алуға болады. Ол үшін нүкте қозғалысының 2-ші ретті дифференциалдық теңдеулерін 1-ші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде жазу керек

$$\dot{x} = v_x,$$

$$\dot{v}_x = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}v_x,$$

$$\dot{z} = v_z,$$

$$\dot{v}_z = -g - \frac{c}{m}z - \frac{\mu}{m}v_z.$$

Сонда белгісіздер векторы келесі болады: $U = (x \quad v_x \quad z \quad v_z)^T$.

Mathcad жүйесінде Коши есебін, яғни бастапқы шарттармен дифференциалдық теңдеулерді шешуге арналған бірнеше әдіс бар. Біз мұнда тұрақты қадаммен Рунге-Кутт әдісін орындайтын $rkfixed(U0,0,t2,200,DU)$ функциясын қолданамыз. Функцияның бірінші параметрі $U0$ белгісіздер векторының бастапқы шамасын, 0 және $t2$ – интегралдау аралығын, 200 – интегралдаудағы қадамдар санын, DU – дифференциалдық теңдеулер жүйесін беретін векторлық функциясын білдіреді. Сандық шешім нәтижесі, $[0,t_2]$ уақыт аралығында $\Delta t = t_2 / 200$ қадамымен есептелген t, x, z, v_x, v_z мәндірінің матрицасы болып келеді. Мұнда 3.1.7-суретте көрсетілгендей нәтижелер матрицасы S әрпімен белгіленді.

$$m := 1 \quad c := 4 \quad \mu := 0.2 \quad g := 9.81 \quad t2 := 10$$

$$x0 := 0 \quad z0 := 10 \quad v0x := 20 \quad v0z := 0$$

$$U0 := \begin{pmatrix} x0 \\ v0x \\ z0 \\ v0z \end{pmatrix}$$

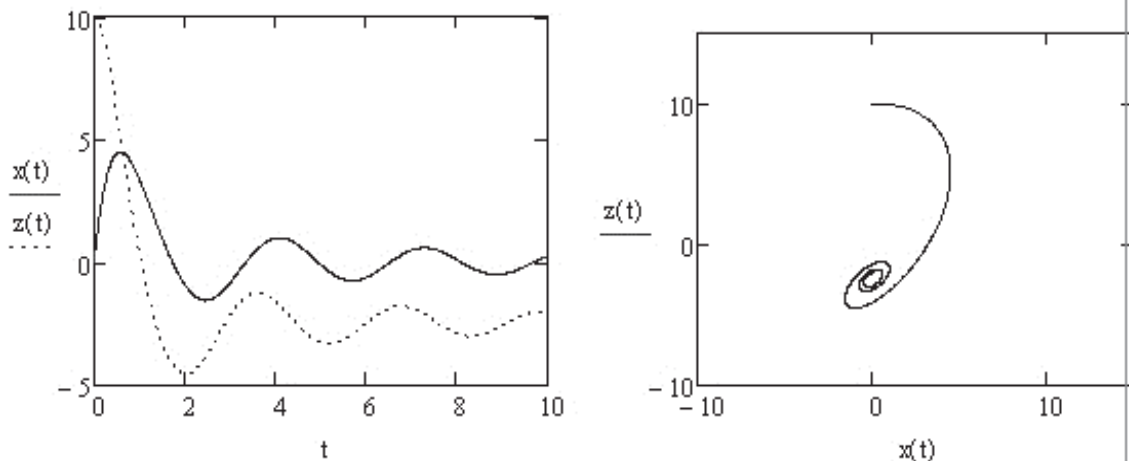
$$DU(t,U) := \begin{bmatrix} v \\ U_1 \\ -\frac{c}{m} \cdot U_0 - \frac{\mu}{m} \cdot v \cdot U_1 \\ U_3 \\ -g - \left(\frac{c}{m}\right) \cdot U_2 - \frac{\mu}{m} \cdot v \cdot U_3 \end{bmatrix}$$

$$S := \text{rkfixed}(U0, 0, t2, 200, DU)$$

$$x(t) := \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(1)}, t)$$

$$z(t) := \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(3)}, t)$$

$$t := 0, 0.01 .. t2$$



3.1.5-сурет

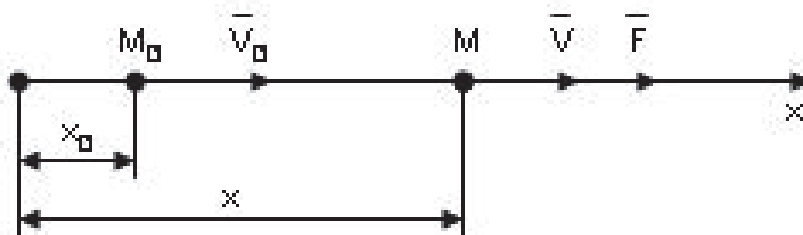
Қозғалыс графиктері мен траекторияны тұрғызу үшін айнымалылардың табылған мәндері бойынша интерполяцияны жүргізіп, олардың функцияларын табу керек. Mathcad жүйесінде сызықты интерполяция жүргізетін $\text{linterp}(x,y,t)$ функциясы бар. Соны қолданумен тұрғызылған қозғалыс графиктері және нүкте траекториясы 3.1.7-суретте көрсетілген.

3.1.5 Материялық нүктенің түзу сызықты қозғалысының квадратураға келтірілетін кейбір түрлері

Массасы m -ге тең материялық нүкте түзу сызықты қозғалыста болсын дейік. Бойымен нүкте қозғалатын түзуді Ox өсі ретінде алайық. Нүктенің түзу сызық бойымен қозғалуы үшін оған әсер етуші күштің бағыты үнемі тұрақты болып және нүктенің бастапқы

жылдамдығы осы күштің бойымен бағытталуы (немесе нольге тең болуы) қажет және жеткілікті.

Нүктенің Ox өсі бойымен болатын түзу-сызықты қозғалысының дифференциалдық теңдеуін жалпы жағдайда мына түрде жазамыз



3.1.6-сурет

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, \dot{x}). \quad (3.1.5.1)$$

Бастапқы шарттарды былай деп алуға болады (3.1.6-сурет)

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x}_0 = v_0. \quad (3.1.5.2)$$

(3.1.5.1)-екінші ретті дифференциалдық теңдеу. Оның жалпы шешімі екі интегралдау тұрақтысына тәуелді

$$x = f(t, c_1, c_2). \quad (3.1.5.3)$$

C_1 және C_2 интегралдау тұрақтыларын бастапқы шарттарды (3.1.5.2)-ні пайдалана отырып, (3.1.5.3)-теңдеу мен оның туындысынан шығатын теңдеуден табамыз. Осылайша есептеуден табылған C_1 және C_2 мәндерін (3.1.5.3)-теңдеуіне апарып қойсақ мынаны табамыз

$$x = f(t; x_0; v_0). \quad (3.1.5.4)$$

Бұл (3.1.5.4) бастапқы шарттарға сай келетін (3.1.5.1) теңдеуінің дербес шешімі болып табылады. Сөйтіп, нүктенің қозғалыс заңын өрнектейтін (3.1.5.4) теңдеуін осылайша тапқан болар едік. Бірақ (3.1.5.1) теңдеуінің шешімін табу жалпы жағдайда, математикалық көп қиындықтар туғызады. Дегенмен кейбір жеке жағдайларда оны квадратураға келтіре аламыз.

Күш тек уақытқа ғана тәуелді болып келетін жағдай. Қозғалыстың дифференциалдық теңдеуі бұл жолы былай жазылады

$$m\ddot{x} = F_x(t). \quad (3.1.5.5)$$

Бұдан

$$d\dot{x} = \frac{1}{m} F_x(t) dt.$$

Осыны интегралдау арқылы мынаны аламыз

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + C_1. \quad (3.1.5.6)$$

Тағы бір рет интегралдасақ алатынымыз

$$x = \frac{1}{m} \int [F_x(t) dt] dt + C_1 t + C_2. \quad (3.1.5.7)$$

Мысал. Массасы m -ге тең, бойында электрдің e заряды бар материялық нүкте кернеуі $E = A \sin kt$ болатын біртекті электр өрісінде орналасқан. Мұндағы, A және k берілген тұрақты шамалар. Электр өрісінде материялық нүктеге $\vec{F} = e\vec{E}$ бағыты \vec{E} кернеуіне қарай бағытталған күш әсер етеді. Нүктенің бастапқы орнын координаттардың бас нүктесі ретінде қабылдап, оның қозғалысын анықтау керек. Салмақ күшінің әсерін ескермей, бастапқы жылдамдығын нөлге тең деп санауға болады (3.1.7-сурет).

Шешуі. Материялық нүктеге әсер етуші бір ғана күш бар, ол $F = eA \sin kt$. Нүкте қозғалысы – түзу сызықты қозғалыс. Бойымен нүкте қозғалатын түзуді Ox өсі ретінде қабылдаймыз.

Нүкте қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеу біреу ғана

$$m\ddot{x} = eA \sin kt.$$

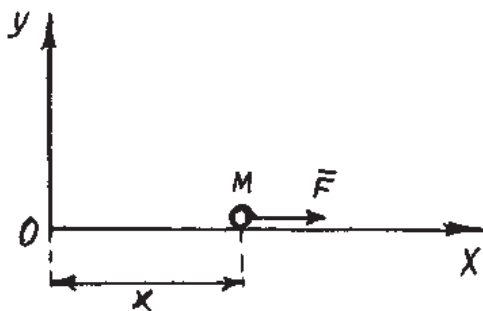
Осы дифференциалдық теңдеудің айнымалы шамаларын ажыратып жазамыз.

Теңдеу $m d(\dot{x}) = eA \sin kt dt$ бір рет интегралданғаннан кейін мына түрге келеді

$$m\dot{x} = -\frac{eA}{k} \cos kt + C_1.$$

C_1 – ді табу үшін бастапқы мәндер $t_0 = 0$, $v_0 = \dot{x}_0 = 0$ шамаларын жоғарыдағы \dot{x} өрнегіне апарып қоямыз. Сонда

$$C_1 = \frac{eA}{k}.$$



3.1.7-сурет

Алдыңғы теңдікке C_1 мәнін қойып оны қайта жазуға болады

$$m \frac{dx}{dt} = -\frac{eA}{k} \cos kt + \frac{eA}{k}.$$

Соңғы теңдеуден

$$x = \frac{eA}{km} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right) + C_2,$$

мұндағы, тұрақты C_2 -нің нөлге тең

екендігін, $t_0 = 0$, болғанда $x - x_0 = 0$ болатын бастапқы шарттан анықтаймыз.

Сонымен, M нүктенің қозғалыс заңы мына өрнекпен беріледі

$$x = \frac{eA}{km} \left(t - \frac{\sin kt}{k} \right).$$

Күш тек жылдамдыққа ғана тәуелді болып келетін жағдай.

Бұл жағдай көбіне кедергілі ортада қозғалған кезде сай келеді. Орта кедергісі тек нүкте жылдамдығына ғана тәуелді $F = F_x(\dot{x})$ түріндегі функциямен беріледі дейік. Онда нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін мына түрде алуға болады

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}). \quad (3.1.5.8)$$

(3.1.5.8) теңдеуіндегі \dot{x} және t айнымалыларына ажырату әдісін қолданайық

$$\frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = \frac{1}{m} dt.$$

Бұл теңдеуді интегралдай отырып алатынымыз

$$\int \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = \frac{1}{m} t + C_1.$$

Егер мынадай белгілеу енгізсек

$$\varphi(\dot{x}, C_1) = m \int \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} - mC_2. \quad (3.1.5.9)$$

Онда осының алдындағы теңдеуді былай жазар едік: $t = \varphi(\dot{x}, C_1)$.

Осы соңғы теңдеуден \dot{x} –ні таба алатын болсақ, онда

$$\dot{x} = f(t, C_1). \quad (*)$$

Бұл теңдеуден

$$x = \int f(t, C_1) dt + C_2. \quad (3.1.5.10)$$

Ал, егер \dot{x} –ні уақыт t және C_1 тұрақты арқылы (*-түрінде) анықтай алмасақ, онда (3.1.5.8) теңдеуін басқаша түрлендіре отырып шешеміз. (3.1.5.8)-теңдеудің сол жағын түрлендірейік

$$m\ddot{x} = m \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}.$$

Олай болса (3.1.5.8) теңдеуі енді былай жазылады

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = F_x(\dot{x}). \quad (3.1.5.11)$$

(3.1.5.11) теңдеуіндегі \dot{x} және x айнымалыларын ажыратып, біреуін теңдіктің бір жағына, ал екіншісін оның оң жағына шығарып оны қайталап жазайық. Сонда

$$m\dot{x} = \frac{d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx.$$

Мұны интегралдаймыз

$$x = m \int \frac{\dot{x} d\dot{x}}{F_x(\dot{x})} + C'_1. \quad (3.1.5.12)$$

Егер (3.1.5.12) теңдеуден \dot{x} – ті уақыт t функциясы ретінде анықтай алсақ, онда мынадай теңдікті анықтауға болар еді

$$\dot{x} = \psi(x, C'_1).$$

Ал бұл теңдікті мына түрге келтіруге болады

$$\frac{dx}{\psi(x, C'_1)} = dt.$$

Енді осыны интегралдаймыз

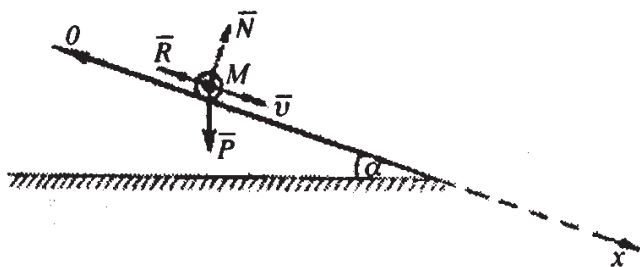
$$t = \int \frac{dx}{\psi(x, C'_1)} + C_2. \quad (3.1.5.13)$$

(3.1.5.13)-теңдеуден нүкте қозғалысының заңын, яғни x – тің уақытқа тәуелділігін табуға болады.

1-мысал. Массасы m – ге тең M нүкте үйкеліссіз көлбеу жазықтық пен кедергілі ортада қозғалсын. Орта кедергісі жылдамдықтың бірінші дәрежесіне пропорционал болсын $\bar{R} = -km\bar{v}$, мұндағы k тұрақты шама (3.1.8-сурет). Нүктенің қозғалыс заңын анықтау керек.

Шешуі. Ox өсін көлбеу жазықтық бойымен бағыттайық. Нүктенің қозғалыс теңдеуі

$$m\ddot{x} = P \sin \alpha - R, \quad \ddot{x} = g \sin \alpha - k\dot{x}. \quad (a)$$



3.1.8-сурет

(a) теңдеуіндегі \dot{x} және t айнымалыларды ажыратып жазамыз

$$\frac{d\dot{x}}{g \sin \alpha - k\dot{x}} = dt. \quad (б)$$

(б)-теңдеуді бір рет интегралдап мынадай теңдеу аламыз

$$-\frac{1}{k} \ln(g \sin \alpha - k\dot{x}) = t + C_1. \quad (в)$$

$t = 0$ болғанда, $\dot{x}_0 = 0, x_0 = 0$. (г)

Бұл бастапқы мәндерді (в) теңдеуіне қойсақ

$$-\frac{1}{k} \ln g \sin \alpha = C_1.$$

Олай болса (в) теңдеуі мына түрде қайта жазылады

$$-\frac{1}{k} \ln(g \sin \alpha - k\dot{x}) = t - \frac{1}{k} \ln g \sin \alpha.$$

Осыдан

$$\dot{x} = \frac{g \sin \alpha}{k} (1 - e^{-kt}). \quad (\text{ж})$$

(ж) теңдеуді тағы бір рет интегралдап мынаны аламыз

$$x = \frac{g \sin \alpha}{k} \left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} \right) + C_2. \quad (3)$$

(г)-дегі бастапқы шарттарды пайдалана отырып (3) теңдеуінен C_2 тұрақтысын табамыз

$$C_2 = -\frac{g \sin \alpha}{k^2}.$$

Осыны ескеріп (3) теңдеуін қайта жазамыз

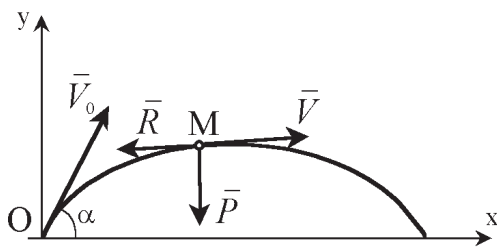
$$x = \frac{g \sin \alpha}{k} t - \frac{g \sin \alpha}{k^2} (1 - e^{-kt}). \quad (\text{и})$$

Сөйтіп, нүктенің кедергілі ортада көлбеу жазықтықпен қозғалысының заңын (и) теңдеуі түрінде анықтадық. Орта кедергісінің нүктеге әсері k тұрақты кедергі коэффициентімен сипатталады.

2-мысал. Салмағы \bar{P} -ға тең дененің бағыты көкжиекпен α бұрышын жасайтын бастапқы жылдамдығы \bar{v} берілген. Бұдан әрі қарай дене тек салмақ күші және ауа кедергісі \bar{R} -дің әсерінен ғана қозғалады. Ауа кедергісін дене жылдамдығының бірінші дәрежесіне пропорционал деп есептеп ($\bar{R} = kP\bar{v}$), оның қозғалыс теңдеулерін табу керек (3.1.9-сурет).

Шешуі. Координаттардың бас нүктесі ретінде нүктенің алғашқы орнын қабылдап, Ox өсін горизонталь бағыттауымыз. Нүктенің кез келген бір орнын қарастырып, оған сол уақыт сәтінде әсер ететін күштерді көрсетейік. Нүкте қозғалысының негізгі теңдеуін жазып аламыз

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{R}, \quad m\bar{a} = \bar{P} - kP\bar{v}.$$



3.1.9-сурет

Бұл теңдеулерді Ox, Oy өстеріне проекциялаймыз

$$m\ddot{x} = -kP\dot{x}, \quad \ddot{y} = -P - kP\dot{y}.$$

Теңдеулердің екі жақтарын m массасына бөліп, оларды қайта жазамыз

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + kg\dot{y} = -g. \quad (a)$$

Екі теңдеу де коэффициенттері тұрақты, сызықтық теңдеулер болып табылады. Сызықтық теңдеулерді интегралдаудың жалпы теориясы бойынша $x = e^{\lambda t}$ деп белгілеп, (a) жүйесіндегі бірінші теңдеудің сипаттаушы теңдеуін жазамыз

$$\lambda^2 + k\lambda = 0.$$

Бұл сипаттаушы теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -kg$ болғандықтан (a) жүйесіндегі бірінші теңдеудің жалпы шешімі мына түрде анықталады

$$x = C_1 + C_2 e^{-kg t},$$

мұндағы, C_1 және C_2 – интегралдау тұрақтылары. Енді $t = 0, x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ бастапқы шамаларды пайдалансақ, C_1 және C_2 арасындағы тәуелділікті беретін екі теңдеу аламыз

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -kg C_2 = v_0 \cos \alpha.$$

Осы жүйеден

$$C_2 = -\frac{v_0 \cos \alpha}{kg}, \quad C_1 = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg}.$$

Сондықтан да (a) жүйесінің бірінші теңдеуінің интегралы мынадай

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kg t}).$$

(a) жүйесіндегі екінші теңдеудің жалпы шешімі

$$y = y_1 + y_2,$$

мұндағы, y_1 біртекті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі, ал y_2 біртекті емес дифференциалдық теңдеудің дербес шешімі. Дербес шешім y_2 -ні таңдау әдісін қолдану арқылы табамыз

$$y_2 = -\frac{1}{k} t.$$

Ал y_1 -ді сипаттаушы теңдеу арқылы, жоғарыда x -ті табуға қолданылған әдіспен анықтаймыз

$$y_1 = C_3 + C_4 e^{-kg t}.$$

Сөйтіп, (а) жүйесіндегі екінші дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі мынадай

$$y = C_3 + C_4 e^{-kgt} - \frac{1}{k} t.$$

Енді C_3 , C_4 интегралдау тұрақтыларын табу қалды. Ол үшін бастапқы шарттарды пайдаланамыз: $t_0=0$ болғанда $y_0=0$ $\frac{dy}{dt} = v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ болады. Осы шамаларды y өрнегіне және \dot{y} өрнегіне апарып қойсақ

$$C_3 + C_4 = 0, \quad -kgC_4 - \frac{1}{k} = v_0 \sin \alpha,$$

теңдеулерін аламыз. Бұлардан

$$C_3 = \frac{1}{k^2 g} + \frac{v_0 \sin \alpha}{kg}, \quad C_4 = -\frac{1}{k^2 g} - \frac{v_0 \sin \alpha}{kg}.$$

Сөйтіп, екінші біртекті емес дифференциалдық теңдеудің шешімін таптық

$$y = \left(\frac{1}{k^2 g} + \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{1}{k} t.$$

Нүктенің қозғалысын анықтайтын кинематикалық теңдеулерді қатарлап жазып қояйық

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}),$$

$$y = \left(\frac{1}{k^2 g} + \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} \right) (1 - e^{-kgt}) - \frac{1}{k} t.$$

3.1.6 Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Нүкте динамикасының үш жалпы теоремасы бар. Олардың бәрі де осындағы негізгі заңнан қорытылып шығарылады. Осы теоремаларға тоқталайық.

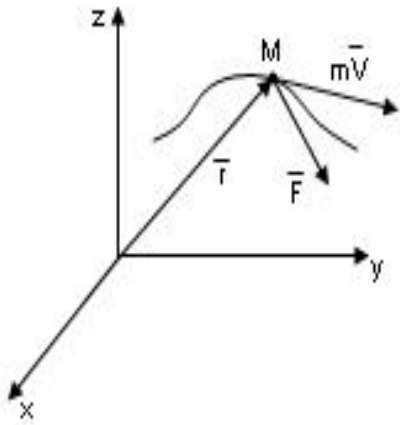
Материялық нүктенің m массасы мен \bar{v} жылдамдығының көбейтіндісіне тең $\bar{q} = m\bar{v}$ векторын оның қозғалыс мөлшері дейміз. \bar{q} -векторы нүктеге түсірілген \bar{F} - күші әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп отырады (3.1.10 -сурет). Бұл вектордың бір уақыт ішіндегі өзгерісінің әсер етуші күшпен қандай байланыста болатындығын табайық. Ол үшін негізгі теңдеуді түрлендіру керек

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \text{ немесе } \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}. \quad (3.1.6.1)$$

Бұл теңдеудің екі жағын да dt -ға көбейтеміз

$$d(m\bar{v}) = \bar{F} dt. \quad (3.1.6.2)$$

(3.1.6.2)-теңдеудің оң жағындағы $\bar{F} dt$ көбейтіндісін күштің элементар импульсі деп атайды, олай болса (3.1.6.1)-теңдеу теорема түрінде былай айтылады: *материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің дифференциалы күшінің элементар импульсіне тең.*



3.1.10-сурет

Уақыт $t = t_0$ болғанда нүкте жылдамдығы $\bar{v} = \bar{v}_0$ болады дейік. (3.1.6.2)–теңдіктің сол жағынан \bar{v}_0 -ден \bar{v} -ға дейінгі шектерде, ал оң жағынан t_0 -ден t -ға дейінгі шектердегі интегралдар алайық

$$\int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} d(m\bar{v}) = \int_{t_0}^t \bar{F} dt, \quad m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_{t_0}^t \bar{F} dt. \quad (3.1.6.3)$$

Элементар импульстерден $t = t_0$ уақыт аралығында алынған интегралмен анықталатын \bar{S} векторын күштің сол уақыт аралығындағы импульсі деп атайды

$$\bar{S} = \int_{t_0}^t \bar{F} dt.$$

Күш импульсінің координаттар өстеріндегі проекциялары мынадай теңдіктермен анықталынады

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z dt. \quad (3.1.6.4)$$

(3.1.6.4) теңдігінің оң жағында тұрған интеграл күштің $t = t_0$ уақыт аралығындағы импульсін анықтайды, сондықтан да оны мына түрде қайталап жазайық $m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \bar{S}$. (3.1.6.5)

(3.1.6.3) және (3.1.6.5) теңдіктері материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың айырым түріндегі өрнегін береді: *қандай да уақыт аралығындағы нүктенің қозғалыс мөлшерлерінің өзгеруі сол уақыт аралығындағы күш импульсіне тең.*

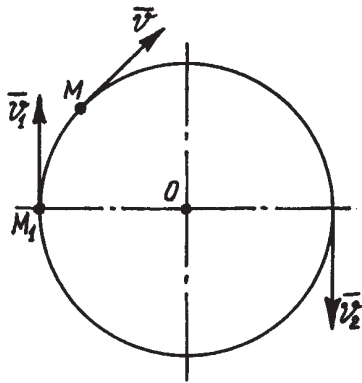
Векторлық теңдеу (3.1.6.5)-ті координаттық өстерге проекцияласақ осындай үш скалярлық теңдеуді аламыз

$$mv_x - mv_{0x} = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad mv_y - mv_{0y} = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad mv_z - mv_{0z} = \int_{t_0}^t F_z dt. \quad (3.1.6.6)$$

Күш импульсінің координаттық өстердегі проекцияларының (3.1.6.4) теңдеулерінде көрсетілген анықтамаларын пайдалансақ, онда соңғы скалярлық теңдеулерді мына түрде жазамыз

$$mv_x - mv_{0x} = S_x, \quad mv_y - mv_{0y} = S_y, \quad mv_z - mv_{0z} = S_z. \quad (3.1.6.7)$$

Теореманың координаттық өстерге проекциясы былай айтылады: *нүктенің қозғалыс мөлшерінің берілген өстегі проекциясының қандайда бір уақыт аралығындағы өзгеруі сол уақыт аралығындағы күш импульсінің осы өстегі проекциясына тең.*



3.1.11-сурет

1-мысал. Материялық нүкте M шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалады (3.1.11-сурет). Нүктенің массасы m және оның жылдамдығы v .

Нүкте жарты шеңбер жол жүріп, M_1 орнынан M_2 орнына орын ауыстырған уақыт аралығындағы нүктеге түсірілген күштің S импульсін анықтау керек.

Шешуі. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

$$\bar{S} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1,$$

мұндағы, \bar{v}_1 және \bar{v}_2 – сәйкес M_1 және M_2 нүктелерінің жылдамдық векторлары.

Есептің берілгені бойынша $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$, яғни

$$\bar{S} = m\bar{v}_2 + m\bar{v}_2 = 2m\bar{v}_2,$$

импульс \bar{S} -тің бағыты \bar{v}_2 -нің бағытымен бағыттас, ал оның шамасы

$$S = 2mv_2 = 2mv.$$

2-мысал. Горизонтпен α бұрышын жасайтын тегіс емес көлбеу жазықтық бетімен салмақты дене төмен түсіп келеді. Дененің $l = 39.2$ м жолды қанша уақыт ішінде жүріп өтетінін анықтау керек. Көлбеу жазықтықтың үйкеліс коэффициенті $f = 0.2$, көлбеу бұрышы $\alpha = 30^\circ$, дененің бастапқы жылдамдығы $v_0 = 0$ (3.1.12-сурет).

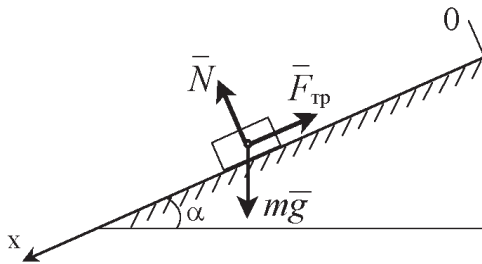
Шешуі. Есептің шартына сай сурет салып аламыз (3.10-сурет). Координаттар өстерінің бірін көлбеу жазықтық бетімен бағыттаған орынды. Есептің шартында уақыт сұралғандықтан есепті шешуге қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы қолданған жөн

$$\frac{P}{g} v_x - \frac{P}{g} \cdot 0 = \int_0^t (P \sin \alpha - F) dt; \quad \int (N - P \cos \alpha) dt = 0. \quad (a)$$

Біз (a) жүйесін құрарда M нүктесіне әсер етуші $\bar{N}, \bar{F}, \bar{P}$ күштерін алдымен Ox өсіне, одан кейін Oy өсіне проекцияладық. (a) жүйесіндегі екінші теңдеуден

$$0 = N - P \cos \alpha, \quad N = P \cos \alpha.$$

(a) жүйесіндегі бірінші теңдеуден



3.1.12-сурет

$$\frac{P}{g} v_x = (P \sin \alpha - F) \cdot t,$$

мұндағы, F нормаль қысымға пропорционал үйкеліс күші

$$F = fN = fP \cos \alpha.$$

Сондықтан да

$$P \frac{dx}{dt} = P g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t.$$

Соңғы теңдеудің екі жағын да P -ға қысқартып және айнымалыларын бөлектеп жазу арқылы мынаны аламыз

$$dx = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t dt.$$

Бұл теңдеудің сол жағын 0-ден l -ға дейін, ал оң жағын 0-ден T -ға дейін интегралдаймыз

$$\int_0^l dx = g \int_0^T (\sin \alpha - f \cos \alpha) t dt, \quad l = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) T^2 / 2.$$

Соңғы теңдеуден керекті уақыт T -ны табамыз

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{78,4}{(0,5 - 0,86 \cdot 0,2) \cdot 9,8}} = 5 \text{ с}.$$

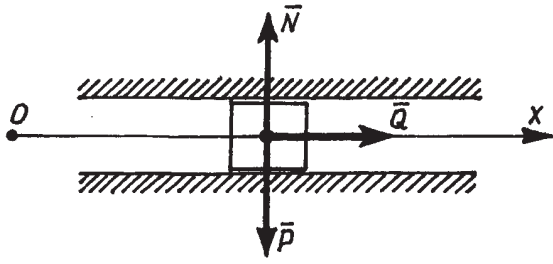
3-мысал. Салмағы P -ға тең дене (3.1.13-сурет) \bar{Q} күшінің әсерінде горизонталь бағыттаушы бойымен қозғалады, оның бағыттаушыға параллель Ox өсіне проекциясы мынадай заңдылықпен өзгереді

$$Q_x = Q_0 \cos(kt),$$

мұндағы, Q_0 және k -тұрақты шамалар. Үйкеліс күшін есепке алмаймыз.

$$t_2 = \frac{\pi}{2k} \text{ уақыт мезгіліндегі дене жылдамдығын анықтау керек.}$$

Шешуі. Дененің қозғалысы ілгерілемелі қозғалыс, сондықтан оны материялық нүкте ретінде қарастырамыз.



3.1.13-сурет

Денеге салмақ \bar{P} күші, бағыттаушының реакциясы \bar{N} және \bar{Q} күші әсер етеді. Салмақ \bar{P} және \bar{N} реакция күштері теңгеріледі. Яғни \bar{F} күші \bar{Q} күшіне тең.

(3.1.6.6)-теңдеулердің біріншісін пайдаланамыз

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad (a)$$

мұндағы, $m = \frac{P}{g}$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2k}$, $v_{1x} = v_1$, $F_x = Q_x = Q_0 \cos(kt)$.

Сондықтан (a) теңдеуін мына түрде жазамыз

$$\frac{P}{g} v_{2x} - \frac{P}{g} v_{1x} = Q_0 \int_0^{\pi/2k} \cos(kt) dt,$$

немесе

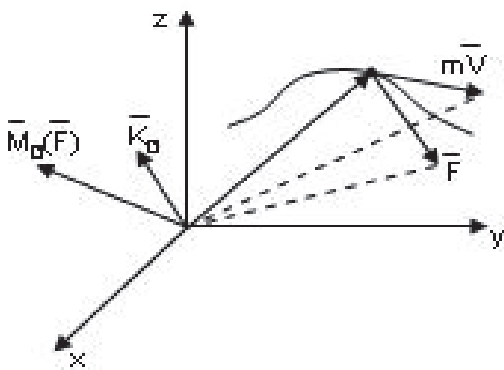
$$\frac{P}{g} v_{2x} - \frac{P}{g} v_{1x} = Q_0 \frac{1}{k}.$$

Осыдан t_2 уақыт мезгілінде дене жылдамдығының Ox өсіне проекциясын анықтаймыз

$$v_{2x} = v_1 + \frac{gQ}{kP}.$$

3.1.7 Материялық нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің қандайда бір центрге қатысты алынған моментін оның сол центрге қатысты кинетикалық моменті дейді.



3.1.14-сурет

O центріне қатысты алынған кинетикалық моменті \bar{K}_0 әрпімен белгілейік. Сонда ол $\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}$ немесе $\bar{K}_0 = \bar{M}_0(m\bar{v})$ түріндегі өрнекпен беріледі. Кинетикалық момент күш әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп тұрады (3.1.14-сурет).

Оның өзгерісінің күшке тәуелділігін табайық. Ол үшін негізгі теңдеудің екі жағын да нүктенің \bar{r} радиус-векторына векторлық түрде көбейтейік

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (3.1.7.1)$$

Бұл теңдеудің сол жағындағы векторлық көбейтіндіні түрлендірейік

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}) - \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\bar{v}). \quad (3.1.7.2)$$

Бұл арада азайтқыш векторлық көбейтіндінің нөлге айналатынын ескердік. Ол екі коллинеарлық вектордың векторлық көбейтіндісі болуы себепті нөлге айналады. (3.1.7.1)-теңдіктің сол жағындағы векторлық көбейтіндіні (3.1.7.2) түрінде аламыз

$$\frac{d(\bar{r} \times m\bar{v})}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (3.1.7.3)$$

Осы теңдік материялық нүкте қозғалыс мөлшері моментінің өзгеруі туралы немесе басқаша айтқанда, нүктенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы өрнектейді. Жоғарыда берілген материялық нүктенің кинетикалық моменті деген анықтаманы қолдану арқылы (3.1.7.3) теңдігін басқа түрде де жазуға болады

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0(\bar{F}_0). \quad (3.1.7.4)$$

(3.1.7.3) не (3.1.7.4) теңдігімен өрнектелетін теорема былай айтылады: *қандай да бір центрге қатысты алынған нүкте кинетикалық моментінің уақыт бойынша туындысы сол центрге қатысты күш моментіне тең.*

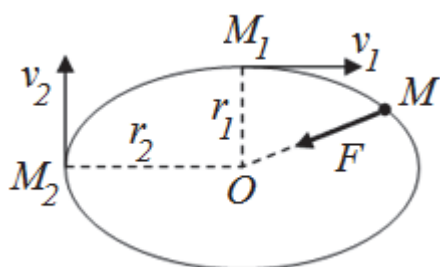
(3.1.7.4)-теңдеуді координаттық үш өске проекциялап жазайық

$$\frac{dK_{0x}}{dt} = M_x(\bar{F}), \quad \frac{dK_{0y}}{dt} = M_y(\bar{F}), \quad \frac{dK_{0z}}{dt} = M_z(\bar{F}). \quad (3.1.7.5)$$

(3.1.7.5)–теңдіктері нүктенің координаттар өстеріне қатысты алынған кинетикалық моменттерінің өзгеруін сипаттайды: *координаттар өстеріне қатысты алынған нүкте кинетикалық моменттерінің уақыт бойынша туындылары сол өстерге қатысты алынған күш моменттеріне тең.*

Мысал. M нүктесі қозғалмайтын O центріне бағытталған \bar{F} тартылыс күші әсерінен қозғалады. Нүктенің центрге ең жақын орналасуында жылдамдығы $v_1 = 30 \text{ см/с}$ тең. Нүктенің центрден ең

алыс орналасуында жылдамдығын табу керек, егер $r_2 = 3r_1$ болса (3.1.15-сурет).



3.1.15-сурет

Шешуі: M нүктесінің O центріне қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы қолданамыз:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O(\bar{F}).$$

Мұнда күш центрден өтетін болған соң оның моменті нөлге тең, сонда

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{K}_O = const. \text{ Нүктенің центрге}$$

қатысты кинетикалық моментінің модулі M_1 орнында $K_{O1} = mv_1 \cdot r_1$, M_2 орнында $K_{O2} = mv_2 \cdot r_2$. Оларды теңестіріп, аламыз

$$v_2 = \frac{v_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{30 \cdot r_1}{3r_1} = 10 \text{ см / с.}$$

3.1.8 Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Нүктенің кинетикалық энергиясы деп оның массасы мен жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең болатын скаляр шаманы айтады. Егер нүктенің кинетикалық энергиясын T деп алсақ, онда ол мынадай формуламен анықталады

$$T = \frac{1}{2} mv^2. \quad (3.1.8.1)$$

Күш әсерінен нүктенің жылдамдығы \bar{v} өзгерді. Сол себепті кинетикалық энергия да уақыт өткен сайын өзгеріп отырады.

Енді кинетикалық энергияның өзгерісінің күшпен байланысын беретін теоремаға тоқталайық. Ол теореманы негізгі теңдеуден қорытып шығарамыз. Сол мақсатпен негізгі теңдеуді алайық та оның екі жағын да $d\bar{r}$ элементар орын ауыстыруға көбейтейік

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = \bar{F} d\bar{r}.$$

Бұл теңдеудің сол жағын түрлендірейік

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} d\bar{r} = m d\bar{v} \frac{d\bar{r}}{dt} = m d\bar{v} \times \bar{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Осы түрлендіру нәтижесін пайдаланып алдыңғы теңдеуді мына түрде қайта жазайық

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}d\bar{r}, \quad (3.1.8.2)$$

күшінің $d\bar{r}$ элементар орын ауыстыруға көбейтіндісін күштің элементар жұмысы деп атайды. Элементар жұмысты $d'A$ деп белгілейміз

$$d'A = \bar{F}d\bar{r}, \quad (3.1.8.3)$$

мұндағы штрих элементарлық жұмыстың жалпы жағдайда қандай да бір функцияның толық дифференциалы емес екендігін көрсетеді.

Кинетикалық энергия мен элементар жұмыс белгілеулерін пайдаланып (3.1.8.2) теңдігін қайта жазайық

$$dT = d'A. \quad (3.1.8.4)$$

(3.1.8.2) не болмаса (3.1.8.4) теңдігі дифференциалдық түрдегі теореманың өрнегін береді. Оны былай айтамыз: *материялық нүктенің кинетикалық энергиясының дифференциалы оған әсер ететін күштің элементар жұмысына тең.*

Енді материялық нүкте өзінің траекториясы, AB қисығы бойымен M_0M_1 жолын жүріп өтсін. Бұл жолда материялық нүкте жылдамдығы \bar{v}_0 -ден \bar{v}_1 -ге дейін өзгереді. (3.1.8.2) теңдігінің екі жағынан да M_0M_1 доғасы бойымен қисық сызықты интеграл алайық

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_0M_1} \bar{F}d\bar{r}.$$

Бұл теңдіктің сол жағындағы қисық сызықты интеграл кинетикалық энергияның соңғы және бастапқы мәндерінің айырмасына тең

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_0M_1} \bar{F}d\bar{r}. \quad (3.1.8.5)$$

M_0M_1 жолындағы күштің толық жұмысы A қисықтың M_0M_1 доғасы бойындағы элементар жұмыстарынан алынған қисық сызықты интегралға тең

$$A = \int_{M_0M_1} \bar{F}d\bar{r}. \quad (3.1.8.6)$$

Егер материялық нүктенің бастапқы орындағы кинетикалық энергиясын T_0 деп, ал соңғы орындағысын T_1 деп белгілесек және

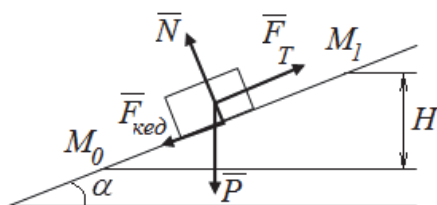
күш жұмысының (3.1.8.6)–теңдіктегі анықтамасын ескерсек, теңдікті қысқа түрде былай жазамыз

$$T_1 - T_0 = A. \quad (3.1.8.7)$$

Нүктенің қандай да бір орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі сол орын ауыстырудағы оған әсер етуші күштің жұмысына тең.

Кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теоремадан қай жағдайда бірінші интеграл алуға болатынын анықтау үшін алдымен күш жұмысының негізгі қасиеттерін зерттеп білуіміз керек.

Мысал. Салмағы 40000 кН пойыз өрге қарай түзу сызықты, ілгерілемелі қозғалады (3.1.16-сурет); $\text{tg}\alpha = 0,002$. Оның қозғалысына



3.1.16 сурет

кедергі күші пойыз салмағының 1 кН -ның 3 Н -ын құрайды. 750 м жол жүргенде жылдамдығы 18 -ден 36 км/сағ дейін өзгереді. Локомотивтің тұрақты тарту күшін анықтау керек.

Шешуі: Пойыздың ілгерілемелі қозғалысын материалдық нүктенің қозғалысы ретінде қарастырып, M_0M_1

орын ауыстыруында нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз. Осы орын ауыстыруда пойыздың жылдамдығы $v_0 = 18 \text{ км/сағ} = 5 \text{ м/с}$ -тан $v_1 = 36 \text{ км/сағ} = 10 \text{ м/с}$ -қа өседі.

Пойызға әсер ететін күштер: локомотивтің тарту күші \overline{F}_T , пойыздың салмақ күші \overline{P} , рельстің нормаль реакция күші \overline{N} және қозғалысына кедергі күші $\overline{F}_{\text{кед}}$, ал $F_{\text{кед}} = 0,003P$.

\overline{F}_T тарту күшінің $s = M_0M_1$ орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең $A_1 = F_T \cdot s$.

Пойыздың \overline{P} салмақ күшінің жұмысы, вертикаль H орын ауыстыруына байланысты және мынаған тең

$$A_2 = -P \cdot H = -P \cdot s \cdot \sin \alpha,$$

мұндағы α бұрышы өте аз болғандықтан $\sin \alpha \approx \text{tg}\alpha$ және

$$A_2 = -P \cdot s \cdot \text{tg}\alpha = -0,002 \cdot P \cdot s.$$

\overline{v} жылдамдығына перпендикуляр, рельстің реакция \overline{N} күшінің жұмысы нөлге тең.

Кедергі $\overline{F}_{\text{кед}}$ күшінің $s = M_0M_1$ орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең

$$A_3 = F_{кeд} \cdot s \cdot \cos 180^0 = -F_{кeд} \cdot s = -0,003 \cdot P \cdot s.$$

Пойыздың $m = P/g$ массасының шамасын және барлық күштер жұмыстарының шамаларын (1.28.10) түріндегі теоремаға қоямыз

$$\frac{P}{2g} \cdot (v_1^2 - v_0^2) = F_T \cdot s - 0,003 \cdot P \cdot s - 0,002 \cdot P \cdot s.$$

Локомотивтің тарту күшінің шамасын табамыз

$$F_T = \left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2gs} + 0,005 \right) P = 404,1 \text{ кН}.$$

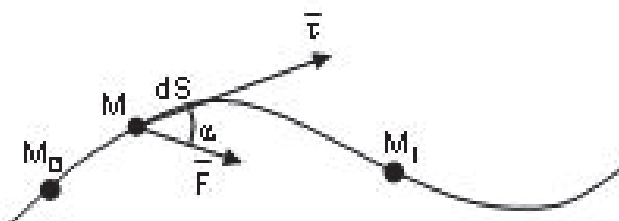
3.1.9 Күш жұмысы

Алдымен элементар жұмыстың математикалық өрнегінің әр түріне тоқтап өтейік. Элементар жұмыстың векторлардың скалярлық көбейтіндісі түрінде алынған (3.1.8.3) өрнегінен сол векторлардың проекциялары арқылы жазылуына көшуге болады

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.1.9.1)$$

Элементар жұмысты жолдың dS дифференциалы және күш \vec{F} пен \vec{v} -ның нүкте жылдамдығы бағытының арасындағы α бұрышы арқылы да өрнектей аламыз (3.1.17-сурет)

$$d'A = F |d\vec{r}| \cos(\vec{F}, d\vec{r}) = F |dS| \cos(\vec{F}, \vec{v}) = F dS \cos \alpha. \quad (3.1.9.2)$$



3.1.17-сурет

Бұл формуладағы F және dS оң шамалар $d'A$ элементар жұмыс-тың таңбасы $\cos \alpha$ таңбасымен бірдей. Егер α сүйір болса, $d'A$ оң, α доғал болса, $d'A$ теріс таңбалы болады.

Күштің элементар жұмысын есептеу үшін керекті тағы бір формуланы көрсетейік. Бұл арада

$d\vec{r} = \vec{v} dt$ екенін еске аламыз да, элементар жұмыс өрнегін жаңа түрге келтіреміз

$$d'A = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt. \quad (3.1.9.3)$$

Элементар жұмыстың әр түрлі өрнегіне сәйкес, күштің толық жұмысы да әр түрлі формулалармен сипатталады

$$A = \int_{M_0 M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad A = \int_{M_0 M_1} (F \cos \alpha) dS, \quad A = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \vec{v} dt. \quad (3.1.9.4)$$

Жұмыс өлшемінің бірлігі үшін (БҚЖ) жүйесінде 1 Джоуль алынады ($1ДЖ = 1Нм$), ал техникалық жүйеде $-1кГм$ ($1кГм = 9,81ДЖ$).

Уақыт бірлігіне қатысты алынған жұмыс қуат деп аталады. Қуатты N деп алсақ, онда оны мына формуламен анықтаймыз

$$N = \frac{d'A}{dt}. \quad (3.1.9.5)$$

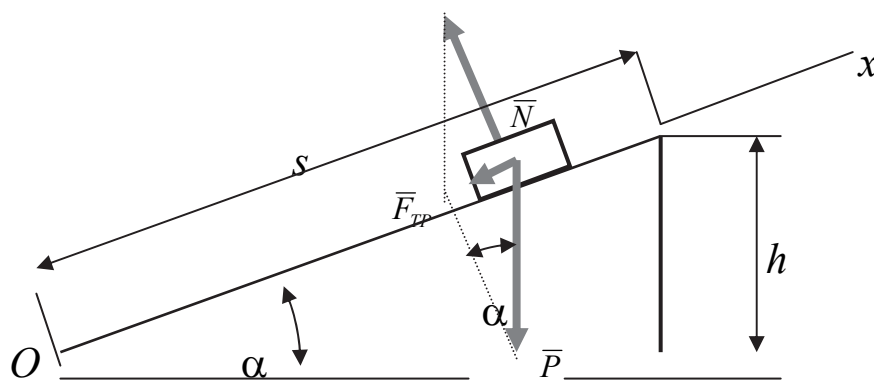
Мұндағы $d'A$ элементар жұмысты (3.1.8.3) формуласымен алатын болсақ, онда қуат күш пен жылдамдықтың скалярлық көбейтіндісіне тең

$$N = \overline{F\vec{v}}. \quad (3.1.9.6)$$

Қуат бірлігі үшін (БХЖ) жүйесінде 1-ватт ($1Вт = 1Дж/сек$) алынады. Практикада қуаттың ірі бірлік өлшемі киловатт ($1квт = 10^3 Вт$) жиі қолданылады.

1-мысал. Салмағы $2m$ жүкті горизонтпен 30° бұрыш құратын көлбеу жазықтықтың бойымен $5m$ биіктікке көтеру үшін жұмсалатын ең аз жұмысты анықтау қажет. Үйкеліс коэффициенті 0.5 -ке тең (3.1.18-сурет).

Шешуі. Жүкке түсірілген күштер: оның салмақ күші – \overline{P} , үйкеліс күші – $\overline{F}_{\%ойк}$, көлбеу жазықтықтың нормаль реакция күші – \overline{N} .



3.1.18-сурет

Көлбеу жазықтыққа параллель, бас нүктесі қозғалыс басталатын нүкте болатын жоғары бағытта x өсін бағыттаймыз.

Жүкті жоғары көтеруге жұмсалатын жұмыс, түсірілген күштердің жұмыстарының қосындысына тең

$$\sum A_i = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{\%ойк}) + A(\overline{N}).$$

Салмақ күшінің жұмысы теріс шамаға тең, себебі жүк жер бетінен жоғары көтеріледі

$$A(\bar{P}) = -Ph = -mgh.$$

Үйкеліс күшінің жұмысын мынадай формула арқылы анықтаймыз

$$A(\bar{F}_{\%ойк}) = -F_{\%ойк} s = -fNs = -fPs \cos \alpha = -fmgs \cos \alpha.$$

Егер жүк $h=5$ м биіктікке көтерілетін болса $x = s = \frac{h}{\sin \alpha}$, онда

$$A(\bar{F}_{\%ойк}) = -fmgh \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -fmgh \operatorname{ctg} \alpha.$$

Орын ауыстыру бағытына перпендикуляр болғандықтан нормаль реакция \bar{N} -нің жұмысы нөлге тең, яғни $A(\bar{N}) = 0$.

Сонымен, жүкке түсірілген күштер жұмыстарының қосындысы:

$$\sum A_i = A(\bar{P}) + A(\bar{F}_{\%ойк}) = -mgh - fmgh \operatorname{ctg} \alpha = -mgh(1 + f \operatorname{ctg} \alpha) = -2000 \cdot 9,81 \cdot 5(1 + 0,5 \cdot 1,732) \approx -183000 \text{ Дж}$$

$$A = 183 \text{ кДж}.$$

2-мысал. Шахта лифтісі $v_0 = 12$ м/с жылдамдықпен төмен қарай қозғалады. Лифтінің массасы 6 т. Егер лифтіні ұстап тұратын арқан үзілетін болса, онда лифтіні $s=10$ м жолда тоқтату үшін, сақтандырушы парашют лифті мен шахтаның арасында қандай шамада үйкеліс күшін пайда болдыруы қажет? Үйкеліс күшін тұрақты деп санаймыз.

Шешуі. Материялық нүктеге түсірілген \bar{P} салмақ күшін және $\bar{F}_{\%ойк}$ күшін көрсетеміз (3.1.19-сурет). Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\bar{F}_k).$$

Материялық нүктеге түсірілген күштердің s орын ауыстыруында жұмысын есептейміз

$$\sum A(\bar{F}_k) = A(\bar{P}) + A(\bar{F}_{\%ойк}).$$

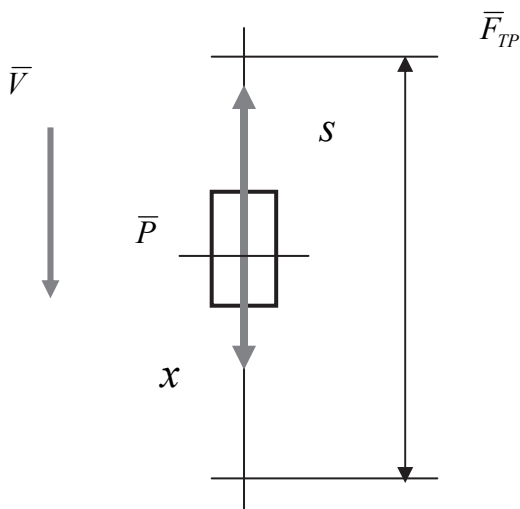
Материялық нүкте төмен қарай қозғалатын болғандықтан салмақ күшінің жұмысы оң шама болады

$$A(\bar{P}) = P \cdot s = m \cdot g \cdot s.$$

Үйкеліс күшінің жұмысы теріс шамаға тең, себебі үйкеліс күші мен орын ауыстыру бағыттары қарама-қарсы

$$A(\bar{F}_{\%ойк}) = -F_{\%ойк} \cdot s.$$

Соңғы уақыт мезгілінде лифтінің тоқтайтынын есепке ала отырып ($v_1 = 0$), кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теоремаға қоямыз



3.1.19-сурет

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgs - F_{\text{үйк}} \cdot s.$$

Осыдан

$$F_{\text{үйк}} = \frac{mgs + \frac{mv_0^2}{2}}{s} = mg + \frac{mv_0^2}{2s};$$

$$F_{\text{үйк}} = mg + \frac{mv_0^2}{2s} = 6 \cdot 9,81 + \frac{6 \cdot 12^2}{2 \cdot 10} = 58,8 + 43,2 = 102 \text{ kH}.$$

3.1.10 Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы

Динамика заңдары тек инерциялық санақ жүйесінде орындалады. Материялық нүктенің кейбір санақ жүйесіне қатысты қозғалысын қарастырайық және осы санақ жүйесі басқа инерциялық санақ жүйесіне қатысты еркінше қозғалатын болсын. P нүктесі ($\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$) күштер әсерінен қозғалатын болсын. Инерциялық санақ жүйесінде динамиканың негізгі теңдеуі орындалады. Нүктенің абсолют үдеуі

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{сал}} + \bar{a}_{\text{мас}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (3.1.10.1)$$

(3.1.10.1) теңдігін (3.1.3.1) теңдігіне қойып, түрлендіреміз.

$$m\bar{a}_{\text{сал}} = \bar{F} - m\bar{a}_{\text{мас}} - m\bar{a}_{\text{кор}}. \quad (3.1.10.2)$$

Келесі белгілеулерді қабылдаймыз:

$$\bar{\Phi}_{мас} = -m \cdot \bar{a}_{мас}, \quad (3.1.10.3)$$

$$\bar{\Phi}_{кор} = -m \cdot \bar{a}_{кор}. \quad (3.1.10.4)$$

$\bar{\Phi}_{мас}$ және $\bar{\Phi}_{кор}$ тасымал және кориолис инерция күштері деп аталады.

(3.1.10.2) теңдігін келесі түрде жазуға болады

$$m \cdot \bar{a}_{сал} = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_{мас} + \bar{\Phi}_{кор}. \quad (3.1.10.5)$$

(3.1.10.5) теңдеуі материалдық нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының негізгі теңдеуі.

Материалдық нүктенің салыстырмалы қозғалысы негізгі теңдеуінің дербес жағдайлары:

а) ілгерілемелі тасымал қозғалыс кезінде

$$m \cdot \bar{a}_{сал} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{мас}, \quad (3.1.10.6)$$

б) түзу сызықты бірқалыпты тасымал қозғалыс кезінде

$$m \cdot \bar{a}_{сал} = \bar{F}. \quad (3.1.10.7)$$

Мұнда (3.1.10.7) мен (3.1.3.1) бірдей болады, өйткені $\bar{a}_{сал} = \bar{a}$.

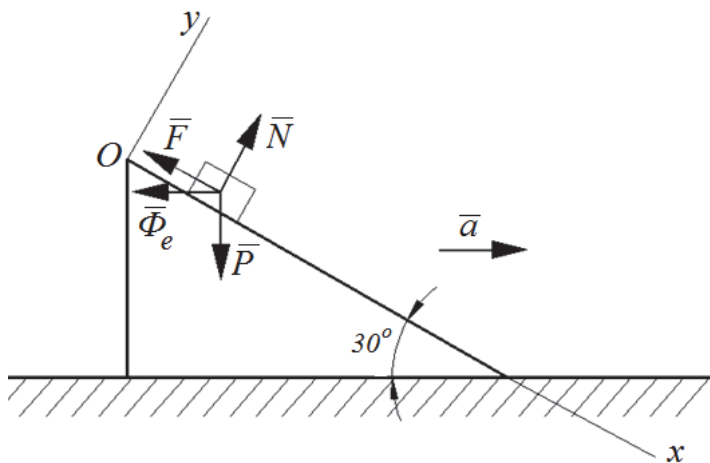
Сондықтан бұл санақ жүйесі инерциялық болады. Механикалық тәжірибелер арқылы санақ жүйесі тыныштықта екенін немесе ілгерілемелі бірқалыпты және түзу сызықты қозғалыста екенін анықтау мүмкін емес (Галилейдің салыстырмалылық принципі);

в) салыстырмалы тыныштық қалпында

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_{мас} = 0. \quad (3.1.10.7)$$

Бұл материалдық нүктенің салыстырмалы тепе-теңдігінің теңдеуі.

1-мысал. Тұрақты $a=0,5 \text{ м/с}^2$ үдеуімен оң жаққа қарай қозғалатын



3.1.20-сурет

призма бетінде салмағы $P=19,6 \text{ Н}$ тең жүк тыныштық қалпынан жылжып келеді (3.1.20-сурет). Жүк пен призма беті арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,1$ болғанда жүктің призмаға қатысты қозғалыс теңдеуін және оның призма бетіне түсіретін қысымын анықтау керек.

Шешуі: Материялық нүкте ретінде алынатын жүк күрделі қозғалыста болып тұр, оның призмамен бірге қозғалысы тасымал, ал призма бетінде қозғалысы – салыстырмалы қозғалыс болып келеді. Тасымал қозғалыс ілгерілемелі болғандықтан, материялық нүктенің кориолис үдеуі нөлге, тасымал үдеуі призма үдеуіне тең. Материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысының теңдеуін (1.26.7) түрінде жазу керек. Нүктеге түсірілген күштер: ауырлық күші \bar{P} , призма бетінің нормаль реакциясы \bar{N} , сырғанау үйкелісі күші \bar{F} . Тасымал инерция күші $\bar{\Phi}_e$ тасымал үдеуге, яғни призма үдеуіне қарама-қарсы бағытталады, оның модулі $\Phi_e = m \cdot a_e = \frac{P}{g} a = 1 \text{ Н}$.

Призмамен бірге қозғалатын xOy координат жүйесінің басын материялық нүктенің бастапқы орнына орналастырып, x осін жүктің қозғалу бағытымен, y осін оған перпендикуляр жүргіземіз. Сонда материялық нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуі келесідей жазылады:

$$\frac{P}{g} \cdot \bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi}_e. \quad (a)$$

Салыстырмалы үдеудің осьтерге проекциялары $a_{rx} = \ddot{x}$, $a_{ry} = 0$ болатынын ескеріп, (a) теңдеуін осьтерге проекциялаймыз:

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{x} = P \sin 30^\circ - F - \Phi_e \cos 30^\circ, \quad (б)$$

$$0 = -P \cos 30^\circ + N - \Phi_e \sin 30^\circ. \quad (в)$$

(в) теңдігінен нормаль реакция күшін анықтаймыз:

$$N = P \cos 30^\circ + \Phi_e \sin 30^\circ = P(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g). \quad (г)$$

Сырғанау үйкеліс күші

$$F = fN = fP(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g). \quad (д)$$

(б) теңдеуіне анықталған күштердің өрнектерін қоямыз

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{x} = P \sin 30^\circ - fP(\cos 30^\circ + \frac{a}{g} \sin 30^\circ) - \frac{P}{g} a \cos 30^\circ. \quad (е)$$

Осыдан

$$\ddot{x} = g \sin 30^\circ - f(g \cos 30^\circ + a \sin 30^\circ) - a \cos 30^\circ = 3,64 \text{ м/с}^2.$$

Осыны екі рет интегралдап, аламыз

$$\dot{x} = 3,64t + C_1, \quad x = 1,82t^2 + C_1t + C_2. \quad (ж)$$

C_1 мен C_2 тұрақтыларын табу үшін бастапқы шарттарды қолданамыз: $t = 0$ болғанда $\dot{x} = v_0 = 0$ және $x = x_0 = 0$.

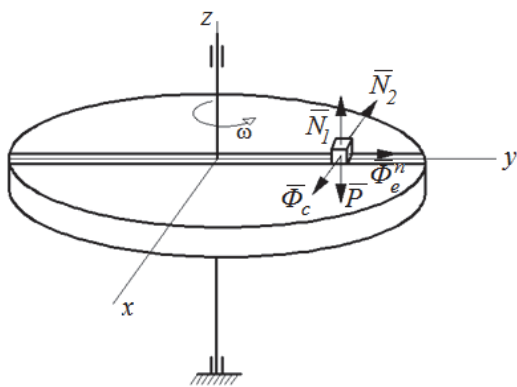
Осыны (ж) теңдеулеріне қойып, аламыз: $C_1 = C_2 = 0$.

Сонымен жүктің призма бетіндегі қозғалыс теңдеуі $x = 1,82t^2$ м. Жүктің призма бетіне түсіретін қысым күшінің шамасы нормаль реакция күшіне тең

$$N = P(\cos 30^\circ + a \sin 30^\circ / g) = 17,5 \text{ Н.}$$

2-мысал. Дөңгелек диск тұрақты ω бұрыштық жылдамдығымен вертикаль осьті айналады. Оның үстіндегі түзу сызықты және қимасы тік төртбұрышты ойыс жолмен массасы m -ге тең текше жылжыйды (3.1.21 сурет). Бастапқы уақыт мезгілінде текше осьтен d арақашықтығында тыныштық қалыпында болды. Сырғанау үйкелісін ескермей, текшенің диск үстіндегі қозғалысының теңдеуін және текше ойыстың жақтарына түсіретін қысымдарын анықтау керек.

Шешуі: Текшені материялық нүкте ретінде қарастырамыз, ол күрделі қозғалыста болып тұр. Оның дискімен бірге қозғалысы тасымал, ал диск ойысы бойымен қозғалысы – салыстырмалы қозғалыс болып келеді. Дискімен бірге айналатын $Oxyz$ декарт координат жүйесін суретте көрсетілгендей таңдаймыз. Материялық



3.1.21-сурет

нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуін (3.1.10.5) түрінде құрамыз. Нүктеге түсірілген күштер: ауырлық күші $\bar{P} = m\bar{g}$, ойыстың астыңғы бетінің нормаль реакциясы \bar{N}_1 және бүйір жағының нормаль реакциясы \bar{N}_2 .

Тасымал қозғалыс айналмалы болғандықтан, текшенің тасымал үдеуі екі құраушыдан тұрады, яғни

$\bar{a}_e = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n$. Дискінің бұрыштық жылдамдығы тұрақты, сонда оның бұрыштық үдеуі де, нүктенің жанама тасымал үдеуі де нөлге тең: $a_e^\tau = \varepsilon \cdot y = 0$. Нүктенің нормаль тасымал үдеуі (центрде тартқыш үдеуі) келесі формуламен анықталады: $a_e^n = \omega^2 \cdot y$, мұндағы y – нүктенің айналу осіне дейін арақашықтығы. Сонда тасымал инерция күші (центрден тепкіш күш) $\Phi_e^n = m \cdot a_e^n = m \omega^2 y$, ол нормаль тасымал үдеуге қарама-қарсы бағытталады. Нүктенің кориолис үдеуі

$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r)$. Мұнда тасымал қозғалыстың бұрыштық жылдамдығы дискінің жылдамдығына тең $\omega_c = \omega$, бұрыштық жылдамдық векторы $\bar{\omega}_e$ айналу осі бойымен жоғары қарай бағытталады. Нүктенің салыстырмалы жылдамдығы y координатасының уақыт бойынша бірінші туындысына тең $v_r = \dot{y}$, оның \bar{v}_r векторы y осінің оң бағытымен бағытталады. Осы екі вектор арасындағы бұрыш $(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 90^\circ$. Нүктенің кориолис үдеуінің шамасы $a_c = 2\omega \dot{y}$, бағытын векторлық көбейтінді ережесімен немесе Журавскийдің ережесімен анықтаймыз, сонда \bar{a}_c векторы x осінің теріс жағына бағытталады. Кориолис инерция күшінің модулі $\Phi_c = m \cdot 2\omega \dot{y}$, векторы $\bar{\Phi}_c$ кориолис үдеуіне қарама-қарсы, яғни суретте көрсетілгендей бағытталады.

Нүктенің салыстырмалы қозғалысы динамикасының теңдеуін алдымен векторлық түрде жазамыз

$$m\bar{a}_r = \bar{P} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^n + \bar{\Phi}_c. \quad (a)$$

Салыстырмалы үдеудің осьтерге проекциялары $a_{rx} = 0$, $a_{ry} = \ddot{y}$, $a_{rz} = 0$ болатынын ескеріп, (a) теңдеуін x , y , z осьтеріне проекциялаймыз

$$0 = \Phi_c - N_2, \text{ осыдан } N_2 = \Phi_c = m2\omega \dot{y}, \quad (б)$$

$$0 = N_1 - P, \text{ осыдан } N_1 = P = mg, \quad (в)$$

$$m\ddot{y} = \Phi_e^n \text{ немесе } m\ddot{y} = m\omega^2 y. \quad (г)$$

Енді (г) теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$\ddot{y} - \omega^2 y = 0. \quad (д)$$

Бұл біртекті сызықты коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеу. Теңдеудің сипаттаушы теңдеуін құрып, оның түбірлерін табамыз

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0, \quad \lambda_1 = \omega, \quad \lambda_2 = -\omega. \quad (е)$$

Сонда (д) теңдеуінің жалпы шешімі келесі болады:

$$y = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}. \quad (ж)$$

Тұрақтыларды анықтау алдында осы теңдіктің уақыт бойынша туындысын аламыз

$$\dot{y} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}. \quad (з)$$

Қозғалыстың бастапқы шарттары: $t = 0$ болғанда $y = d$ және $\dot{y} = v_{r0} = 0$.

Осыны (ж), (з) теңдеулеріне қойып, аламыз

$$d = C_1 + C_2, \quad 0 = \omega(C_1 - C_2).$$

Теңдеулерді шешеміз

$$C_1 = C_2 = \frac{d}{2}.$$

Сонымен текшенің қозғалыс теңдеуі

$$y = \frac{d}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Текшенің ойыс жақтарына түсіретін қысымдары сәйкес нормаль реакция күштеріне тең

$$N_1 = mg, \quad N_2 = m\omega^2 d(e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

3.1.11 Нүкте үшін Даламбер принципі

Массасы m материялық нүктеге актив күштер (тең әсерлісі \bar{F}^a деп белгіленген) және байланыстың \bar{N} реакция күші түсетін болсын. Осы күштер әсерінен нүкте инерциялық санақ жүйесіне қатысты кейбір \bar{a} үдеуімен қозғалады.

Келесі нүктенің инерция күші деп аталатын шаманы енгіземіз

$$\bar{F}^{un} = -m \cdot \bar{a}. \quad (3.1.11.1)$$

Сонда, егер кез келген уақыт мезгілінде нүктеге түсетін актив және реакция күштеріне инерция күшін қосса, алынған күштер жүйесі теңгеріледі, яғни

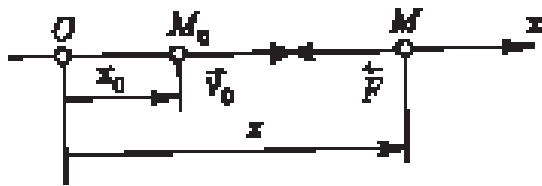
$$\bar{F}^a + \bar{N} + \bar{F}^{un} = 0. \quad (3.1.11.2)$$

Бұл материялық нүкте үшін Даламбер принципін өрнектейді.

3.2 Материялық нүктенің түзу сызықты тербелістері

3.2.1 Материялық нүктенің еркін гармоникалық тербелісі

Массасы m нүктенің түзу сызықты қозғалысын қарастырайық. Нүктеге қозғалмайтын O центріне тарту күші F әсер етсін, ал бұл күш центрден қашықтыққа пропорционал болсын (3.2.1-сурет)



3.2.1 сурет

$$F = c \cdot OM.$$

Бұл өрнектегі c – қатаңдық коэффициенті деп аталатын, пропорционалдықтың оң коэффициенті.

Егер M нүктесі O центрінде жатса, онда ол тепе-теңдік күйде болады, өйткені бұл кезде $F = 0$. Ал

енді, нүкте тепе-теңдік күйден шығарылса, онда F күші нүктені бұрынғы күйіне қайтып әкелуге тырысады, яғни тепе-теңдік күйді қалыптастыруға тырысады. Осы күш бірінші дәрежелі ауытқуға пропорционал болса, онда оны сызықтық қалпына келтіруші күш деп атайды. Бұл күштің түп негізі әртүрлі болуы мүмкін, бірақ көпшілік жағдайда, оған – Гук заңына бағынышты серпімділік күштері негіз болатыны белгілі.

Нүктенің қозғалыс заңын анықтау үшін, қозғалыстың дифференциалдық теңдеуін құрып, содан кейін оны интегралдаймыз. Координата O центріне оң жақта болса ($x < 0$), онда күш сол жаққа бағытталады; егер M нүктесі O центрінен сол жақта болса ($x > 0$), онда күш оң жаққа бағытталады. Сондықтан күштің O_x өсіне проекциясы әр уақытта $F_x = -c \cdot x$ теңдеуімен анықталады және нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі келесідей жазылады

$$m\ddot{x} = F_x = -c \cdot x.$$

Теңдіктің екі жағын m -ге бөліп, келесі белгілеуді қабылдаймыз

$$\frac{c}{m} = k^2. \quad (3.2.1.1)$$

Осыдан кейін келесі дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (3.2.1.2)$$

Осы теңдеу нүктенің еркін гармоникалық тербелісінің дифференциалдық теңдеуі болып табылады.

Енді қозғалыстың бастапқы шарттарын тұжырымдайық:

- алғашқы сәтте нүкте M_0 орнында болсын;
- жылдамдығының O_x өсіне проекциясы, яғни $t = t_0$, $x = x_0$ және $\dot{x} = \dot{x}_0$.

(3.2.1.2)-ші теңдеу ($\ddot{x} + k^2 x = 0$) коэффициенті тұрақты, біртекті сызықтық теңдеу болғандықтан, оны шешу үшін сипаттайтын теңдеуін құрып, оның түбірлерін табу керек. Сипаттайтын теңдеуі: $r^2 + k^2 = 0$, ал түбірлері $r_1 = ki$ және $r_2 = -ki$, бұл теңдіктердегі $i = \sqrt{-1}$. Сонымен, (3.2.1.2)-ші теңдеудің шешуі

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3.2.1.3)$$

Интегралдаудың тұрақтылары бастапқы шарттардан табылады.

Шарт бойынша: егер $t = t_0$ болса, онда $\dot{x} = \dot{x}_0$. Бұл шартты қолдану үшін, алдымен (3.2.1.3)-теңдеуді дифференциалдаймыз, яғни

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = -C_1 k \sin 0 + C_2 k \cos 0 \rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}.$$

Онда

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \cdot \sin kt. \quad (3.2.1.4)$$

Нүкте қозғалысының сипаттамаларын айқын көрсету үшін, (3.2.1.3)-ші формуланы басқаша өрнектейік. Ол үшін, интегралдаудың тұрақтыларын келесі тұрақтылармен алмастырайық

$$a \cdot \sin \alpha = C_1, \quad a \cdot \cos \alpha = C_2.$$

Осы шамаларды (3.2.1.3)-ші формулаға қойсақ

$$x = a \cdot \sin (kt + \alpha). \quad (3.2.1.5)$$

Алынған (3.2.1.3)-ші және (3.2.1.1)-ші формулалар нүктенің еркін гармоникалық тербелістерінің теңдеулері деп аталады. Оның ішінде, (3.2.1.5)-ші формуланы – тербеліс теңдеуінің амплитудалық түрі (формасы) деп атайды.

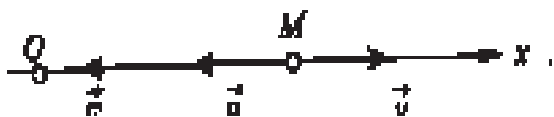
Соңғы формуладағы: тұрақты шама $a > 0$ тербелістің амплитудасы деп аталады, бұл шама нүктенің тепе-теңдік орнынан ең үлкен ауытқуын көрсетеді; тұрақты шама α тербелістің бастапқы фазасы деп, ал $kt + \alpha$ шамасы тербеліс фазасы деп аталады.

3.2.2 Материалық нүктенің өшпелі тербелісі

Еркін тербеліске сызықтық заңдылықпен өзгертін кедергі күшінің әсерін қарастырамыз.

Қозғалыстағы нүктеге әсер ететін күштер (3.2.2-сурет):

- сызықтық қалпына келтіруші күш - $F = c \cdot OM$,
- нүкте жылдамдығының бірінші дәрежесіне пропорционал кедергі күші - $R = b \cdot v$.



3.2.2 сурет

Бұл теңдіктегі b -кедергі коэффициенті деп аталатын тұтқыр ортаның кедергісін сипаттайтын тұрақты шама.

Кез келген уақыттағы M нүктесінің орны 3.2.2-суретте көрсетілген. Координат басы ретінде нүктенің тепе-теңдік күйде болатын O нүктесі қабылданған.

Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі

$$m\ddot{x} = F_x + R_x,$$

мұндағы $F_x = -c \cdot x$, $R_x = -b \cdot \dot{x}$ теңдігімен анықталады. Онда

$$m\ddot{x} = -c \cdot x - b \cdot \dot{x} \quad \text{немесе} \quad \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} = 0.$$

Теңдеудегі тұрақты шамаларды төмендегінше белгілейік

$$\frac{b}{m} = 2n, \quad \frac{c}{m} = k^2. \quad (3.2.2.1)$$

Осы тұрақтылықтарды теңдеуге қойып, коэффициенттері тұрақты болатын біртекті, сызықтық дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 = 0. \quad (3.2.2.2)$$

Мұны шешу үшін оның сипаттайтын теңдеуін құрып, түбірлерін табамыз

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0 \rightarrow r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.2.2.3)$$

Алынған шешімге байланысты, үш түрлі жағдай болу мүмкін:

1) $n < k$;

2) $n > k$;

3) $n = k$. Коэффициент n (бұл коэффициент демфирлік

коэффициент деп аталады – немісше *Dämpfung*, яғни «өшу») тербеліс болатын ортаның кедергісінің дәрежесін көрсететін болғандықтан, бірінші жағдайды-аз кедергілі жағдай, екінші-көп кедергілі жағдай, ал үшінші-дағдарыс кедергілі жағдайы деп атаймыз.

Тәжірибеде жиі кездесетін бірінші жағдайды қарастырайық. Бұл жағдайда $n < k$ болғандықтан, сипаттайтын теңдеуінің түбірлері комплекстік сан болады. Оларды келесі түрде жазайық

$$r_{1,2} = -n \pm k_1 \cdot i, \quad (3.2.2.4)$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (3.2.2.5)$$

(3.2.2.4)-ші формуладағы $i = \sqrt{-1}$.

(3.2.2.2)-дифференциалдық теңдеудің қарастырылып отырған жағдай үшін шешімі

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t). \quad (3.2.2.6)$$

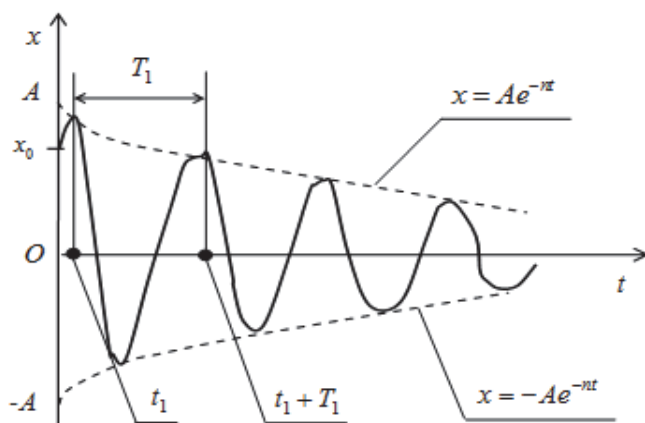
Тұрақтыларды басқаша өрнектейік

$$C_1 = A \sin \alpha_1, \quad C_2 = A \sin \alpha_1. \quad (3.2.2.7)$$

Алынған өрнектерді теңдеуге қойып, амплитуда түріндегі шешім аламыз

$$x = A \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha_1). \quad (3.2.2.8)$$

Ал, x және \dot{x} өрнектеріндегі e^{-nt} көбейткіші, бұл шамалардың уақытқа байланысты азаятынын көрсетеді. Мұндай тербелістер өшпелі (өшетін) тербелістер деп аталады. Өшпелі тербелістің графигі 3.2.3-суретте көрсетілген. Суреттен көрініп тұрғандай, өшпелі тербелістің графигі басқа екі графиктің арасында жатыр. Ол



3.2.3-сурет

графиктердің теңдеулері $X_1 = Ae^{-nt}$ және $X_2 = -Ae^{-nt}$.

Тербелістегі нүкте, белгілі бір тұрақты уақыт аралығында, өзінің тепе-теңдік күйінен оңға және солға ауытқып отырады. Бұл ауытқулардың ең үлкен шамалары (max) бір-біріне тең болмайды және осы

ауытқулардың бір бағыттағы ең үлкен шамаларының ара-қашықтығы өшпелі тербелістердің периоды (3.2.3-суретті) деп аталады.

Тепе-теңдік күйінен ауытқудың t сәтіндегі фаза $k_1t + \alpha_1$ шамасына тең болса, ал $t + T$ сәтіндегі фазаның одан айырмашылығы 2π -ге тең болады, яғни $k_1(t + T_1) + \alpha_1 = (k_1t + \alpha_1) + 2\pi$. Осы теңдіктен

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} \text{ немесе } T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (3.2.2.9)$$

Өшпелі тербелістің периоды, еркін тербелістің периодынан көп болатыны (3.2.2.6)-ші формуладан көрініп тұр. Өйткені, $k_1 < k$, ал бұл қатынас, физикалық тұрғыдан қарағанда, кедергінің әсерімен негізделеді. Сонымен қатар, егер ортаның кедергісі аз болса, онда (3.2.2.9)-шы формуладағы n шамасын ескермей, $T_1 = T$ деп қарастыруға болады, яғни кедергі аз болса, онда ол нүкте тербелісінің периодына әсер етпейді.

Бірақ, өшпелі тербеліс кезінде тепе-теңдік өрісінен ең үлкен (max) ауытқудың шамасы бірталай азаяды. Ауытқудың шамасын кеміту үшін *тербелістің декременті* D (*decrementum*-латынша «кему») қабылданады.

3.2.3 Нүктенің кедергі болмағандағы еріксіз (амалсыз) тербелістері

Нүктенің тербелісін тудыру үшін, оны орнықты тепе-теңдік күйінен шығарғаннан кейін, оған қалпына келтіруші күш әсер етіп тұру керек.

Егер нүктені орнықты тепе-теңдік күйінен шығарған өзгермелі күш, одан әрі, қозғалыс кезінде де әсер ете берсе, онда осы күштің және қалпына келтіруші күштің әсерінен, нүкте амалсыз тербелісте болады. Бұған мысал ретінде темір жол көпірін келтіруге болады: рельстердің қосылған жерлеріне дөңгелектердің соққысы көпірдің тербелісін тудырады.

Жоғарыда айтып кеткендей, еріксіз тербелістерді күшті ауытқытқыш күштері деп атағанбыз. Бұл күштер уақытқа байланысты әртүрлі заңдылықпен өзгеріп отырады. Біз бұл күштің қарапайым және тәжірибеде жиі кездесетін түрін зерттейміз, яғни тербеліс болатын түзуге бұл күштің проекциясы синус заңдылығымен өзгертін түрін зерттейміз. Ол заңдылық

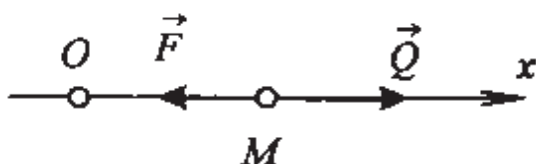
$$Q_x = H \sin(pt + \delta), \quad (3.2.3.1)$$

мұндағы:

H - ауытқытқыштық күштің ең үлкен (максимальді) шамасы;

p - аталған күштің бұрыштық жиілігі;

δ - осы күштің бастапқы фазасы.



3.2.4 сурет

Екі күштің әсерінен туындайтын нүкте қозғалысын қарастырамыз. Ол күштер:

а) сызықтық қалпына келтіруші күш;

бү

б) гармоникалық ауытқыштық күш.

Әзірше кедергі күшін ескермейміз.

Егер ауытқыштық күші болмаса, онда координата басы O -нүктенің тепе-теңдік күйінің орны болып табылады (3.2.4-сурет).

Бұл кезде $F_x = -cx$, $Q_x = H \sin(pt + \delta)$ немесе

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta). \quad (3.2.3.2)$$

Бұл формуладағы

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \quad (3.2.3.3)$$

(3.2.3.2)-ші теңдеудің шешімін $x = x_1 + x_2$ түрінде қарастырамыз. Бұл жердегі x_1 -сәйкес теңдеудің жалпы шешімі, x_2 -сәйкес теңдеудің дербес шешімі. Біртекті $\ddot{x} + k^2x = 0$ теңдеуінің шешімі бізге белгілі.

Дербес шешімінің екі түрін қарастырамыз.

1. $p \neq k$. Бұл жағдайда дербес шешім (3.2.3.2)-шы теңдеудің оң жағының түрінде табылады, яғни

$$x_2 = B^* \sin(pt + \delta),$$

мұндағы B^* - тұрақты шама, оның шамасы $B^* = \frac{h}{k^2 - p^2}$. Онда

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.2.3.4)$$

Сонымен, дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі:

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta), \quad (3.2.3.5)$$

немесе

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (3.2.3.6)$$

Қорытынды: екі күштің, яғни сызықтық қалпына келтіруші күшпен гармоникалық ауытқыштық күштің ($p \neq k$) әсерінен нүкте күрделі тербеліс қозғалысында болады (кедергі күші ескерілмеген). Бұл қозғалыс – екі гармоникалық қозғалыстың жиынынан тұрады, олардың бұрыштық жиіліктері: k және p .

Бірінші тербелістерді - $x_1 = a \sin(kt + \alpha)$ - әдетте, меншікті тербелістер деп атайды, ал екінші тербелістерді -

$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ - таза еріксіз тербелістер деп атайды.

2. Енді бұрыштық жиілік p бұрыштық жиілік k бір-бірімен тең, яғни $p = k$ жағдайын қарастырамыз. Бұл кезде резонанс құбылысы пайда болады.

3.2.4 Резонанс құбылысы

(3.2.3.2)-шы теңдеудің дербес шешімін келесі түрде аламыз

$$x_2 = -\frac{ht}{2k} \cos(kt + \delta). \quad (3.2.4.1)$$

Бұл формуланы, $-\cos(kt + \delta) = \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right)$ екенін ескеріп,

келесі түрде жазамыз

$$x_2 = \frac{ht}{2k} \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.2.4.2)$$

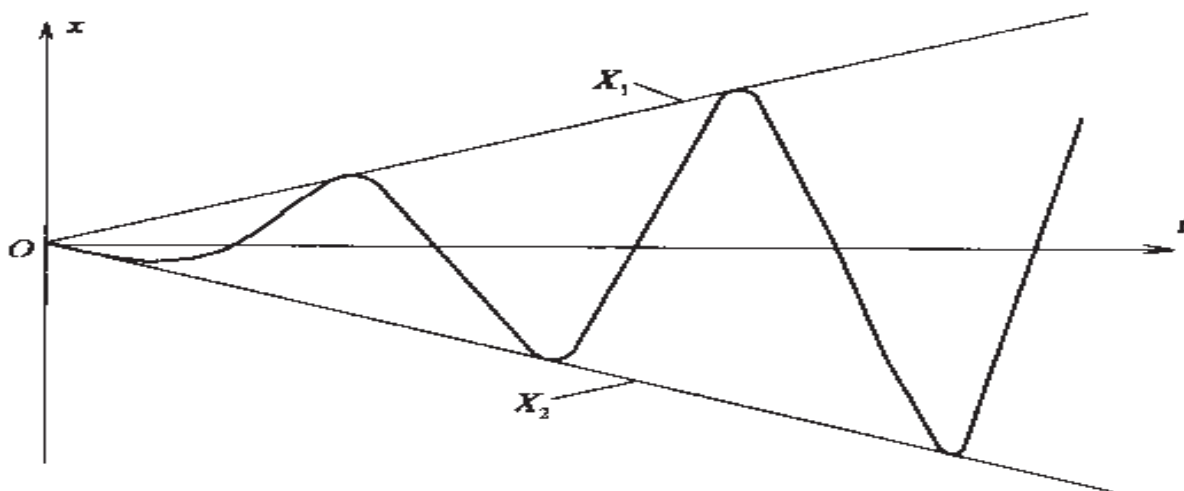
Енді (3.2.3.2)-шы дифференциалдық теңдеудің толық шешімін келтірейік

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + \frac{ht}{2k} \left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.2.4.3)$$

Резонанс кезіндегі таза амалсыз тербелісті қарастырайық. Резонанс кезінде, амалсыз тербеліс ауытқыштық күшінен фазасы бойынша $\frac{\pi}{2}$ шамасына қалып қоятынын (3.2.4.2)-ші формуладан көруге болады. Синустың өзгермелі коэффициентінің модулінің шамасы – резонанс кезіндегі амалсыз тербелістің амплитудасы болып саналады, яғни

$$\overline{R_s} = 0. \quad (3.2.4.4)$$

Келтірілген формула (3.2.4.4) бойынша, резонанс кезінде амплитуда уақытқа пропорционал және шексіз өседі, бірақ тербеліс кезінде, әр



3.2.5 сурет

уақытта да, кедергі туындайтын болғандықтан, амплитуда үлкен болғанымен, ол шексіз өспейді. Амплитуданың резонанс кезінде қарқындап өсуі көптеген қиындықтар тудырады.

Мысалы, ғимараттардың, көпірлердің, мотордың, машиналардың және тағы басқалардың қирауына (істен шығуына) алып келіп соғады.

Сондықтан, резонанс құбылысына техникада көп көңіл бөлу керектігі туындайды.

Еріксіз тербелістің резонанс кезіндегі графигін тұрғызайық (3.2.5-сурет). Алдымен, екі шектеу түзулерін жүргіземіз, олардың теңдеулері $x_2 = \frac{ht}{2k}$ және $x_2 = \frac{ht}{2k}$. Бұл кезде $-1 \leq \cos(kt + \delta) \leq 1$ болғандықтан, 3.2.4.1-ші формуланың негізінде, резонанс кезіндегі амалсыз тербелістің графигі, тұрғызылған екі түзулердің арасында жатады, яғни:

$$X_2 \leq x_2 \leq X_1.$$

3.3 Механикалық жүйе динамикасы

3.3.1 Механикалық жүйе. Ішкі және сыртқы күштер

Материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп қозғалыстары өзара тәуелді болып келетін материялық нүктелер жиынтығын айтады. Мұндай жиынтықтағы әрбір жеке нүкте қозғалысы ондағы барлық басқа нүктелердің қозғалыстары мен олардың орындарына тәуелді анықталады. Материялық нүктелердің механикалық жүйесіне мысал ретінде күн жүйесін алуға болады. Күн жүйесіндегі әрбір жеке планета қозғалысы Күннің және бұл жүйе құрамына енетін барлық қалған планеталардың қозғалыстарына және орындарына байланысты анықталады.

Егер қозғалыс кезінде жүйедегі нүктелердің бір-бірінен ара қашықтықтары өзгермей сақталатын болса, онда бұл жүйені өзгермейтін механикалық жүйе дейміз. Абсолют қатты дене өзгермейтін механикалық жүйе ретінде қарастырылады. Демек, механикалық жүйенің айрықша белгісі - оның нүктелерінің арасында өзара әсерлесу күшінің бар екендігі. Осыған қарағанда материялық нүктелердің кез келген жиынтығы механикалық жүйе құра алмайтындығы белгілі. Механикалық жүйедегі әрбір нүктенің қозғалысы біріне – бірі тәуелді. Бұдан былай материялық нүктелердің механикалық жүйесі деп толық айтып жатпай, оны қысқаша нүктелер жүйесі немесе механикалық жүйе деп атайтын боламыз.

Нүктелердің кеңістікте орын ауыстыру еркіндіктері шектелмеген материялық нүктелердің механикалық жүйесін еркін жүйе дейміз. Еркін механикалық жүйе нүктелері кеңістіктің кез келген жерінде бола алады және кез келген жылдамдықты қабылдай алады. Еркін механикалық жүйенің мысалы ретінде Күн жүйесін алуға болады.

Егер нүктелердің еркін қозғалуын тежеп отыратындай алдын ала жүйеге қосымша шарттар қойылған болса, онда оны еркін емес механикалық жүйе деп атаймыз.

Динамиканың барлық заңдары еркін материялық нүкте үшін орынды болғандықтан, олар тек еркін механикалық жүйеге ғана арнайы қолданылады. Ал оларды еркін емес механикалық жүйе динамикасының мәселелерінде де қолдану мүмкіндігін туғызу үшін жүйені байланыстардан ажырату (бастау) аксиомасын пайдалануымыз керек. Жүйені байланыстардан ажырату аксиомасын (принципін) былай айтамыз: *қандай да бір қозғалыстағы еркін емес материялық нүктелердің механикалық жүйесінің әрбір нүктесінде берілген (актив) күштермен қатар байланыстар реакцияларын да түсіруіміз керек. Сонда бұл жүйені актив күштер мен байланыстар реакциялары әсер ететін еркін механикалық жүйе деп қарауға болады.* Қатты денеге әсер етуші күштерді актив (берілген) және пассив (байланыстар реакциялары) күштер деп аталатын екі топқа бөліп келдік. Жүйе динамикасында күштерді топтарға бөлудің тағы бір тәсілі қолданылады. Ол – механикалық жүйе нүктелеріне әсер ететін барлық күштерді сыртқы және ішкі күштерге бөлу жөніндегі тәсіл.

Берілген механикалық жүйенің сыртқы күштері деп осы жүйе құрамына енбейтін сыртқы жүйе нүктелеріне жасайтын әсерлерінен туатын күштерді айтамыз және \bar{F}^e деп белгілейміз.

Берілген механикалық жүйе нүктелерінің арасында болатын өзара әсерлесу күштерін ішкі күштер дейміз және \bar{F}^i деп белгілейміз.

Ішкі күштер берілген жүйе нүктелерінің арасындағы өзара әсер етуші күштер болғандықтан оларға Ньютонның 3-ші заңын қолдана аламыз. Осыдан жүйенің қос – қостан алынған ішкі күштері шама жағынан тең, бір түзу бойымен бір–біріне қарама-қарсы бағытталған күштер жүйесінің бас векторы және кез келген центрге қатысты алынған, олардың бас моменті үнемі нөлге тең болады

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0, \quad \bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0.$$

Бұл ішкі күштердің маңызды қасиеті болып табылады.

3.3.2 Жүйенің массалар центрі және инерция моменттері

Механикалық жүйе деп қозғалыстары өзара тәуелді болып келетін материялық нүктелер жиынтығын айтады. Егер қозғалыс кезінде жүйедегі нүктелердің бір-бірінен ара қашықтықтары өзгермей

сақталатын болса, онда бұл жүйені өзгермейтін механикалық жүйе дейміз. Абсолют қатты дене өзгермейтін механикалық жүйе ретінде қарастырылады.

Жүйе динамикасында механикалық жүйе нүктелеріне әсер ететін барлық күштерді сыртқы және ішкі күштерге бөледі. Берілген механикалық жүйенің сыртқы күштері деп осы жүйе құрамына енбейтін денелерден әсер ететін күштерді айтамыз және оларды \bar{F}^e деп белгілейміз. Механикалық жүйе нүктелерінің арасында болатын өзара әсерлесу күштерін ішкі күштер дейміз және \bar{F}^i деп белгілейміз.

Ішкі күштер берілген жүйе нүктелерінің арасындағы өзара әсер етуші күштер болғандықтан оларға Ньютонның 3-ші заңын қолдана аламыз. Осыдан жүйенің қос-қостан алынған ішкі күштері шама жағынан тең, бір түзу бойымен бір-біріне қарама-қарсы бағытталған күштер жүйесінің бас векторы және кез келген центрге қатысты алынған бас моменті үнемі нөлге тең болады

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0, \quad \bar{M}_O^i = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^i) = 0. \quad (3.3.2.1)$$

Бұл ішкі күштердің маңызды қасиеттері болып табылады.

Механикалық жүйе массасы деп ондағы нүктелер массаларының қосындысына тең болатын шаманы айтамыз $M = \sum m_k$.

Механикалық жүйе массаларының центрі деп радиус векторы төмендегі формуламен анықталатын геометриялық нүктені (C -ны) айтамыз

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}. \quad (3.3.2.2)$$

Егер жүйе нүктелерінің координаттарын x_k, y_k, z_k деп алсақ, онда жүйе массалары центрі C -ның координаттары мынадай формулаларымен анықталады

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (3.3.2.3)$$

Біртекті гравитациялық өрісте жүйенің массалар центрі мен ауырлық центрі түйіседі.

Массалар центрінің жылдамдығы мен үдеуін (3.3.2.2) формуласынан уақыт бойынша туындылар арқылы табуға болады:

$$\bar{v}_C = \frac{\sum m_k \bar{v}_k}{M}, \quad \bar{a}_C = \frac{\sum m_k \bar{a}_k}{M}. \quad (3.3.2.4)$$

Механикалық жүйенің өске және нүктеге қатысты инерция моменттері келесі шамалар

$$J_l = \sum m_k h_k^2, \quad J_O = \sum m_k r_k^2. \quad (3.3.2.5)$$

Мұндағы h_k мен r_k – массасы m_k нүктесінің l өсіне дейінгі және O нүктесіне дейінгі қашықтықтары.

Декарт өстеріне және координаттар басына қатысты инерция моменттері

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_O = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (3.3.2.6)$$

Келесі тәуелдік орын алатынын дәлелдеуге болады

$$J_x + J_y + J_z = 2J_O. \quad (3.3.2.7)$$

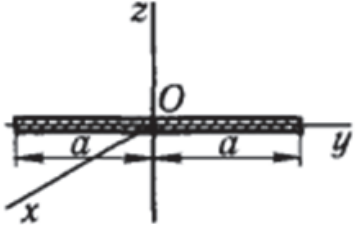
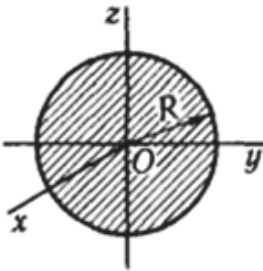
Гюйгенс-Штейнер теоремасы: жүйенің кейбір z өсіне қатысты J_z инерция моменті сол өске параллель, массалар центрінен өтетін z_C өсіне қатысты жүйенің J_{zC} инерция моментінің және жүйенің M массасының өстердің d арақашықтығының квадратына көбейтіндісінің қосындысына тең

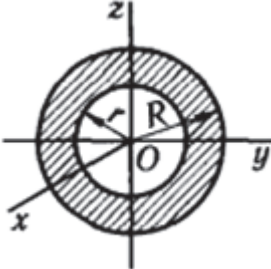
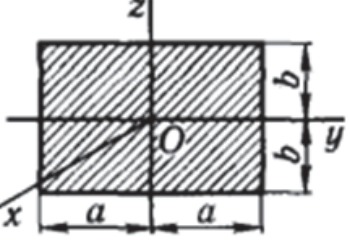
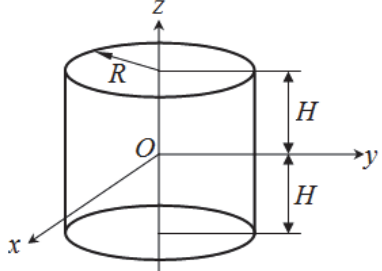
$$J_z = J_{zC} + Md^2. \quad (3.3.2.8)$$

Параллель өстер жиынтығы арасында массалар центрінен өтетін өске қатысты инерция моменті ең кіші болады.

Кейбір қатты денелердің инерция моменттері 1 кестеде келтірілген.

Кесте 3.31. Денелердің өстерге қатысты инерция моменттері

Біртекті жіңішке сырық		$J_x = J_z = \frac{ma^2}{3},$ $J_y = 0.$
Біртекті жұқа дөңгелек		$J_x = \frac{mR^2}{2},$ $J_y = J_z = \frac{mR^2}{4}.$

Біртекті жұқа сақина		$J_x = \frac{m(R^2 + r^2)}{2},$ $J_y = J_z = \frac{m(R^2 + r^2)}{4}.$
Біртекті жұқа тікбұрышты пластина		$J_x = \frac{m(a^2 + b^2)}{3},$ $J_y = \frac{mb^2}{3}, J_z = \frac{ma^2}{3}.$
Біртекті тұтас цилиндр		$J_x = J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right),$ $J_z = \frac{mR^2}{2}.$

3.3.3 Механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулері

Еркін механикалық жүйе. Қандайда инерциялық координаттар жүйесіне қатысты алынған n материялық нүктелерден тұратын механикалық жүйе қозғалысын қарастырайық. Осындағы массасы m_k -ға тең нүкте M_k -ны жекелеп алайық та, оған әсер ететін сыртқы күштер мен ішкі күштердің тең әсерлі күштерін \vec{F}_k^e , \vec{F}_k^i , және бұл нүктенің радиус-векторы \vec{r}_k болсын. M_k – нүктесінің қозғалыс теңдеуін вектор түрінде жаза аламыз

$$m_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i. \quad (3.3.3.1)$$

Мұндай теңдеу жүйедегі әрбір нүкте үшін де жазылады. Сонда (3.3.3.1) – теңдеулер жүйесі еркін механикалық жүйе қозғалысының векторлық түрдегі дифференциалдық теңдеулері. Егер осы векторлық теңдеулердің әрқайсысын Ox , Oy , Oz қозғалмайтын координаттық өстерге проекциялайтын болсақ, онда еркін механикалық жүйе қозғалысының координаттық түрдегі дифференциалдық теңдеулерін аламыз

$$\begin{aligned}
m_k \ddot{x}_k &= F_{kx}^e + F_{kx}^i, \\
m_k \ddot{y}_k &= F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad (k = \overline{1, n}) \\
m_k \ddot{z}_k &= F_{kz}^e + F_{kz}^i.
\end{aligned}
\tag{3.3.3.2}$$

Еркін емес механикалық жүйе. Бізге n материялық нүктелердің еркін емес механикалық жүйесі берілген болсын. Оның қандайда бір M_k нүктесіне әсер ететін сыртқы және ішкі актив күштердің тең әсерлі күшін \overline{F}_k^a -деп алайық. Байланыстардан ажырату туралы аксиомаға сүйене отырып берілген еркін емес механикалық жүйенің әрбір нүктесіне байланыстар реакцияларын түсіреміз. M_k нүктесіне түсетін байланыстар реакцияларының барлығына тең әсерлі күш \overline{R}_k болсын. Жүйе нүктелерінің әрқайсысына актив күштерге қоса осылайша байланыстар реакцияларын түсіргеннен соң оны еркін механикалық жүйе деп алуға болады. Сол себепті бұл механикалық жүйенің әрбір нүктесіне Ньютонның II және III заңдарын қолдана аламыз. Сонда еркін емес механикалық жүйе қозғалысының векторлық теңдеулері мына түрде жазылады

$$m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^a + \overline{R}_k. \quad (k = \overline{1, n}). \tag{3.3.3.3}$$

Бұл векторлық теңдеулердің әрбіреуінің екі жағын да қозғалмайтын Ox , Oy , Oz координаттар өстеріне проекциялау арқылы еркін емес механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін координаттық түрде аламыз

$$\begin{aligned}
m \ddot{x}_k &= F_{kx}^a + R_{kx}, \\
m \ddot{y}_k &= F_{ky}^a + R_{ky}, \quad (k = \overline{1, n}) \\
m \ddot{z}_k &= F_{kz}^a + R_{kz}.
\end{aligned}
\tag{3.3.3.4}$$

3.3.4 Механикалық жүйенің массалары центрінің қозғалысы туралы теорема

Бұл теореманы дәлелдеу үшін механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін еске түсірейік

$$m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i, \quad (k = \overline{1, n}).$$

Осы теңдеулердің барлығын бір-біріне қосайық, сонда алатынымыз

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i. \quad (3.3.4.1)$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы қосындылардың екіншісі, ішкі күштер қосындысы, нөлге тең. Ал оның сол жағындағы қосындыны (3.2.2.1) формуласын ескере отырып, мына түрге келтіре аламыз

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k \bar{r}_k = M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2}. \quad (3.3.4.2)$$

Сондықтан (3.3.4.1) – теңдеуден іздеп отырған теореманың өрнегі мына түрге келеді

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e \quad \text{немесе} \quad M \bar{a}_c = \bar{R}^e. \quad (3.3.4.3)$$

(3.3.4.3) теңдігі жүйенің массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы өрнектейді. Ол теорема былай айтылады: *механикалық жүйенің массалары центрі материялық нүкте сияқты қозғалады. Бұл нүктенің массасы тұтас жүйенің массасына тең, ал оған әсер етуші күш механикалық жүйенің сыртқы күштерінің бас векторына тең болады.* (3.3.4.3) векторлық теңдеуді координаттық өстерге проекцияласақ, мынадай үш скаляр теңдеу аламыз

$$M\ddot{x}_c = R_x^e, \quad M\ddot{y}_c = R_y^e, \quad M\ddot{z}_c = R_z^e. \quad (3.3.4.4)$$

мұндағы, \ddot{x}_c , \ddot{y}_c , \ddot{z}_c – массалар центрінің үдеуінің координаттар өстеріндегі проекциялары. (3.3.4.3) үш скаляр теңдеулер массасы M -ге тең және \bar{R}^e күші әсер ететін массалар центрі C нүктесі қозғалысының дифференциалдық теңдеулері. Өзінің құрамы жағынан бұл теңдеулер нүкте динамикасының осыған сәйкес теңдеулерінен ешқандай айырмашылығы жоқ. Сондықтан да жүйе массалары центрінің қозғалысын зерттеу мәселесі нүкте динамикасының мәселесіне жатады.

Егер жүйенің сыртқы күштерінің бас векторы нөлге тең болса, онда массалар центрі тұрақты жылдамдықпен қозғалады. Шынында $\bar{R}^e = 0$ болса, (3.3.4.3) – теңдіктен

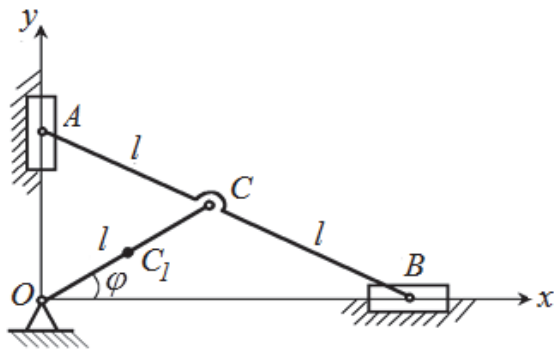
$$\bar{a}_c = 0. \quad (3.3.4.5)$$

Осыдан

$$\bar{v}_c = \text{const}. \quad (3.3.4.6)$$

(3.3.4.6) – векторлық теңдікті жүйенің массалары центрі C -ның жылдамдығының сақталу заңы деп атайды.

1-мысал. Салмақтары \bar{Q} муфталар A және B -дан, салмағы \bar{P} иіктірек OC және салмағы $2\bar{P}$ AB сызғышынан құрастырылған эллипсограф механизмінің массалар центрінің траекториясын анықтау керек (3.3.1-сурет). Берілгені: $OC = AC = CB = l$. Сызғыш және иіктірек біртекті, ал муфталарды массалы нүкте деп есептеу керек.



3. 3.1-сурет

Шешуі: Координаттар өстерін қабылдаймыз. Жүйенің массалар центрі C^* -ның орнын анықтау үшін оның x_{C^*}, y_{C^*} координаттарын мынадай өрнектермен анықтау керек

$$x_{C^*} = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{M}, \quad y_{C^*} = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{M}.$$

Қарастырылып отырған жүйенің құрамында төрт дене бар: A және B муфталары, OC иіктірегі және

AB сызғышы, онда

$$x_{C^*} = \frac{Q \cdot x_1 + Q \cdot x_2 + P \cdot x_3 + 2 \cdot P \cdot x_4}{2 \cdot Q + 3 \cdot P},$$

$$y_{C^*} = \frac{Q \cdot y_1 + Q \cdot y_2 + P \cdot y_3 + 2 \cdot P \cdot y_4}{2 \cdot Q + 3 \cdot P}.$$

Суреттен көретініміз

$$x_1 = 0 \text{ (} A \text{ нүктесі)}, \quad x_2 = 2 \cdot l \cdot \cos \varphi \text{ (} B \text{ нүктесі)},$$

$$x_3 = \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi \text{ (} C_1 \text{ нүктесі)}, \quad x_4 = l \cdot \cos \varphi \text{ (} C \text{ нүктесі)},$$

$$y_1 = 2 \cdot l \cdot \sin \varphi, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi, \quad y_4 = l \cdot \sin \varphi.$$

Онда

$$x_{C^*} = \frac{2 \cdot Q \cdot l \cdot \cos \varphi + P \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi + 2 \cdot P \cdot l \cdot \cos \varphi}{2 \cdot Q + 3 \cdot P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

$$y_{C^*} = \frac{2 \cdot Q \cdot l \cdot \sin \varphi + P \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot P \cdot l \cdot \sin \varphi}{2 \cdot Q + 3 \cdot P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Массалар центрі траекториясын анықтау үшін осы теңдеулерден уақытқа тәуелді φ бұрышын аластаймыз. Ол үшін осы теңдеулердің екі жағын да квадраттап оларды қосамыз

$$x_{C^*}^2 + y_{C^*}^2 = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2}.$$

Сонымен, массалар центрінің траекториясы центрі O нүктесі және радиусы $r = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{l}{2}$ - ге тең шеңбер болады.

2-мысал. Біртекті конус горизонталь жазықтықтың бетінде дөңгелеп қозғалады (3.3.2-сурет). Конустың O төбесі қозғалмайды, ал оның биіктігі OA вертикаль Oz өсін бірқалыпты n жиілікпен айнала қозғалады. Конустың салмағы P , ал биіктігі h . Конустың биіктігі мен жасаушысының арасындағы бұрыш α .

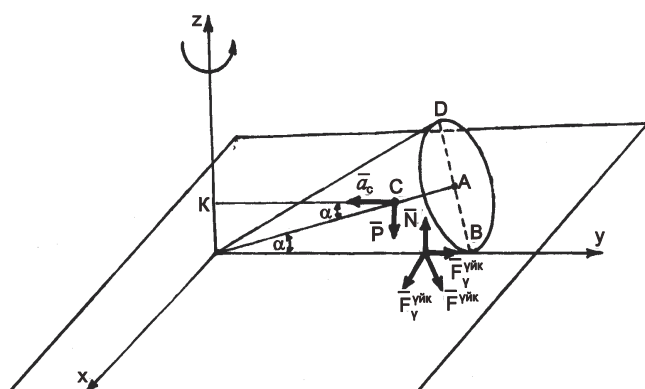
Жазықтық пен конустың арасындағы үйкеліс күшін анықтау керек.

Шешуі. Конустың массалар центрінің қозғалысын қарастырамыз. Конус біртекті болғандықтан, оның ауырлық центрі C биіктігі OA -ның бойында орналасқан және $OC = \frac{3}{4}h$. Есептің берілгені бойынша ауырлық центрінің \bar{a}_c үдеуі Oz өсіне қарай, осы өске перпендикуляр CK бойымен бағытталады. \bar{a}_c үдеудің шамасы

$$a_c = \omega^2 CK,$$

мұндағы ω – конус биіктігі OA -ның Oz өсін айнала қозғалысының бұрыштық жылдамдығы.

$\omega = \frac{\pi n}{30}$, $CK = \frac{3}{4}h \cos \alpha$ теңдіктерін ескере отырып мына теңдікті



3.3.2-сурет

аламыз

$$a_c = \frac{\pi^2 n^2}{12CO} h \cos \alpha.$$

Конусқа түсірілген сыртқы күштер: салмақ күші \bar{P} , жазықтықтың нормаль реакциясы \bar{N} және үйкеліс күші \bar{F}_{yik} . \bar{P} және \bar{N} күштері Oz өсіне параллель, ал \bar{F}_{yik}

күшінің әсер ету сызығы жазықтықта жатыр.

Массалар центрінің қозғалысы туралы теореманы пайдаланып, мынадай векторлық теңдеуді құрамыз

$$\frac{P}{g} \bar{a}_c = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}_{үйк.}$$

Теңдіктің екі жағын координаттар өстеріне проекциялаймыз

$$F_X^{үйк.} = 0, \quad F_Y^{үйк.} = -\frac{P}{g} a_c, \quad N - P = 0.$$

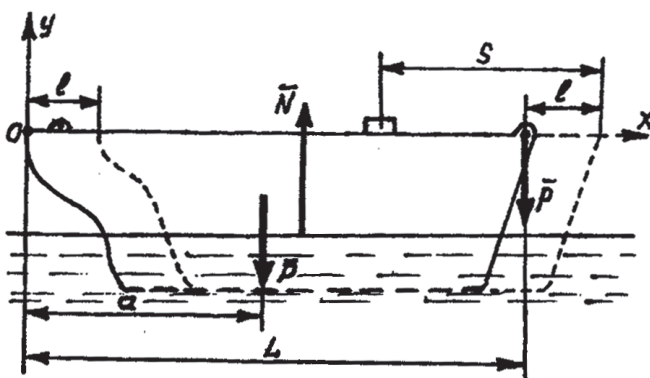
Осыдан

$$N = P, \quad F_Y^{үйк.} = |F_Y^{үйк.}| = \frac{P}{g} a_c = \frac{P \pi^2 n^2}{g 1200} h \cos \alpha.$$

$F_x^{үйк.} = 0$, ал $F_x^{үйк.} < 0$, болғандықтан үйкеліс күші OB жасаушы бойымен O төбесіне қарай бағытталады.

3-мысал. Паром палубасындағы жүк жүкшығыр бойымен тұмсығынан құйрығына қарай қозғалады (3.3.3-сурет). Жүктің және паромның салмақтары \bar{p} және \bar{P} . Егер жүк палубаның бойымен S аралыққа орын ауыстыратын болса, онда паром қандай аралыққа орын ауыстырады?

Шешуі. Паром және жүкті бір жүйе ретінде қарастырамыз. Бұл жүйеге келесі сыртқы күштер түсірілген: паромның салмағы \bar{P} , жүктің салмағы \bar{p} және гидростатикалық су қысымы \bar{N} . Барлық сыртқы күштердің горизонталь Ox өсіне проекциялары нөлге тең болғандықтан, массалар центрі жылдамдығының сақталу заңы бойынша



3.3.3-сурет

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = const.$$

Бастапқы уақыт мезгілінде жүйе тыныштықта болады, сондықтан

$$v_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0.$$

Осыдан

$$x_C = const.$$

Яғни, қарастырып отырған жүйенің массалар центрі өзінің орнын өзгеріссіз сақтайды. Координаттың бас нүктесі ретінде жүйе қозғалып бастағанға дейінгі паромның құйрығындағы нүкте O -ны қабылдаймыз. Онда, жүйенің

бастапқы және соңғы орын ауыстыруларының массалар центрі асциссалары үшін келесі теңдіктер сәйкес келеді

$$x_C = \frac{pL + Pa}{p + P}, \quad x_C = \frac{p(L + l - a) + P(a + l)}{p + P},$$

мұндағы, L – паромның ұзындығы; a – паромның ауырлық центрінен, құйрығы арқылы жүргізілген вертикаль түзуге дейінгі ара қашықтық; l – анықталатын паромның орын ауыстыру аралығы.

Алдыңғы теңдіктердің оң жақтарын теңестіреміз
 $pL + Pa = p(L + l - S) + p(a + l)$.

Осыдан

$$l = S \frac{P}{p + p}.$$

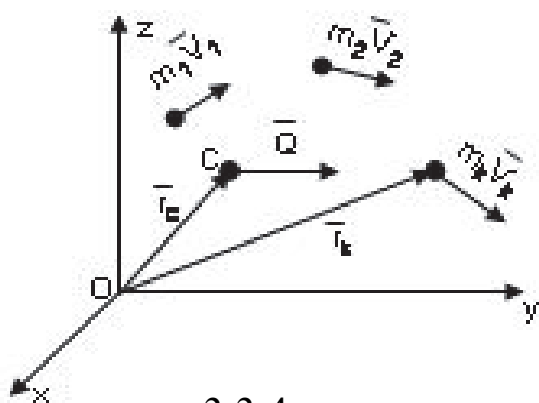
Орын ауыстыру l шамасы паромның өлшеміне және ауырлық центрінің орнына байланыссыз екенін көреміз.

Сұрақ. Паром қайсы бағытта қозғалады?

Жауап. $l > 0$ болғандықтан паром оңға орын ауыстырады (3.19-сурет). Егер $l < 0$ болса, онда паром қарама-қарсы бағытта қозғалған болар еді.

3.3.5 Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері. Берілген механикалық жүйе n материялық нүктелерден құралады. Жүйенің массасы m_k және жылдамдығы \vec{v}_k тең M нүктесінің қозғалыс мөлшері $\vec{q}_k = m_k \vec{v}_k$



3.3.4-сурет

векторымен беріледі (3.3.4-сурет). Жүйедегі нүктелер қозғалыс мөлшері \vec{q}_k векторларының бас векторы механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері ретінде алынады.

Басқаша айтқанда, механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері деп, ондағы барлық материялық нүктелердің қозғалыс мөлшерлерінің геометриялық қосындысына тең болатын \vec{Q} векторын айтамыз

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k. \quad (3.3.5.1)$$

\bar{Q} векторының координаттар өстеріндегі проекцияларын (3.3.5.1)

– векторлық теңдікті сәйкес өстерге проекциялау арқылы табамыз

$$Q_x = \sum m_k v_{kx}, \quad Q_y = \sum m_k v_{ky}, \quad Q_z = \sum m_k v_{kz}. \quad (3.3.5.2)$$

Жүйенің қозғалыс мөлшері мен массалар центрінің жылдамдығы арасында тәуелділік бар. Оны табу үшін жүйе массаларының центрін анықтайтын қатынастың екі жағынан да уақыт бойынша туынды табамыз

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}}{M} = \frac{\sum m_k \bar{v}_k}{M}.$$

Осы теңдіктен мынау шығады

$$\bar{Q} = M\bar{v}_c. \quad (3.3.5.3)$$

Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема. Жүйенің қозғалысы кезінде оның \bar{Q} қозғалысы мөлшері күштердің әсерінен уақыт өткен сайын өзгеріп отырады. \bar{Q} векторы өзгеруінің жүйеге әсер етуші күштерге тәуелділігі мынадай теоремамен анықталады: *механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінен уақыт бойынша алынған туынды жүйеге әсер етуші барлық сыртқы күштердің бас векторына тең.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін механикалық жүйе қозғалысының дифференциалдық тендеулерін еске түсірейік

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad k = (\bar{1}, n).$$

Осы тендеулердің барлығын бір-біріне қосайық, сонда алатынымыз

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i. \quad (3.3.5.4)$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы қосындылардың екіншісі, ішкі күштер қосындысы, нөлге тең. Ал оның сол жағындағы қосынды \bar{Q} векторынан уақыт бойынша алынған туындыға тең

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum m_k \bar{v}_k \right) = \frac{d\bar{Q}}{dt}. \quad (4.2.5.5)$$

Сондықтан (3.3.5.4) –тендеуден іздеп отырған теореманың өрнегі мына түрге келеді

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \quad \text{немесе} \quad \frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e. \quad (3.3.5.6)$$

Осымен, жоғарыда айтылған теорема дәлелденді (3.3.5.6) теңдігі жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық өрнегін береді. Теореманың (3.3.5.6) өрнегіне жүйенің ішкі күштері қатынаспайды. Бұл оның қолайлы жағы. Өйткені ішкі күштер әуел баста белгісіз болады. Мұнда олар өздігінен жойылған. Демек, ішкі күштер \bar{Q} вектордың өзгеруіне бірден қатыспайды.

Векторлық теңдеу (3.3.5.6) декарттық координаттар өстеріне проекциялаудан 3 скаляр теңдеу аламыз

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e. \quad (3.3.5.7)$$

(3.3.5.7) – теңдеулер, механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің координаттық өстердегі проекцияларынан уақыт бойынша алынған туындылары жүйенің сыртқы күштерінің бас векторының сол өстердегі проекцияларына тең болатындығын көрсетеді.

Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың (3.3.5.6) дифференциалдық өрнегінен оның интегралдық өрнегіне көшуге болады. Ол үшін векторлық теңдік (3.3.5.6)–ның екі жағында dt -ға көбейтіп, содан кейін оның екі жағынан да $t = t_0$ –ден $t = t_1$ -ге дейінгі аралықта интеграл алу керек

$$\int_{t_0}^{t_1} d\bar{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{R}^e dt.$$

Бұдан

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \int \bar{R}^e dt, \quad (4.2.5.8)$$

мұндағы, \bar{Q}_1 - t_1 уақытқа, ал \bar{Q}_0 – t_0 уақытқа сәйкес келетін жүйенің қозғалыс мөлшері \bar{Q} векторының мәндері. (3.3.5.8) теңдігіндегі интеграл сыртқы күштердің бас векторы \bar{R}^e -нің $t_1 - t_0$ уақыт аралығындағы импульсі деп аталады. Оны \bar{S}^e деп белгілейік, сонда алатынымыз

$$\bar{S}^e = \int_{t_0}^{t_1} \bar{R}^e dt. \quad (3.3.5.9)$$

Бұл анықтаманы әрбір жеке \bar{F}_k^e сыртқы күштердің импульстері арқылы да өрнектей аламыз

$$\bar{S}^e = \int_{t_0}^{t_1} \sum \bar{F}_k^e dt = \sum \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_k^e dt.$$

Оң жақтағы қосындының белгісі ішіндегі интегралды жүйенің k -шы нүктесіне әсер ететін, \bar{F}_k^e сыртқы күшінің $t_1 - t_0$ уақыт аралығындағы импульсі деп атаймыз

$$\bar{S}_k^e = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_k^e dt.$$

Бұл теңдікті ескере отырып, бас вектордың импульсін мына түрде жазуға болады

$$\bar{S}^e = \sum \bar{S}_k^e. \quad (3.3.5.10)$$

(3.3.5.10) теңдігі сыртқы күштердің бас векторының қандай да бір уақыт аралығындағы импульсі (3.3.5.9) жүйеге әсер етуші сыртқы күштердің сол уақыт аралығындағы барлық импульстерінің геометриялық қосындысына тең екендігін көрсетеді. Егер күштер импульсінің анықтамасы болып табылатын (3.3.5.9) немесе (3.3.5.10) теңдіктерін пайдалансақ, онда (3.3.5.8) – теореманы былай жазамыз

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \bar{S}^e \text{ немесе } \bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e. \quad (3.3.5.11)$$

Сонымен, жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың интеграл түріндегі өрнегі (3.3.5.8) немесе (3.3.5.11) теңдіктерімен беріледі. Бұл теңдіктермен берілетін теорема былай айтылады: *жүйенің қозғалыс мөлшерінің қандай да бір уақыт аралығындағы өзгеруі, сыртқы күштердің бас векторының сол уақыт аралығындағы импульсіне тең.* (3.3.5.11) векторлық үш скаляр теңдеуге экви-валентті

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \int_{t_0}^{t_1} R_x^e dt, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \int_{t_0}^{t_1} R_y^e dt, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \int_{t_0}^{t_1} R_z^e dt, \quad (3.3.5.12)$$

немесе

$$Q_{1x} - Q_{0x} = S_x^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = S_y^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = S_z^e. \quad (3.3.5.13)$$

Қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы. Егер механикалық жүйеге әсер ететін сыртқы күштерінің бас векторы нөлге тең болып келетін болса $\bar{R}^e = 0$, онда теорема өрнегі (3.3.5.11) теңдеуінен мынадай теңдік шығады

$$\bar{Q} = const = \bar{Q}_0, \quad (3.3.5.14)$$

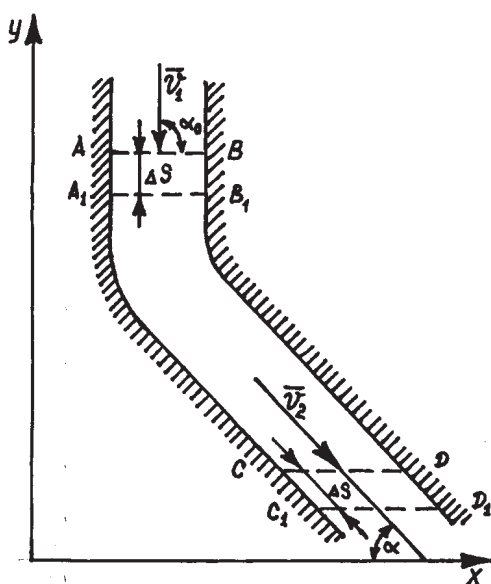
мұндағы, \bar{Q}_0 жүйенің қозғалыс мөлшерінің бастапқы мәні. (3.3.5.14) - теңдік қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы былай айтылады: *егер*

сыртқы күштердің бас векторы $\bar{R}^e = 0$ болып келсе, онда механикалық жүйенің \bar{Q} векторы қозғалыс кезінде өзінің шамасы мен бағытын өзгертпей сақтайды.

1-мысал. Вертикаль жазықтыққа қатысты симметриялы $ABCD$ каналымен сұйық $v = 3 \text{ м/с}$ жылдамдықпен ағады (3.3.5-сурет).

Каналдың көлденең қимасы тұрақты және $S = 1 \text{ м}^2$ -қа тең. Сұйықтың түйіршігінің жылдамдық векторы каналға кірерде горизонтпен $\alpha_0 = 90^\circ$, ал каналдан шығарда горизонтпен $\alpha = 60^\circ$ бұрыш жасайды.

Сұйықтың канал қабырғасына түсіретін қысым күшінің горизонталь құраушысын анықтау керек.



3.3.5-сурет

Шешуі. Мәселені шешу үшін, жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз. Механикалық жүйе ретінде каналдың қабырғаларымен, AB және CD қималарымен шектелген, t уақыт сәтіндегі көлемді толтыратын сұйық түйіршіктерінің жүйесін қарастырамыз.

Қандай да Δt уақыт аралығында сұйық түйіршіктері орын ауыстырады және $A_1B_1C_1D_1$ көлемді толтырады. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері t уақыт мезгілінде \bar{Q}_1 , ал $t + \Delta t$ уақыт мезгілінде \bar{Q}_2 болады. Айырмасы

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1,$$

Δt уақыт аралығындағы жүйе қозғалыс мөлшерінің өсімшесіне тең.

Қозғалыс мөлшері \bar{Q}_1 , ABA_1B_1 және A_1B_1CD көлемдерді толтыратын сұйық түйіршіктерінің \bar{Q}_{11} және \bar{Q}_{12} қозғалыс мөлшерінің қосындысына тең, яғни

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{12}.$$

Дәл осы сияқты, CDC_1D_1 көлемді толтыратын сұйық түйіршіктерінің қозғалыс мөлшерін \bar{Q}_{22} деп белгілейміз, онда

$$\bar{Q}_2 = \bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{22}.$$

Сұйықтың каналмен біркелкі қозғалысында Δt уақыт аралығында қозғалыс мөлшері \bar{Q}_{12} өзгермейді

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q}_2 - \bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{11},$$

немесе

$$\Delta \bar{Q} = \Delta m_2 \bar{v}_2 - \Delta m_1 \bar{v}_1 \quad (*)$$

мұндағы, \bar{v}_1 және \bar{v}_2 сұйық түйіршіктерінің AB және CD қималарындағы сәйкес жылдамдықтары; Δm_1 және Δm_2 - ABA_1B_1 және CDC_1D_1 көлемдердегі сұйықтың массалары.

Есептің берілгені бойынша каналдың көлденең қималары тұрақты, сондықтан

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 = \bar{v}.$$

Сұйықтың тығыздығын ρ , ал Δt уақыт аралығында сұйық түйіршіктерінің орын ауыстыруын ΔS деп белгілейміз.

Каналдың кез келген екі қимасы арқылы бір уақыт мезгілінде бірдей сұйық ағып өтеді, сондықтан

$$\Delta m_2 = \Delta m_1 = \rho S \Delta S.$$

(*) теңдігін горизонталь OX өсіне проекциялаймыз

$$\Delta Q_x = \Delta m_2 v_2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rho S v \Delta S.$$

Теңдіктің екі жағын Δt -ға бөліп, туындының анықтамасын пайдалансақ, алатынымыз

$$\frac{dQ_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho S v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \rho \frac{Sv^2}{2}. \quad (**)$$

Теорема бойынша

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x, \quad (***)$$

мұндағы, R_x – жүйеге түсірілген сыртқы күштердің негізгі векторының Ox өсіне проекциясы.

(**) және (***) теңдіктерінің оң жақтарын теңестіру арқылы алатынымыз

$$R_x = \rho \frac{Sv^2}{2}.$$

Судың тығыздығы $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Онда

$$R_x = 1000 \frac{1 \cdot 3^2}{2} = 4500 \text{ Н} = 459 \text{ кгс}.$$

2-мысал. Массалары $m_1 = 2 \text{ кг}$ және $m_2 = 3 \text{ кг}$ екі шар горизонталь жазықтықтың бетінде дөңгелеп қозғалады (3.3.6-сурет). Шарлар

біртекті және олардың диаметрлері тең. Шарлардың жылдамдықтары $v_1 = 10 \text{ м/с}$ және $v_2 = 5 \text{ м/с}$.

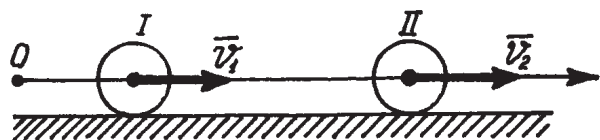
Шарлардың соқтығысынан соң 1-шар центрінің жылдамдығы 5 м/с -ке тең болады, ал оның бағыты өзгермейді.

Соқтығыстан соң II-шар центрі қандай жылдамдықпен қозғалатынын анықтау керек. Шарлар мен жазықтықтың арасындағы үйкеліс есепке алынбайды.

Шешуі. Шарларды жүйе ретінде қарастырамыз. Бұл жүйе үшін, соқтығыс кезіндегі шарлардың өзара әсер күштері ішкі күштер болады. Сыртқы күштердің Ox өсіне проекциялары нөлге тең, яғни жүйенің қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы бойынша:

$$Q_x = \text{const} \text{ немесе } Q_x = Q_{x0},$$

мұндағы, Q_{x0} және Q_x – соқтығысқа дейінгі және соқтығыстан кейінгі



3.3.6-сурет

жүйе қозғалыс мөлшерінің Ox өсіне проекциялары.

I және II-шарлар центрлерінің жылдамдықтарын u_1 және u_2

деп белгілейміз. Сонда

$$Q_{x0} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x},$$

$$Q_x = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}.$$

$v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$ және $u_{1x} = u_1$ теңдіктерін ескере отырып, алдыңғы екі теңдіктің екі жағын теңестіреміз

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_{2x}.$$

Осыдан

$$u_{2x} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 u_1}{m_2} = \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5}{3} = 8,33 \text{ м/с},$$

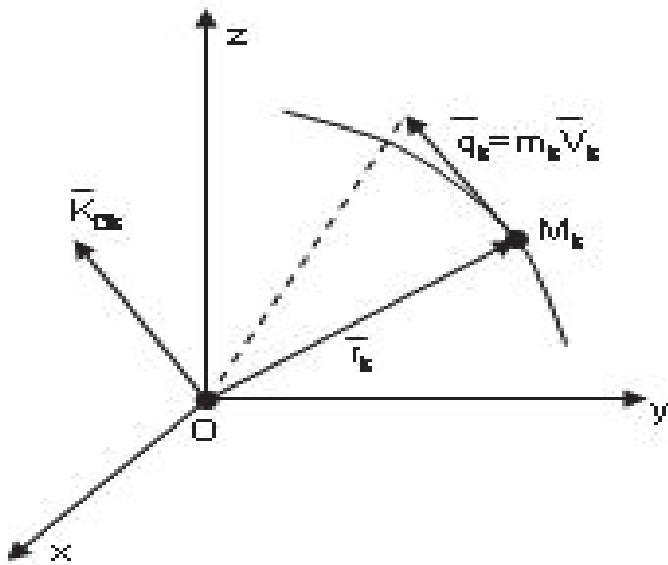
$u_{2x} > 0$ болғандықтан II-шар қозғалысының бағыты өзгермейді.

3.3.6 Механикалық жүйенің кинетикалық моменттерінің өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйенің кинетикалық моменті. n материялық нүктеден тұратын механикалық жүйе қозғалысын $Oxyz$ инерциялық өстер жүйесіне қатысты қарастырайық (3.3.7-сурет). Жүйедегі әрбір нүктенің қозғалыс мөлшері

$$\bar{q}_k = m_k \bar{v}_k, \quad (k = 1, n). \quad (3.3.6.1)$$

және оның O центріне қатысты алынған кинетикалық моменті



3.3.7-сурет

$$\bar{K}_{Ok} = \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k, \quad (3.3.6.2)$$

$(k = \overline{1, n}).$

\bar{K}_{Ok} векторы O нүктесінде \bar{r}_k және \bar{q}_k - векторларының жазықтығына перпендикуляр бағытталады. \bar{K}_{Ok} векторларының бас векторын алайық.

Жүйе нүктелерінің O центрге қатысты алынған кинетикалық моменттерінің бас векторын (геометриялық қосындысын)

сол O центріне қатысты алынған механикалық жүйенің кинетикалық моменті деп атаймыз. Жүйенің O центріне қатысты кинетикалық моментін \bar{K}_0 деп белгілесек, онда ол анықтама бойынша мынаны аламыз

$$\bar{K}_O = \sum \bar{K}_{Ok} = \sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k), \quad (3.3.6.3)$$

немесе (4.2.6.2) теңдігін ескерсек шығатыны

$$\bar{K}_O = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (3.3.6.4)$$

векторының бас нүктесі O центрінде жатады. Кинетикалық момент механикалық жүйенің айнала қозғалысын сипаттайды.

Жүйенің \bar{K}_O кинетикалық моментін $Oxuz$ координаттық өстерге проекциялайық

$$\begin{aligned} K_x &= \sum M_x(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \\ K_y &= \sum M_y(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \\ K_z &= \sum M_z(m_k \bar{v}_k) = \sum m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k). \end{aligned} \quad (3.3.6.5)$$

Проекциялары (3.3.6.5) теңдіктерімен анықталатын векторының модулі мынадай

$$K_O = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}. \quad (3.3.6.6)$$

Оның бағыттаушы косинустары

$$\cos(\bar{K}_O, x) = \frac{K_x}{K}, \quad \cos(\bar{K}_O, y) = \frac{K_y}{K}, \quad \cos(\bar{K}_O, z) = \frac{K_z}{K}. \quad (3.3.6.7)$$

3.3.7 Механикалық жүйенің қозғалмайтын центрге қатысты алынған кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема

Теорема. Қандай да бір қозғалмайтын центрге қатысты алынған механикалық жүйенің кинетикалық моментінің уақыт бойынша алынған туындысы сол центрге қатысты алынған жүйедегі сыртқы күштердің бас моментіне тең.

Теореманы дәлелдеу мақсатымен берілген механикалық жүйенің қандай да бір нүктесін M_k алайық та, оған әсер ететін сыртқы \bar{F}_k^e және ішкі \bar{F}_k^i күштерді ескере отырып оның қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрайық

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, (k = \overline{1, n}). \quad (3.3.7.1)$$

Мұндай теңдеулерді әрбір нүкте үшін құруға болатындықтан олардың жалпы саны n жүйедегі нүктелер санына тең болады. Осы (3.3.7.1) – тегі n теңдеудің әрқайсысын сәйкес нүктелердің радиус – векторлары \bar{r}_k -ге векторлық түрде көбейтіп, оларды бір-біріне қосамыз

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i. \quad (3.3.7.2)$$

(3.3.7.2) – теңдіктің сол жағындағы қосындыны түрлендіреміз

$$\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \right) - \sum \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k \right). \quad (3.3.7.3)$$

Жүйенің ішкі күштерінің қасиеті бойынша ішкі күштердің бас моменті әр уақытта нөлге тең болады. Сондықтан да (3.3.7.3) – теңдіктің оң жағындағы екінші қосындысы нөлге тең

$$\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = 0. \quad (3.3.7.4)$$

(3.3.7.3) және (3.3.7.4) теңдіктерін пайдалана отырып (3.3.7.2) – теңдігін мына түрге келтіреміз

$$\frac{d}{dt} \left(\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k \right) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e. \quad (3.3.7.5)$$

Егер (3.3.7.5) теңдігінің сол жағындағы қосынды жүйенің кинетикалық моменті \bar{K}_O -ге, ал оның оң жағындағы қосынды сыртқы күштердің O центріне қатысты алғандағы бас моменті \bar{M}_O^e векторына тең екенін ескерсек, онда бұл теңдікті мына түрде ықшамдап жазуға болады

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e. \quad (4.2.7.6)$$

Осымен теорема дәлелденді. Теорема (3.3.7.5) немесе (3.3.7.6) түріндегі бір векторлық теңдікпен беріледі.

Жоғарыдағы тағайындалған (3.3.7.5) және (3.3.7.6) векторлық теңдіктерді координаттық түрге келтірейік. Ол үшін кинетикалық моментті және күштер бас моментін үш құраушыға жіктейміз

$$\bar{K}_O = K_x \bar{i} + K_y \bar{j} + K_z \bar{k} \quad \text{және} \quad \bar{M}_O^e = M_x^e \bar{i} + M_y^e \bar{j} + M_z^e \bar{k}. \quad (3.3.7.7)$$

Енді (4.2.7.7) теңдіктеріне сүйене отырып (3.3.7.6) векторлық теңдікті мынадай үш скаляр теңдіктерімен алмастыра аламыз

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \quad (3.3.7.8)$$

Кинетикалық моменттің сақталу заңы. Егер O нүктесіне қатысты алынған сыртқы күштер бас моменті $\bar{M}_O^e = 0$ болса, онда жүйенің сол нүктеге қатысты алынған кинетикалық моментінің шамасы да, бағыты да өзгермейді, тұрақты қалпында қалады

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = 0, \quad \bar{K}_O = const. \quad (3.3.7.9)$$

Бұл (3.3.7.9) теңдігі O центріне қатысты алынған кинетикалық моменттің сақталу заңын береді.

Егер сыртқы күштердің O центріне қатысты алғандағы бас моменті нөлге тең болса, онда оның осы центрден өтетін координаттар өстеріндегі проекциялары да нөлге тең болады

$$M_x^e = 0, \quad M_y^e = 0, \quad M_z^e = 0.$$

Сондықтан да (3.3.7.9) - теңдіктерден алатынымыз

$$K_x = const, \quad K_y = const, \quad K_z = const. \quad (3.3.7.10)$$

3.3.8 Кинетикалық моменттің өзгеруі туралы теореманы қатты дененің айналмалы қозғалысына қолдану

Қозғалмайтын өстен айналатын қатты дененің кинетикалық моменті. Қатты дене қозғалмайтын Oz өсін $\bar{\omega}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалатын болсын (3.3.8-сурет). Осы дененің O центріне қатысты кинетикалық моментін анықтайық. Анықтама бойынша

$$\bar{K}_O = \sum \bar{M}_O(m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (3.3.8.1)$$

Координаттық өстердегі \bar{K}_O векторының проекциялары (3.3.7.7) формулаларымен анықталады. Жылдамдық \bar{v}_k векторының проекцияларын анықтауға Эйлер формуласын қолдануға болады

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k. \quad (3.3.8.2)$$

Осы теңдіктен

$$v_{kx} \equiv \dot{x}_k = -\omega y_k,$$

$$v_{ky} \equiv \dot{y}_k = \omega x_k,$$

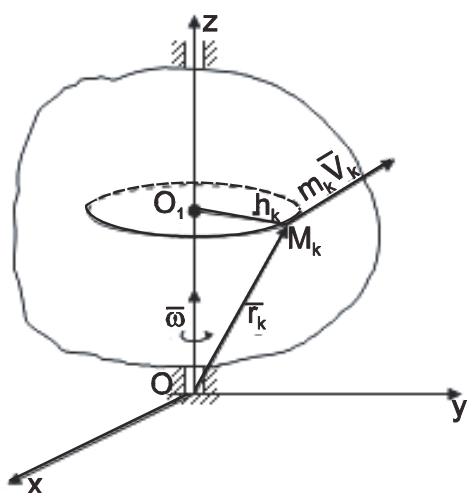
$$v_{kz} \equiv \dot{z}_k = 0, \quad (3.3.8.3)$$

жылдамдықтар проекцияларының өрнектерін (3.3.6.5) формуладағы орындарына қоямыз

$$K_x = -\omega \sum m_k z_k x_k,$$

$$K_y = -\omega \sum m_k y_k z_k, \quad (3.3.8.4)$$

$$K_z = \omega \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$$



3.3.8-сурет

Осы (3.3.8.4) формуладағы қосындыларды мына төмендегідей етіп белгілейміз

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \quad I_{yz} = I_{zy} = \sum m_k y_k z_k, \quad I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (3.3.8.5)$$

Осыларға ұқсас формулалармен анықталатын, бірақ (3.3.8.5) өрнегінде жоқ тағы бір үш шаманы көрсетейік

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum m_k x_k y_k, \quad I_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2), \quad I_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2). \quad (3.3.8.6)$$

(3.3.8.5), (3.3.8.6) теңдіктерімен анықталатын шамалар инерция моменттері деп аталады. Олардың ішіндегі I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} үш шаманы дененің центрден тепкіш инерция моменттері деп, ал қалғандары I_x, I_y, I_z дененің өстік инерция моменттері деп аталады.

Енді осы анықтамаларды пайдалансақ (3.3.8.4) формулаларын мына түрге келтіреміз

$$K_x = -\omega I_{xz}, \quad K_y = -\omega I_{yz}, \quad K_z = \omega I_z. \quad (3.3.8.7)$$

3.3.9 Қатты дененің бекітілген өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі

Дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуін алу үшін кинетикалық моменттің өзгеруі туралы теореманы (3.3.7.8) теңдеулерінің үшінші түріне сәйкес қолдануымыз керек

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \quad (3.3.9.1)$$

Дененің z айналу өсіне қатысты алынған кинетикалық моменті (3.3.8.7) формулаларының 3 – сі бойынша анықталады

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \quad (3.3.9.2)$$

Дене абсолют қатты дене болған жағдайда I_z инерция моменті тұрақты шама болады. Олай болса (3.3.9.2) теңдеуін былайша өзгерте аламыз

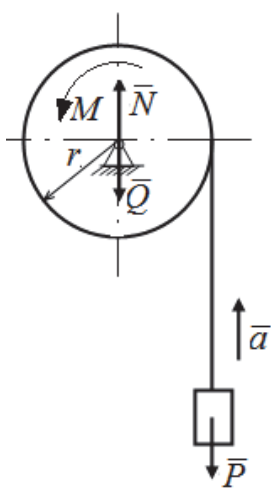
$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\bar{F}_k^e), \quad (3.3.9.3)$$

немесе

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\bar{F}_k^e). \quad (3.3.9.4)$$

Осы соңғы теңдеу қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі болып табылады.

1-мысал. Көлденең Oz өсті айнала қозғалатын радиусы r салмағы Q -ге тең шкивке арқан оралған. Арқанның соңына салмағы P -ға тең жүк ілінген. Шкивке тұрақты айналдырушы момент M түсірілген (3.3.9-сурет). Шкивті біртекті цилиндр ретінде қарастырып, көтерілетін жүктің a үдеуін табу керек.



Шешуі: Жүктің v жылдамдығына тең, шкивтің бетіндегі кез келген нүктенің жылдамдығын v' деп белгілеп, жүк және шкивтен құрылған механикалық жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моментін анықтаймыз

$$K_z = K_z^u + K_z^{\omega} = J_z \omega + \frac{P}{g} v \cdot r,$$

мұндағы: $J_z = \frac{Q}{2 \cdot g} \cdot r^2$ – шкивтің Oz өсіне қатысты

инерция моменті;

3.3.9-сурет $\omega = \frac{v'}{r} = \frac{v}{r}$ – шкивтің бұрыштық жылдамдығы.

Мәндерін орындарына қоямыз

$$K_z = \frac{Q}{2g} \cdot r^2 \cdot \frac{v}{r} + \frac{P}{g} v \cdot r = \frac{vr}{2g} \cdot (Q + 2P).$$

Жүйеге түсірілген сыртқы күштердің Oz өсіне қатысты моменттер қосындысы мына түрде анықталады

$$\sum M_{kz}^e = M - P \cdot r.$$

Механикалық жүйенің өске қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

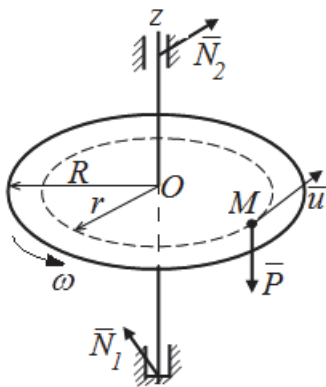
$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_{kz}^e,$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{vr}{2g} (Q + 2P) \right] = M - P \cdot r, \quad \frac{(Q + 2P) \cdot r}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} = M - P \cdot r,$$

мұндағы $\frac{dv}{dt} = a$, сондықтан $a = \frac{2g(M - Pr)}{r(Q + 2P)}$.

1.33.2-мысал. Радиусы R және салмағы Q біртекті диск болатын көлденең платформа, дискінің O центрі арқылы өтетін вертикаль Oz өсін айнала қозғалады (3.3.10-сурет). Платформаның үстінде Oz өсінен r қашықтықта салмағы P арба орналасқан. Платформаның ω бұрыштық жылдамдығын келесі берілгендер бойынша анықтау керек:

а) платформаның үстінде арба радиусы r шеңбер бойымен сағат тіліне қарама-қарсы тұрақты u салыстырмалы жылдамдығымен қозғалғанда (бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болады);



3.3.10-сурет

б) арбаның қозғалу шарты өзгермейді; платформа бастапқы уақыт мезгілінде сағат тіліне қарама-қарсы бағытта тұрақты ω_0 бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады (бастапқы уақыт мезгілінде арба платформамен бірге қозғалады);

в) арбаның қозғалу шарты өзгермейді, бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болады, Oz өсін айнала қозғалғанда пайда болатын шамасы тұрақты

кедергі моменті $M_{кед}$ әсер етеді.

Арбаны материалдық нүкте ретінде қарастыру қажет.

Шешуі:

а) жағдайы. Платформа және арбадан тұратын жүйесінің

қозғалысын қарастырамыз. Жүйеге келесі сыртқы күштер түсірілген: платформаның салмақ күші \bar{Q} , арбаның салмақ күші \bar{P} , байланыстардың реакция күштері \bar{N}_1 және \bar{N}_2 .

Oz өсіне қатысты барлық күштердің моменттері нөлге тең, себебі \bar{Q} және \bar{P} Oz өсіне параллель, ал \bar{N}_1 және \bar{N}_2 оны қиып өтеді. Есептің берілгені бойынша тіректегі үйкеліс моменттері нөлге тең.

Сонымен, жүйеге түсірілген сыртқы күштердің Oz өсіне қатысты моменттерінің қосындысы нөлге тең $\sum M_{kz}^e = 0$, яғни жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моментінің сақталуы туралы шарты бойынша $K_z = const$.

Бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болғандықтан, кинетикалық моменттің бастапқы шамасы нөлге тең $K_{z0} = 0$. Сондықтан $K_z = 0$.

Жүйенің Oz өсіне қатысты кинетикалық моменті платформаның және арбаның сол өске қатысты кинетикалық моменттерінің қосындысына тең

$$K_z = K_z^{nl} + K_z^{ap} = J_z \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot v_a \cdot r,$$

мұндағы $J_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot R^2$ – платформаның Oz өсіне қатысты

инерция моменті, ал v_a – арбаның абсолют жылдамдығы. Арба күрделі қозғалыс жасайды, платформамен бірге айналмалы тасымал қозғалыста, платформаға қатысты салыстырмалы қозғалыста болады. Жылдамдықтарды қосу туралы теорема бойынша $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$.

Арбаның тасымал қозғалыстағы жылдамдығының модулі $v_e = \omega \cdot r$ -ге тең және MO радиусына перпендикуляр сағат тіліне қарама-қарсы платформаның айналу бағытымен бағытталады. Арбаның салыстырмалы жылдамдығы ($v_r = u$) шамасымен берілген және салыстырмалы қозғалысының траекториясы болатын радиусы r шеңберге жанама бойымен сағат тіліне қарама-қарсы бағытталған. Сондықтан $v_a = \omega \cdot r + u$.

J_z , v_a мәндерін кинетикалық момент өрнегіне қойып және оның сақталу заңын ескере отырып алатынымыз

$$\frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = 0.$$

Осы теңдеуді шеше отырып платформаның бұрыштық жылдамдығын табамыз
$$\omega = -\frac{2 \cdot P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}.$$

Бұрыштық жылдамдық теріс таңбамен шықты, яғни платформа сағат тіліне бағыттас айналады.

б) жағдайы. Бұл жағдайда мынадай кинетикалық моменттің Oz өсіне қатысты шарты орындалады $K_z = K_{z_0}$, күштер сұлбасы өзгермейді, бірақ бастапқы кинетикалық момент келесі шамаға тең болады

$$K_{z_0} = J_z \cdot \omega_0 + \frac{P}{g} \cdot \omega_0 \cdot r^2.$$

а) жағдайындағы айтылғандарды ескере отырып алатынымыз

$$\frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = \frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega_0 + \frac{P}{g} \cdot \omega_0 \cdot r^2$$

немесе
$$\omega \cdot \frac{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}{2g} + \frac{P \cdot u \cdot r}{g} = \omega_0 \cdot \frac{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}{2g}.$$

$$\text{Осыдан } \omega = \omega_0 - \frac{2P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Сонымен, арба қозғалып бастағаннан кейін платформаның бұрыштық жылдамдығы өзгереді. Егер $\omega_0 > \frac{2 \cdot P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}$ болса, онда $\omega > 0$ және платформа сағат тіліне қарсы бағытта айнала қозғалады. Егер $\omega_0 < \frac{2 \cdot P \cdot u \cdot r}{Q \cdot R^2 + 2 \cdot P \cdot r^2}$ болса, онда платформа сағат тілімен бағыттас айналады.

в) жағдайы. Жүйенің өске қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема келесі түрде жазылады

$$\frac{dK_z}{dt} = -M_{кед}.$$

Осы теңдеуді dt -ға көбейтіп $[0, t]$ уақыт аралығында интегралдаймыз. Кедергі момент тұрақты деп есептейміз. Сонда аламыз: $K_z - K_{z_0} = -M_{кед} \cdot t.$

Бастапқы уақыт мезгілінде платформа және арба тыныштықта болғандықтан, $K_{z_0} = 0$. Сондықтан $K_z = -M_{кед} \cdot t.$

а) жағдайындағы айтылғандарды және u, ω бағыттарын ескере

отырып алатынымыз

$$K_z = \frac{Q}{2g} \cdot R^2 \cdot \omega + \frac{P}{g} \cdot (\omega \cdot r + u) \cdot r = -M_{кед} \cdot t,$$

осыдан

$$\omega = -\frac{2P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2} - \frac{2M_{кед} \cdot t \cdot g}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Сонымен, платформа *a*) жағдайдағыдай, сағат тіліне қарсы емес, сағат тілімен бағыттас айналады. Сондықтан, $M_{кед}$ кедергі моментінің бағыты сағат тіліне қарама-қарсы болады, яғни теңдіктің оң жағындағы екінші мүшенің таңбасын өзгертеміз

$$\omega = \frac{2M_{кед} \cdot t \cdot g}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2} - \frac{2P \cdot r \cdot u}{Q \cdot R^2 + 2P \cdot r^2}.$$

Алынған қорытындыға талдау жүргізетін болсақ, онда платформа уақытқа бірмәнді кемімелі бұрыштық жылдамдықпен айналатынын және $t = \frac{P \cdot r \cdot u}{M_{кед} \cdot g}$ уақыт мезгілінде тоқтайтынын көреміз.

3-мысал. Салмағы P , радиусы r шкивті айналмалы қозғалысқа келтіретін белдіктің тартылыс күштері T_1 және T_2 (3.3.11-сурет).

Бұрыштық үдеуі ε ($\varepsilon > 0$) тұрақты болатын шкивке түсірілген $M_{кед}$ кедергі моментін анықтау керек. Шкив - біртекті дөңгелек диск.

Шешуі: Шкивтің Oz өсін айнала қозғалысының теңдеуін құрамыз

$$J_z \varepsilon = T_1 \cdot r - T_2 \cdot r - M_{кед},$$

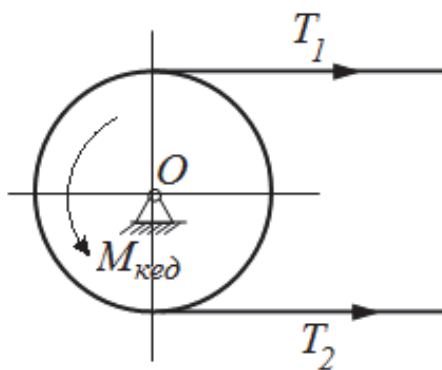
мұндағы $J_z = \frac{P}{2 \cdot g} \cdot r^2$ – шкивтің

айналу осіне қатысты инерция моменті.

$$\text{Осыдан } M_{кед} = (T_1 - T_2) r - \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon.$$

4-мысал. Тегершіктің бетіндегі нүктенің v жылдамдығына пропорционал, тежеуші момент M_1 пайда болатын, тегершікті тез тоқтату үшін электрлік тежеуші қолданылады

$M_1 = k \cdot v$, мұндағы k – тұрақты коэффициент. Мойынтіректерде пайда болатын үйкеліс күш моменті M_2 тұрақты деп есептеуге болады; тегершіктің диаметрі D , оның айналу осіне қатысты инерция



3.3.11-сурет

моменті J_z . Тегершіктің бастапқы бұрыштық жылдамдығы ω_0 . Тегершіктің қандай T уақыт аралығында тоқтайтынын анықтау керек.

Шешуі: Тегершіктің өсті айнала қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрамыз

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = -M_1 - M_2 = -k \cdot v - M_2.$$

Мұнда $v = \frac{D}{2} \cdot \omega$ болатынын ескеріп, аламыз

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = -k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega - M_2.$$

Айнымалыларды айыра отырып, алатынымыз

$$dt = -\frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega}.$$

0-ден T -ға және ω_0 -ден $\omega = 0$ -ге дейінгі шектерде интегралдай-
мыз

$$\int_0^T dt = -\int_{\omega_0}^0 \frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega} = \int_0^{\omega_0} \frac{J_z \cdot d\omega}{M_2 + k \cdot \frac{D}{2} \cdot \omega}.$$

$$\text{Осыдан } T = J_z \cdot \frac{2}{k \cdot D} \cdot \ln \left(M_2 + \frac{k \cdot D}{2} \cdot \omega_0 \right).$$

3.3.10 Механикалық жүйесінің кинетикалық энергиясы және есептеуге керекті формулалар

Анықтама. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы деп ондағы барлық материялық нүктелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең скаляр шаманы айтамыз.

Массасы m_k әрбір материялық нүктенің кинетикалық энергиясы

$$T_k = \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (k = \overline{1, n}) \quad (3.3.10.1)$$

Онда, анықтама бойынша, n материялық нүктеден тұратын механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы осылардын арифметикалық қосындысына тең

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2, \quad (3.3.10.2)$$

немесе

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \quad (3.3.10.3)$$

Кинетикалық энергия қозғалыс мөлшерімен қатарлас келетін жүйе қозғалысының негізгі екі өлшемінің бірі болып табылады. Жоғарыда айтқанымыздай, жүйенің қозғалыс мөлшері оның ілгерілемелі қозғалысын сипаттайды. Ал кинетикалық энергия механикалық қозғалысты толық көлемінде тереңірек сипаттайды.

Өзгермейтін механикалық жүйенің (абсолют қатты дене) қозғалысы үшін (3.3.10.1) өрнегін қолдануға ыңғайлы түрге келтіруге болады.

Ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы. Ілгерілемелі қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары өзара тең болғандықтан (3.3.10.1) формуладағы жылдамдық квадратын ортақ көбейткіш ретінде қосынды белгісінің алдына шығады

$$T = \frac{1}{2} v^2 \sum m_k .$$

Дене нүктелерінің массаларының қосындысы $M = \sum m_k$ дене массасын береді. Олай болса ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дене кинетикалық энергиясы

$$T = \frac{1}{2} M v^2 . \quad (3.3.10.4)$$

Сонымен, *ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы дененің массасы мен оның жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең.*

Қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын қатты дененің кинетикалық энергиясы. Айналмалы қозғалыстағы дене нүктелерінің жылдамдықтары олардың айналу өсінен қашықтықтарына пропорционал болып келеді

$$v_k = \omega \cdot h_k, (k = \overline{1, n}).$$

Осыларды (3.112) формуласына қойсақ алатынымыз

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k \omega^2 h_k^2 .$$

Мұндағы, ω^2 ортақ көбейткішті қосынды белгісінің алдына шығарсақ және дене нүктелерінің массалары мен олардың айналу өсінен қашықтықтарының квадраттары көбейтінділерінің қосындысы

$I_z = \sum m_k h_k^2$ – айналу өсіне қатысты алынған дененің инерция моментін анықтайтынын ескерсек, онда мынадай формула аламыз

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (3.3.10.5)$$

Айналмалы қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы дененің айналу өсіне қатысты алынған инерция моменті мен оның бұрыштық жылдамдығының квадратына көбейтіндісінің жартысына тең.

Кениг теоремасы. Механикалық жүйенің күрделі қозғалысының кинетикалық энергиясын есептеуде Кенигтің теоремасы қолданылады. Механикалық жүйенің күрделі қозғалысын екі жәй қозғалысқа жіктеуге болады. Оның бірі – массалар центрінің қозғалысымен анықталатын ілгерілемелі қозғалыс, ал екіншісі жүйенің массалар центрі төңірегіндегі салыстырмалы қозғалысы. Осыған байланысты M_k нүктенің жылдамдығы да екі жылдамдық қосындысына тең болады

$$\bar{v} = \bar{v}_c + \bar{v}'_k, (k = \overline{1, n}), \quad (3.3.10.6)$$

мұндағы, \bar{v}_c – жүйенің массалары центрінің жылдамдығы, \bar{v}'_k – жүйемен бірге массалар центрі төңірегіндегі қозғалуынан туатын M_k нүктенің жылдамдығы. Бұл жылдамдықтарды (3.3.10.2) теңдігіне апарып қою арқылы мынадай нәтиже аламыз

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k (\bar{v}_c + \bar{v}'_k)^2 = \frac{1}{2} \sum m_k v_c^2 + \bar{v}_c \sum m_k \bar{v}'_k + \frac{1}{2} \sum m_k \bar{v}'_k{}^2. \quad (3.3.10.7)$$

Бұл (3.3.10.7)–теңдігіндегі

$$\sum m_k = M, \sum m_k \bar{v}'_k = \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{\rho}_k) = \frac{d}{dt} (M \bar{\rho}_c) = 0. \quad (3.3.10.8)$$

Мұндағы $\bar{\rho}_c = 0$, өйткені массалар центрі C – қозғалмалы $SXYZ$ координаттық өстер жүйесінің бас нүктесі. Осы (3.3.10.8) теңдіктерін еске ала отырып, (3.3.10.7) теңдігін ақырғы түрде былай жазамыз

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_k v'_k{}^2. \quad (3.3.10.9)$$

Соңғы қосынды механикалық жүйенің массалар центріне, яғни ілгерілемелі қозғалыстағы $Sx'y'z'$ -санақ жүйесіне қатысты алынғандағы салыстырмалы қозғалыстың кинетикалық энергиясы, сондықтан оны T'_C деп белгілейік, ол

$$T'_C = \frac{1}{2} \sum m_k v'_k{}^2. \quad (3.3.10.10)$$

Сонда (3.3.10.9) теңдігін қысқаша мына түрде жазуға болады

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T'_C. \quad (3.3.10.11)$$

Кенигтің теоремасы былай айтылады: *күрделі қозғалыстағы механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы массалар центрінің қозғалысымен анықталатын ілгерілемелі қозғалыстың кинетикалық энергиясына, жүйенің массалар центрінің төңірегінде орындалатын салыстырмалы қозғалысының кинетикалық энергиясын қосқаннан шығатын қосындыға тең.*

Жазық-параллель қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы. Дененің жазық параллель қозғалысын массалар центрінің қозғалысымен анықтайтын ілгерілемелі қозғалыс пен массалар центрі төңірегіндегі, ω лездік бұрыштық жылдамдықпен орындалатын, лездік айналыстан тұрады деп есептеуге болады. Массалар центрі C арқылы өтетін және қозғалыс жазықтығына үнемі перпендикуляр болып келетін дененің лездік айналу өсін Cz деп белгілесек, онда (3.3.10.11) формуласы бойынша анықталатын T'_C бұл жолы мынадай болады

$$T'_C = \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2. \quad (3.3.10.12)$$

T'_C табылған мәнін (3.3.10.12) формуласындағы Кенигтің (3.3.10.12) теоремасындағы орнына апарып қойсақ, жазық параллель қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясын есептеуге қолданылатын формула аламыз

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2. \quad (3.3.10.13)$$

Еркін қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы. Еркін қатты дененің массалар центрі жанында орындалатын қозғалыстары C нүктесінен өтетін лездік айналыстарға келтірілгендіктен T_C салыстырмалы қозғалыс энергиясы мынадай формуламен анықталады

$$T'_C = \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2, \quad (3.3.10.14)$$

мұндағы $I_{C\omega}$ – массалар центрі C нүктесінен өтетін және $\bar{\omega}$ лездік бұрыштық жылдамдық векторымен бірдей бағыттталатын лездік айналу өсіне қатысты алынған дененің инерция моменті. (3.3.10.14) теңдігін Кенигтің теоремасын өрнектейтін (3.3.10.9) формуладағы орнына қойсақ, онда мынаны аламыз

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{C\omega} \omega^2. \quad (3.3.10.15)$$

Сонымен, еркін қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы (3.3.10.15) формуласымен анықталады. Жалпы алғанда, $I_{C\omega}$ инерция моменті айнымалы шама болып келеді.

3.3.11 Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Бізге n материялық нүктелердің механикалық жүйесі берілсін жүйенің M_k нүктесіне әсер етуші барлық сыртқы күштердің теңәсерлі күшін \bar{F}_k^e деп, ал ондағы ішкі күштердің теңәсерлі күшін \bar{F}_k^i деп белгілейміз. Сонда массасы m_k -ға тең, бұл M_k нүктесінің қозғалысының дифференциалдық теңдеуін мынадай түрде жаза аламыз

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3.3.11.1)$$

Бұл теңдеудің әрқайсысын $\bar{v}_k dt = d\bar{r}_k$ шамасына көбейтіп, өзара қоссақ, сонда

$$\sum m_k \bar{v}_k d\bar{v}_k = \sum \bar{F}_k^e d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^i d\bar{r}_k. \quad (3.3.11.2)$$

Бұл соңғы теңдеудің сол жағындағы қосынды

$$\sum m_k \bar{v}_k d\bar{v}_k = d\left(\frac{\sum m_k v_k^2}{2}\right) = dT.$$

Болғандықтан (3.3.11.2) теңдігін мына түрде аламыз

$$dT = \sum \bar{F}_k^e d\bar{r}_k + \sum \bar{F}_k^i d\bar{r}_k. \quad (3.3.11.3)$$

Егер \bar{F}_k^e, \bar{F}_k^i күштерінің элементар жұмыстарына сәйкес

$$d'A_k^e = \sum \bar{F}_k^e d\bar{r}_k, \quad d'A_k^i = \sum \bar{F}_k^i d\bar{r}_k, \quad (3.3.11.4)$$

деп белгілесек, онда (3.3.11.3) теңдігін қайтадан мына түрде жазған болар едік

$$dT = \sum d'A_k^e + \sum d'A_k^i. \quad (3.3.11.5)$$

(3.3.11.3) немесе (3.3.11.5) формуласы механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрдегі математикалық өрнегін көрсетеді.

Бұл теорема сөзбен былай айтылады: *механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының дифференциалы жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің элементарлық жұмыстарының қосындысына тең болады.*

Жүйенің алғашқы орналасу жағдайына сәйкес кинетикалық энергиясын T_0 деп, ал оның ақырғы жағдайындағы кинетикалық энергиясын T деп белгілейік. (3.3.11.5) теңдігінің екі жағынан да жүйенің осы екі орналасу аралығында сәйкес шектерде интеграл алайық

$$T - T_0 = \sum_{M_0 M_1} \int \bar{F}_k^e d\bar{r}_k + \sum_{M_0 M_1} \int \bar{F}_k^i d\bar{r}_k. \quad (3.3.11.6)$$

немесе,

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (3.3.11.7)$$

Бұл теңдіктегі A_k^e және A_k^i жүйенің M_k нүктесіндегі \bar{F}_k^e және \bar{F}_k^i - күштердің сол нүктенің траектория бойымен жүрген $M_{KO} M$ жолындағы жұмысы

$$A_k^e = \int_{M_0 M_1} \bar{F}_k^e d\bar{r}_k, \quad A_k^i = \int_{M_0 M_1} \bar{F}_k^i d\bar{r}_k. \quad (3.3.11.8)$$

Сөйтіп, жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың интегралдық түрдегі өрнегі (3.3.11.6) немесе (3.3.11.7) теңдігімен беріледі. Теорема бұл түрінде былай айтылады: *механикалық жүйенің бір орналасу жағдайынан екінші бір орналасу жағдайына көшу кезінде жасаған орын ауыстыруындағы кинетикалық энергиясының өзгеруі жүйеге әсер етуші барлық сыртқы және ішкі күштердің сол орын ауыстыруындағы жұмыстарының қосындысына тең болады.*

1-мысал. Салмағы $4000kH$ пойыз өрге қарай түзу сызықты, ілгерілемелі қозғалады; $tg\alpha = 0,002$. Оның қозғалысына кедергі күші пойыздың салмағының $1kH$ -ның $3H$ -ын құрайды. $750m$ жол жүргенде жылдамдығы 18 -ден $36 км/сағ$ -қа өзгереді (3.3.12-сурет).

Локомотивтің тұрақты тарту күшін анықтау керек.

Шешуі. Пойыздың ілгерілемелі қозғалысын материялық нүктенің қозғалысы ретінде қарастырып, $M_0 M_1$ орын ауыстыруында нүктенің

кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз. Осы орын ауыстыруда пойыздың жылдамдығы $v_0 = 18 \text{ км/сағ} = 5 \text{ м/с}$ - тан $v_1 = 36 \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}$ -қа өседі.

Пойызға әсер ететін күштер: локомотивтің тарту күші \overline{F}_T , пойыздың салмақ күші \overline{P} , рельстің нормаль реакция күші \overline{N} және қозғалысына кедергі күші $\overline{F}_{кед}$, ал $F_{кед} = 0,003P$.

\overline{F}_T тарту күшінің M_0M_1 орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең

$$A_1 = F_T \cdot S.$$

Пойыздың \overline{P} салмақ күшінің жұмысы, вертикаль H орын ауыстыруына байланысты және мынаған тең

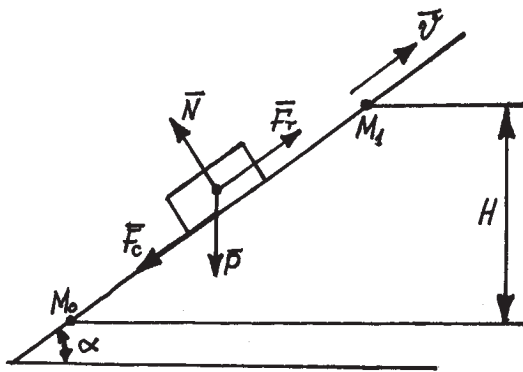
$$A_2 = -PH = -PS \sin \alpha,$$

мұндағы α -бұрышы өте аз болғандықтан $\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha$ және

$$A_2 = -PStg \alpha = -0,002PS.$$

\overline{v} жылдамдығына перпендикуляр, рельстің реакция \overline{N} күшінің жұмысы нөлге тең.

Кедергі $\overline{F}_{кед}$ күшінің M_0M_1



3.3.12-сурет

орын ауыстырғандағы жұмысы мынаған тең

$$A_3 = F_{кед} S \cos 180^\circ - F_{кед} S = -0,003PS.$$

Пойыздың $m = P/g$ массасының шамасын және барлық күштер жұмыстарының шамаларын (3.3.11.7)-теңдеуге қойып алатынымыз

$$\frac{P}{2g}(v_1^2 - v_2^2) = F_T S - 0,003PS - 0,002PS \quad \text{Локомотивтің тарту күші-}$$

нің шамасын табамыз

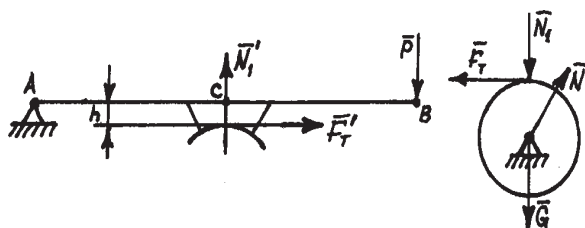
$$\begin{aligned} F_T &= \frac{P}{2g}(v_1^2 - v_2^2) + 0,005P = \\ &= \frac{40000}{2 \cdot 9,8 \cdot 750}(10^2 - 5^2) + 0,005 \cdot 40000 = 400,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2-мысал. Электр қозғаушының роторы $n_0 = 1800 \text{ айн/мин}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Ұзындығы $l = 50 \text{ см}$ иіңтірек AB негізі C тежеушіден және диаметрі $d = 50 \text{ см}$ тежеуші дискіден тұратын, тежеуші негіз оны қосқаннан кейін жұмыс істей

бастайды (3.3.13-сурет). Диск пен негіздің арасындағы үйкеліс коэффициенті $f = 0,2$, ара қашықтығы $AC = 1/4 AB$. Иіңтірек соңына $P = 50H$ күш түсірілген. Қозғаушының валымен айналатын бөлшектерінің салмағы $G = 400H$, ал айналу өсіне қатысты радиус инерциясы $\rho = 25см$. Негіз С-ның өлшемі, иіңтіректің салмағы және тіректегі үйкеліс есепке алынбайды.

Қозғаушының қанша айналыс жасап тоқтайтынын анықтау керек.

Шешуі. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз



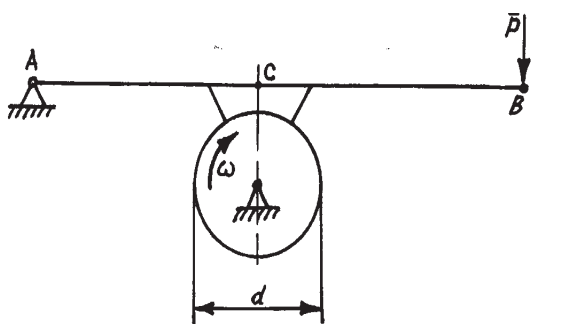
өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e .$$

Соңғы кинетикалық энергия $T = 0$, ал бастапқы кинетикалық энергия

$$T_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 .$$

Қозғаушының валына түсірілген күштердің ішінде тек үйкеліс күші $\overline{F}_{y\ddot{e}e}$ жұмыс жасайды. Ол мынаған тең



3.3.13-сурет

$$\sum_{i=1}^n A(\overline{F}_{y\ddot{e}e}) = -F_{y\ddot{e}e} \frac{d}{2} \varphi = -f N_1 \frac{d}{2} \varphi .$$

Иіңтіректің N_1 реакция күшін анықтау үшін, айналу A өсіне қатысты, тежеуші иіңтірекке түсірілген күштердің моменттер теңдеуін құрамыз

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = -P \cdot AB + N_1' \cdot AC + F_{y\ddot{e}e}' \cdot h = 0, \quad (*)$$

мұндағы, h – тежеуші негіздің биіктігі.

Әсер және қарсы әсер заңы бойынша

$$F_T = -F_T' .$$

Егер тежеуші негіздің биіктігін есепке алмасақ $h = 0$, онда (*)-теңдеуінен алатынымыз

$$N_1' = \frac{P \cdot AB}{AC} = \frac{4P \cdot AB}{AB} = 4P .$$

Әсер және қарсы әсер заңы бойынша

$$N_1' = N_1 = 4P .$$

Онда

$$O - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = -f \cdot 4P \cdot \frac{d}{2} \varphi,$$

мұндағы, $I_0 = m\rho^2 = \frac{G}{g} \rho^2$; $\varphi = 2n\pi$; $\omega_0 = \frac{n_0\pi}{30} = 60\pi \frac{1}{сек}$.

Алдыңғы теңдікті мынадай түрге келтіреміз

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \rho^2 (60\pi)^2 = 4fP \frac{d}{2} \cdot 2\pi \cdot n.$$

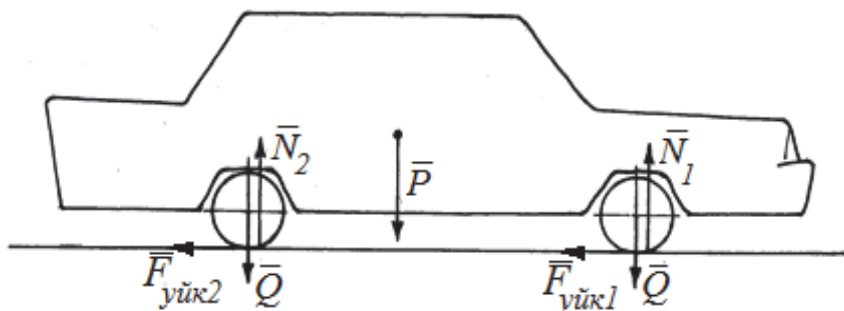
Осыдан

$$n = \frac{450G\rho^2\pi}{\lg Pd} = \frac{450 \cdot 400 \cdot 625 \cdot 3.14}{0.2 \cdot 9.81 \cdot 50 \cdot 0.5} = 700 \text{ айн.}$$

3-мысал. Егер автомобильдің моторын сөндірген уақыт мезгілінде жылдамдығы v - ға тең болса, онда түзу жолдың бойында қандай s жолын жүріп тоқтайды?

Жүргізуші және жолаушыларды бірге есептегенде автомобиль қорабының салмағы P , төрт дөңгелек әр қайсысының салмағы Q , радиусы r және массалар центрі арқылы өтетін өске қатысты инерция радиусы ρ . Дөңгелектер сырғанамай домалайды, домалау үйкеліс коэффициенті δ . Ауаның кедергі күшін және қораптың вертикаль орын ауыстыруын есепке алмаймыз (3.3.14-сурет).

Шешуі: Жүргізуші және жолаушылармен бірге автомобильді механикалық жүйе ретінде қарастырамыз. Мотор сөндірілген соң оның жұмысы нөлге тең болады, жүйедегі барлық ішкі күштер жұмыстарының қосындысы да нөлге тең.



3.3.14-сурет

Сондықтан $T - T_0 = \sum A_k^e$.

Соңғы кинетикалық энергия $T = 0$, яғни

$$-T_0 = \sum A_k^e. \quad (a)$$

Бастапқы кинетикалық энергия қорап пен дөңгелектердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең:

$$T_0 = T^\kappa + 4 \cdot T^\delta.$$

Қораптың ілгерілемелі қозғалысының кинетикалық энергиясы $T^\kappa = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$, әр дөңгелектің жазық параллель қозғалысының

кинетикалық энергиясы $T^\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{Cz} \cdot \omega^2$.

Мұндағы дөңгелектің массалар центрінің жылдамдығы $v_C = v$, дөңгелектің массалар центрі C арқылы өтетін өске қатысты инерция

моменті $J_{Cz} = \frac{Q}{g} \cdot \rho^2$.

Дөңгелек сырғанамай домалаған кезде оның лездік жылдамдықтар центрі дөңгелек пен жолдың жанасу нүктесінде орналасады.

Сонда $v_C = \omega \cdot r$ және $\omega = \frac{v_C}{r} = \frac{v}{r}$.

v_C , J_{Cz} , ω өрнектерін T^δ өрнегіне қоямыз

$$T^\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot \rho^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{Q \cdot v^2}{2g} \cdot \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Сонымен жүйенің бастапқы кинетикалық энергиясы

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot v^2 + 2 \cdot \frac{Q \cdot v^2}{g} \cdot \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) = \frac{v^2}{2g} \cdot \left[P + 4Q \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \right]. \quad (б)$$

Жүйеге түсірілген сыртқы күштер: салмақ күштері \bar{P} және \bar{Q} , жолдың нормаль реакциялары \bar{N}_1 және \bar{N}_2 , дөңгелек пен жолдың арасындағы үйкеліс күштері $\bar{F}_{үйк1}$ және $\bar{F}_{үйк2}$, олардың бағыттары мотор сөндірілген жағдайда қозғалысқа қарама-қарсы. Мұнда \bar{N}_1 және \bar{N}_2 реакция күштері дөңгелек центрінен өтетін вертикаль түзуден δ қашықтығында өтеді. Егер оларды дөңгелек центрінен өтетін вертикальда орналасқан нүктеге көшірсек, онда дөңгелектер домалауларына кедергі жасайтын моменттерді ескеру керек $M_{кед1} = -\delta \cdot N_1$ және $M_{кед2} = -\delta \cdot N_2$

Жүйеге түсірілген барлық сыртқы күштердің s орын ауыстырғандағы жұмыстарының қосындысы мынадай өрнекпен анықталады

$$\sum A_k^e = A(\bar{P}) + 4 \cdot A(\bar{Q}) + 2 \cdot A(\bar{N}_1) + 2 \cdot A(\bar{N}_2) + 2 \cdot A(\bar{F}_{\text{үйк1}}) + 2 \cdot A(\bar{F}_{\text{үйк2}}) + 2 \cdot A(M_{\text{кед1}}) + 2 \cdot A(M_{\text{кед2}}). \quad (6)$$

Есептің шарты бойынша қорап пен дөңгелектер вертикаль орын ауыстырмайды, сондықтан $A(\bar{P}) = 0$, $A(\bar{Q}) = 0$.

Әр дөңгелекке түсірілген нормаль реакция күші және үйкеліс күші дөңгелек жолмен жанасу нүктесінде түсіріледі. Дөңгелектер сырғанаусыз домалайтын жағдайда жанасу нүктесінің жылдамдығы нөлге тең, сонда әр күштің қуаты нөлге тең болады, яғни күштер жұмыстары да нөлге тең болады:

$$A(\bar{N}_1) = A(\bar{N}_2) = 0, \quad A(\bar{F}_{\text{үйк1}}) = A(\bar{F}_{\text{үйк2}}) = 0.$$

Дөңгелектер домалауларына кедергі жасайтын моменттердің жұмыстары:

$$A(M_{\text{кед1}}) = -M_{\text{кед1}} \cdot \varphi_1 = -\delta \cdot N_1 \cdot \varphi_1,$$

$$A(M_{\text{кед2}}) = -M_{\text{кед2}} \cdot \varphi_2 = -\delta \cdot N_2 \cdot \varphi_2.$$

Мұндағы дөңгелектердің айналу бұрыштарын табу үшін алдымен

бұрыштық жылдамдардың формуласын қолданамыз: $\omega_1 = \omega_2 = \frac{v_C}{r}$,

осыны dt -ға көбейтеміз $\omega_1 dt = \omega_2 dt = \frac{v_C \cdot dt}{r}$, сонда $d\varphi_1 = d\varphi_2 = \frac{ds}{r}$,

интегралдап айналу бұрышын жол арқылы таба аламыз $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{s}{r}$.

Онда кедергі моменттер жұмыстарының қосындысы келесідей анықталады

$$2 \cdot A(M_{\text{кед1}}) + 2 \cdot A(M_{\text{кед2}}) = -\delta(2N_1 + 2N_2) \cdot \frac{s}{r} = -\delta \cdot N \cdot \frac{s}{r}.$$

Мұндағы нормаль реакция күштерінің қосындысы N автомобильдің жалпы салмағына тең: $N = P + 4Q$.

Осыны ескере отырып, (6) формуласынан сыртқы күштер жұмыстарының қосындысын аламыз:

$$\sum A_k^e = -\delta(P + 4Q) \frac{s}{r}. \quad (2)$$

Енді (6) мен (2) өрнектерін (a) теңдігіне қойып, s - ке қатысты шешеміз:

$$S = \frac{rv^2 \left[P + 4Q \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) \right]}{2g\delta(P + 4Q)}.$$

Келесі сан мәндерін алайық $P = 9810 \text{ Н}$, $Q = 196 \text{ Н}$, $r = 25 \text{ см}$, $\rho = 20 \text{ см}$, $\delta = 0,1 \text{ см}$, $v = 72 \text{ км/сағ} = 20 \text{ м/с}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, сонда автомобильдің тоқтағанша дейін жүрген жолы

$$s = \frac{0,25 \cdot 20^2 \left[9810 + 4 \cdot 196 \cdot \left(1 + \frac{0,2^2}{0,25^2} \right) \right]}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,001 \cdot (9810 + 4 \cdot 196)} = 53,4 \text{ м}.$$

3.3.12 Даламбер принципі

Механикалық жүйенің нүктелеріне түсірілген инерция күштерін $\bar{R}^{ин}$ бас векторға және $\bar{M}_O^{ин}$ бас моментке келтіруге болады (O нүктесі - келтіру центрі). Механикалық жүйе үшін Даламбер принципі былай айтылады: қозғалыста болатын механикалық жүйені инерция күштерінің $\bar{R}^{ин}$ бас векторын және $\bar{M}_O^{ин}$ бас моментін қосу арқылы механикалық жүйені тыныштықта болатын жүйе ретінде қарастыруға болады. Механикалық жүйенің немесе дененің кез келген қозғалысында инерция күштерінің бас векторы $\bar{R}^{ин} = -M \bar{a}_C$. Инерция күштерінің бас моментін есептеуі дене қозғалысының түріне байланысты жүргізіледі. Дербес жағдайларды қарастырайық:

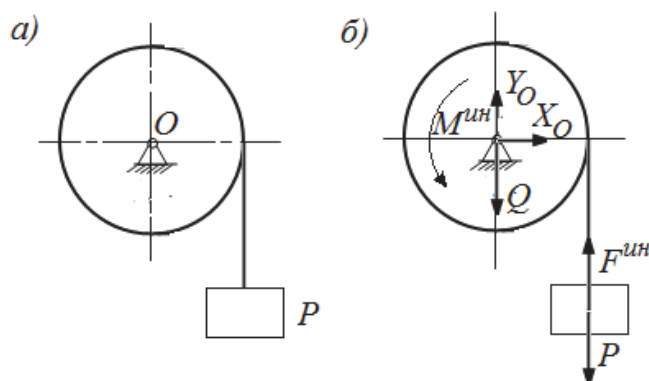
1) абсолют қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы жағдайында келтіру центрі ретінде массалар центрі алынады, сонда $\bar{M}_C^{ин} = 0$;

2) материалды симметриялық жазықтығы (мысалы, xy жазықтығы) бар абсолют қатты дене z осі төңірегінде айналатын болса, келтіру центрі ретінде симметриялық жазықтығы мен айналу осінің қиылысу нүктесі алынады, сонда инерция күштерінің бас моменті айналу осі бойымен бағытталады және $\bar{M}_O^{ин} = -J_z \bar{\varepsilon}$ формуласымен анықталады. Мұндағы J_z - дененің z осіне қатысты инерция моменті, $\bar{\varepsilon}$ - дененің бұрыштық үдеу векторы;

3) материалды симметриялық жазықтығы (мысалы, Oxy жазықтығы) бар абсолют қатты дене Oxy жазықтығында жазық-

параллель қозғалыста болса, келтіру центрі ретінде дененің массалар центрі C нүктесі алынады, сонда инерция күштерінің бас моменті симметриялық жазықтығына перпендикуляр болады және $\bar{M}_C^{ин} = -J_{Cz} \bar{\varepsilon}$ формуласымен анықталады. Мұндағы J_{Cz} - дененің Cz осіне қатысты инерция моменті болып келеді, $\bar{\varepsilon}$ - бұрыштық үдеу векторы.

Мысал. Салмағы P жүк ауырлық күш әсерінен төмен қозғалып,



3.3.15-сурет

салмағы ескерілметін жіп арқылы блокты айналу қозғалысына келтіреді. Блоктың айналу осіне қатысты инерция моменті J , радиусы r (3.3.15,а-сурет). Жүктің үдеуін табу керек.

Шешуі: Жүйеге түсірілген сыртқы күштерді көрсетеміз: ауырлық күштерді \bar{P}, \bar{Q} және

топсаның реакцияларын \bar{X}_O, \bar{Y}_O (3.3.15.б-сурет). Жүк ілгері-лемелі

қозғалыста, оның инерция күші $\bar{F}^{ин} = -\frac{P}{g} \bar{a}$, бағыты үдеуге қарама-

қарсы бағытталады. Блок тұрақты осьті айналады, оның материалдық симметриялығы бар, сондықтан блок нүктелерінің инерция күштері

бас инерция моментіне келтіріледі, момент модулі $M^{ин} = J \varepsilon = J \frac{a}{r}$

және бағыты айналу бағытына қарама-қарсы. Даламбер принципі бойынша осы күштер жүйесі тепе-теңдікте болады, оған O нүктесіне қатысты моменттер теңдеуін құруға болады

$$P \cdot r - F^{ин} \cdot r - M^{ин} = 0.$$

Мұндағы инерция күші мен инерция бас моментінің формулдарын пайдаланып, келесіні аламыз

$$P \cdot r - \frac{P}{g} a \cdot r - J \frac{a}{r} = 0$$

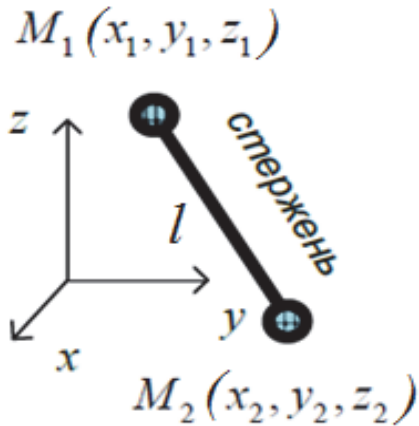
Осыдан жүк үдеуін анықтаймыз

$$a = \frac{P}{P + Jg / r^2} g.$$

3.4 Аналитикалық механиканың элементтері

3.4.1 Байланыстар және олардың классификациясы

Еркін емес механикалық жүйе нүктесінің координатасы мен жылдамдығына қойылған шектеу байланыс деп аталады. Еркін емес механикалық жүйе нүктесінің координатасы мен жылдамдығын қанағаттандыратын теңдеу байланыс теңдеуі деп аталады



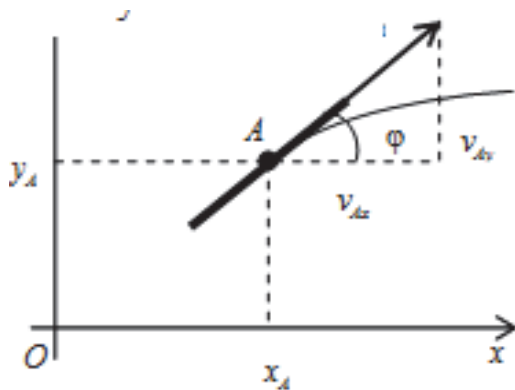
3.4.1-сурет

1-мысал. 3.4.1-суретте көрсетілген екі нүкте ұзындығы l -ге тең созылмайтын сырықпен байланысқан. Байланыс теңдеуі мынадай болады

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2, \quad (3.4.1.1)$$

мұндағы x_i, y_i, z_i – нүктенің декарттық координаттары.

2-мысал. Мұздың бетінде қозғалатын конкиді қарастырамыз. Пышағы мұзбен бір A нүктесінде жанасады делік (3.4.2-сурет). Конкидің орнын үш x_A, y_A, φ координаттар арқылы көрсетеміз. A нүктесі пышаққа перпендикуляр бағытта сырғанамайды деп есептейміз, онда оның жылдамдығы пышағының бойымен бағыттас болады,



3.4.2 сурет

шынында $\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} = \text{tg}\varphi$, осыдан

$$\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \frac{\dot{y}_A}{\dot{x}_A} = \text{tg}\varphi, \quad \text{осыдан}$$

келесі байланыс теңдеуін аламыз

$$\dot{y}_A - \dot{x}_A \cdot \text{tg}\varphi = 0. \quad (3.4.1.2)$$

Егер баланыс теңдеуіне уақыт тура кіретін болса, онда байланыс стационарлы емес, керісінше жағдайда - стационарлы деп аталады.

Егер байланыс, механикалық жүйе нүктелерінің координаттары байланыстардың шекті теңдеумен өрнектелсе, онда мұндай байланыс голономды деп аталады.

Егер байланыс интегралданатын дифференциалды теңдеумен өрнектелсе, онда байланыс голономды, ал интегралданбайтын дифференциалды теңдеумен өрнектелсе, онда байланыс голономды емес болып табылады.

Егер байланыс тек теңдеумен өрнектелетін болса, онда ол ұстайтын байланыс, ал байланыс теңдеуімен қоса теңсіздікпенде өрнектелетін болса, онда ұстамайтын байланыс деп аталады.

Келешекте тек голономды ұстайтын байланысты қарастырамыз.

3.4.2 Виртуалды орын ауыстырулар

Механикалық жүйе нүктесінің, уақыт мезетіндегі орнынан, шексіз жақын орынға уақыттың сол сәтінде, механикалық жүйе байланыстары бөгет болмайтын кез келген элементар орын ауыстыруы нүктенің виртуалды орын ауыстыруы деп аталады.

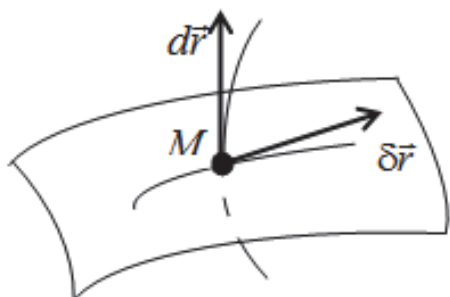
Стационар емес голономды байланысқа бағынатын механикалық жүйені қарастыралық

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (3.4.2.1)$$

Теңдеуді дифференциалдап, содан кейін вариациаласак алатынымыз

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0, \quad (3.4.2.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (3.4.2.3)$$



3.4.3-сурет

Бұл теңдеулерден нақты орын ауыстыру $d\vec{r} (dx, dy, dz)$ және $\delta\vec{r} (\delta x, \delta y, \delta z)$ әр түрлі теңдеулерді қанағаттандыратынын көреміз, сондықтан нақты орын ауыстыру, виртуалды орын ауыстырулардың ешқайсысымен дәл келмейді. Механикалық жүйенің виртуалды орын ауыстыруы деп, осы жүйенің барлық нүктелерінің виртуалды орын ауыстыруларының жиынтығы болып табылатыны есте болуы керек.

Түсінікті болу үшін мына бір мысалды қарастыралық. Еркін емес нүктені қарастыралық. Нүкте қозғалмайтын бетте тұрақты түрде жататын болсын. Уақыттың бір мезетінде, қарастырылып отырған нүктенің орны M болсын. Бұл орын радиус-векторымен анықталады, ал нүкте осы орнынан өзі жатқан кез келген көрші орынға ауыса алады.

Сәйкес виртуалды орын ауыстыру, берілген жазықтыққа жанама жазықтықта жататыны көрінеді. Нағыз орын ауыстыру виртуалды

орын ауыстырулардың біреуімен дәл келеді, өйткені бет стационар байланысты іске асырып тұр.

Осыдан кейін, виртуалды жұмыс ұғымы керек болатындықтан, олардың анықтамасын береміз. Сонымен, нүктеге түсірілген \vec{F} күшінің, өзі әсер етіп тұрған нүктенің виртуалды орын $\delta\vec{r}$ ауыстыруында сәйкес жасайтын элементар жұмысы, оның осы мезеттегі виртуалды жұмысы деп аталады. Бұл жұмысты δA арқылы белгілесек:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}. \quad (3.4.2.4)$$

Механикалық жүйе нүктелеріне түсірілген күштер жүйесінің \vec{F}_k , виртуалды орын $\delta\vec{r}_k$ ауыстыруларына сәйкес жасайтын элементар жұмыстарының қосындысы, олардың осы мезеттегі виртуалды жұмысы деп аталады, яғни

$$\delta A = \sum \vec{F}_s \cdot \delta\vec{r}_s. \quad (3.4.2.5)$$

3.4.3 Жүйенің еркіндік дәреже саны және жалпылама координаттары

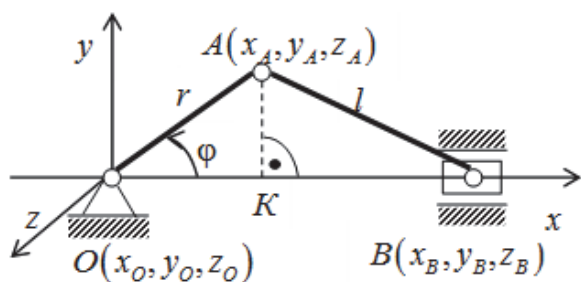
Механикалық жүйенің виртуалды орын ауыстыруы деп байланыстар босататын оның нүктелерінің кез келген виртуалды орын ауыстыру жиынтығын айтамыз. Жүйенің әр түрлі сан алуан көптеген орын ауыстыруы болады, олардың ішінен өз ара тәуелсіз орын ауыстыруды таңдап алынады, сол арқылы кез келген виртуалды орын ауыстыруы өрнектеледі. Механикалық жүйенің өз ара тәуелсіз орын ауыстыру саны оның еркіндік дәреже саны деп аталады.

d голономды байланысқа бағынатын N материалдық нүктелер жүйесін қарастырамыз. Жүйенің орны нүктелерінің $3N$ декарттық координаттарымен анықталады, оның ішінде $s = 3N - d$ тәуелсіз болады. Голономды жүйе үшін тәуелсіз координаттар саны еркіндік дәрежесімен сәйкес келеді.

Механикалық жүйе орнын жалпылама координаттар деп аталатын кез келген өзара тәуелсіз параметрлер арқылы бір мәнді анықтауға болады.

Мысал. Иіктіректі-бұлғақты механизмнің орны (3.4.4-сурет) O , A , B нүктелерімен анықталады.

Байланыстардың теңдеулерін жазамыз



3.4.4-сурет

$$x_O = 0, \quad y_O = 0, \quad z_O = 0, \quad z_A = 0,$$

$$y_B = 0, \quad z_B = 0,$$

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2, \quad (x_A - x_B)^2 + y_A^2 = l^2.$$

Мұндағы байланыстардың саны $d = 8$, нүктелердің саны $N = 3$ және жүйенің еркіндік дәреже саны $s = 3N - d = 1$. Жалпылама координат ретінде φ бұрышын қабылдаймыз, онда

$$x_A = OK = r \cdot \cos \varphi; \quad y_A = AK = r \cdot \sin \varphi,$$

$$x_B = OK + KB = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

Яғни жалпылама координат φ бұрышы жүйенің орнын бірмәнді анықтайды.

3.4.4 Еркін емес механикалық жүйе динамикасының негізгі есебі. Идеал байланыстар

Механикалық жүйе нүктелеріне түсірілген күштер актив күштер \bar{F}_k және байланыстың реакция күштері \bar{R}_k болып бөлінеді. Алдын ала белгісіз реакция күштерінен айырмашылығы, актив күштер механикалық жүйе орнына, жылдамдығына және уақытқа тәуелді функция арқылы беріледі

$$\bar{F}_k = \bar{F}_k(t, \bar{r}_k, \bar{v}_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

Жүйе қозғалысының дифференциальдық теңдеуін жазамыз

$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx} + R_{kx}, \quad m_k \ddot{y}_k = F_{ky} + R_{ky}, \quad m_k \ddot{z}_k = F_{kz} + R_{kz}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.4.4.1)$$

Еркін емес механикалық жүйе динамикасының негізгі есебі: актив күштер және нүктелерінің бастапқы орындары, жылдамдықтары байланыстарымен тығыз байланыста берілген жүйе қозғалысын анықтау.

Мұнда $6N$ белгісіздер:

$$x_k, y_k, z_k \text{ нүктелердің } 3N \text{ координаттары және } R_{kx}, R_{ky}, R_{kz}$$

байланыс реакция күштерінің проекциялары;

белгісіз шамаларды байланыстыратын скалярлық қатынастардың саны $3N + d$;

$3N$ (3.4.4.1) теңдеулері және d байланыс теңдеулері. Барлық байланыстарды идеал деп санап, алуға болатын $6N - (3N + d) = 3N - d = s$ қатынас болуы қажет.

Байланыс идеалды деп аталады, сол жағдайда егер оның кез келген орнында жүйенің кез келген виртуалды орын ауыстырғанда байланыс реакция күштері жұмыстарының қосындысы нөлге тең

болса

$$\sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0 \text{ немесе } \sum_{k=1}^N (R_{kx} \delta x_k + R_{ky} \delta y_k + R_{kz} \delta z_k) = 0. \quad (3.4.4.2)$$

$3N$ вариация $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ координаттарының ішінде $3N - d = s$ тәуелсіз. (3.4.4.2) теңдеуінде $3N - s = d$ тәуелді вариацияларды тәуелсіздер арқылы өрнектеп және тәуелсіз вариациялардың коэффициенттерін нөлге теңестіріп, қажетті s қатынасты аламыз.

Идеал байланыстың мысалына бетінде қозғалатын материалдық нүктені және қозғалмайтын жылтыр бетті келтіруге болады. Мұнда бетке нормаль бойымен реакция күші бағытталады, ал кез келген виртуалды орын ауыстыру векторы бетке M нүктесі арқылы жүргізілген жанама жазықтығында жатады, скалярлық көбейтіндісі $\bar{R} \cdot \delta \bar{r} = 0$.

Жылтыр бет идеал болады сонда тек сонда, егер ол қозғалатын немесе деформацияланатын болса.

Идеалды байланысқа үйкеліс болмайтын топса, деформацияланбайтын салмақсыз сырық, АҚД ішкі байланыстары т.б. жатады. Үйкеліс күшін есепке алмайтын жағдайда, үйкеліс күшінің нормаль құраушысын актив күш қатарына жатқызуға болады. Ары қарай барлық байланыстарды идеалды деп есептейміз.

3.4.5 Жалпылама күш

Орны q_1, q_2, \dots, q_s берілуімен біртекті анықталатын механикалық жүйені қарастырамыз. Нүктенің радиус-векторын q_1, q_2, \dots, q_s және t арқылы өрнектейміз

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, \dots, q_s, t), \quad k = \overline{1, N} \quad (3.4.5.1)$$

және вариацияның радиус-векторын анықтаймыз

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \cdot \delta q_j, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.4.5.2)$$

Қандай да $\delta \bar{r}$ – де барлық актив күштердің жұмыстарының қосындысын анықтаймыз

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k. \quad (3.4.5.3)$$

(3.4.5.3) и (3.4.5.2) формулаларынан қосындының ретін өзгерте отырып, алатынымыз

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (3.4.5.4)$$

Белгілеулер енгіземіз

$$Q_j = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, s}, \quad (3.4.5.5)$$

Онда (3.4.5.4) теңдігі келесі түрде жазылады

$$\delta A = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j. \quad (3.4.5.6)$$

δq_j -ның алдындағы коэффициентіне тең Q_j шаманы жүйе актив күштерінің виртуалды жұмыстарының q_j жалпылама координаттарына сәйкес жалпылама күштері деп атайды. Жалпылама күштеді анықтау үшін, жүйеге тек қана бір жалпылама координаты өзгертін виртуалды орын ауыстыру беріледі. Сәйкес жалпылама күшке актив күш жұмыстарының қосындысы есептеледі

$$Q_j = \frac{\delta W_j}{\delta q_j}. \quad (3.4.5.7)$$

3.4.6 Динамиканың жалпы теңдеулері

Келешекте орны q_1, q_2, \dots, q_s арқылы анықталатын, мінсіз және голономды байланыстарымен N нүктелерден тұратын механикалық жүйені қарастырамыз. Жүйенің әр нүктесі үшін келесі теңдеуді жазуға болады

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k \quad \text{немесе} \quad \bar{F}_k - m_k \bar{a}_k + \bar{R}_k = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.4.6.1)$$

Жүйеге уақыт мезетін белгілеп алып және радиус-векторы $\delta \bar{r}_k$ өсімшесін алатын виртуалды орын ауыстыру береміз. (3.4.5.8)-дің әр теңдеуін $\delta \bar{r}_j$ -ге скалярлы көбейтіп және алынған көбейтінділерді қосамыз

$$\sum_{k=1}^N (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.4.6.2)$$

Байланыс мінсіз болғандықтан соңғы қосынды нөлге тең, онда

$$\sum_{j=1}^N (\bar{F}_k - m_k \bar{a}_k) \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.4.6.3)$$

Мұндағы $-m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^u$ — k -ы материалық нүктенің инерция күші, $\bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \delta A_k^a$, $\bar{F}_k^u \cdot \delta \bar{r}_k = \delta A_k^u$ — актив және инерция күштерінің жұмыстары, онда (3.4.6.3)-ті келесіше жаза аламыз

$$\sum_{k=1}^N \delta A_k^a + \sum_{k=1}^N \delta A_k^u = 0. \quad (3.4.6.4)$$

Бұл динамиканың жалпы теңдеуі: *мінсіз байланыстағы жүйенің қозғалысы кезінде кез келген виртуальды орын ауыстыруында кез келген уақыт мезетінде актив және инерция күштерінің жұмыстарының қосындысы нөлге тең*. Динамиканың жалпы теңдеуі мінсіз байланыстар құрамына кірмейтін динамиканың жалпы теңдеуін алуға мүмкіндік береді. Ол кез келген еркіндік дәреже сандағы жүйе үшін пайдалануға болады. Жүйенің еркіндік дәреже саны үлкен болғанда Лагранждың 2-текті теңдеулерін пайдаланған ыңғайлы болады.

3.4.7 Лагранждың 2-текті теңдеулері

Лагранждың 2-текті теңдеулерін қорытып шығару қарастырылады:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = \overline{1, s}. \quad (3.4.7.1)$$

Дифференциалдаудан кейін осы теңдеулердің сол жағына t , q_k , \dot{q}_k және \ddot{q}_k шамалары кіреді. Жалпылама Q_k күші t , q_k , \dot{q}_k параметрлеріне тәуелді болады. Яғни Лагранждың теңдеулері 2-ретті дифференциалдық теңдеулердің s жүйесін құрайды және барлық жүйенің реті $2s$ -ке тең. Бұл жүйе дифференциалдық теңдеулерінің ең кіші мүмкіндік реті.

(3.4.7.1)-ді интегралдап механикалық жүйе қозғалысын толық анықтайтын $q_k = q_k(t)$, $k = \overline{1, s}$ тәуелділігін алуға мүмкіндік береді. Сонымен қатар механикалық жүйе еркін емес болғанда мінсіз байланыс реакция күшін анықтауға болады. (3.4.5.1)-ге $q_i(t)$ тәуелділігін қойып $\bar{r}_k = \bar{r}_k(t)$, $k = \overline{1, N}$ тәуелділігін аламыз, оларды дифференциалдау арқылы барлық нүктелердің жылдамдықтарын және үдеулерін анықтаймыз. Ары қарай (3.4.6.1)-дан алатынымыз

$$\bar{R}_k = m_k \bar{a}_j - \bar{F}_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (3.4.7.2)$$

3.4.8 Виртуалды орын ауыстыру принципі

Механикалық жүйенің қажетті де жеткілікті шарттарын виртуалды орын ауыстыру қағидасы ұйымдастырады: *мінсіз, голономды, стационарлы және ұстап тұратын байланыстарға бағынатын қандай да бір жүйенің орны, тепе-теңдік орны болуы үшін жүйенің барлық нүктелерінің бастапқы жылдамдықтары*

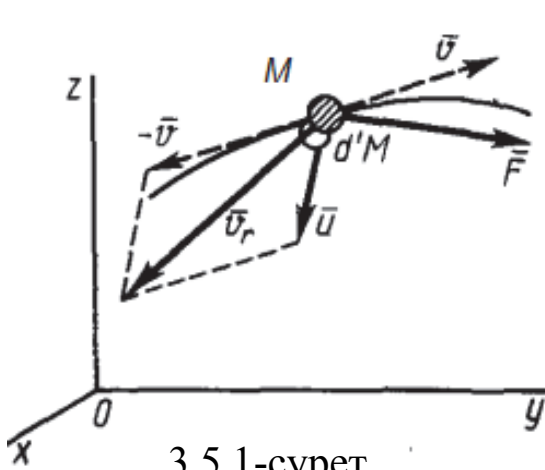
нөлге тең болуы және берілген орнынан оның кез келген виртуалды орнын ауыстырғанда барлық актив күштер жұмыстарының қосындысы нөлге тең болуы қажетті де жеткілікті, яғни

$$\bar{v}_k(t_0) = 0, \quad \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (3.4.8.1)$$

3.5 Айнымалы массалы материалдық нүкте қозғалысы. Циолковский есебі

3.5.1 Айнымалы массалы материалдық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуі

Айнымалы массалы нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін, күштердің байланыссыз заңдылығын және механикалық жүйе қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы пайдаланып



3.5.1-сурет

аламыз. Мұнда нүктеге түсірілген күштен басқа нүктеден бөлініп шыққан $d'M$ бөлшектен туындайтын күш әсер етеді.

dt уақыт өсімшесінде $d\bar{v}$ жылдамдығының жалпы өзгеруі тұрақты масса үшін \bar{F} күшінің әсерінде $d\bar{v}_1$ жылдамдығының өзгеруінен және \bar{F} күші болмағандағы нүктенің массасы өзгергенде туындайтын $d\bar{v}_2$ жылдамдығы

өзгерісінің қосындысы болып табылады. Айнымалы массасы M нүктені қарастырайық. \bar{F} күшінің әсерінде dt уақыт өсімшесінде массасы тұрақты нүктенің жылдамдығы келесі шамаға өзгереді

$$d\bar{v} = \frac{\bar{F}}{M} dt, \quad (3.5.1.1)$$

dt уақыт аралығында \bar{F} күшінің әсері болмағанда оның массасының өзгеруінен болатын нүктенің $d\bar{v}_2$ жылдамдығының өзгеруі массасы тұрақты механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема арқылы анықталады.

Механикалық жүйенің айнымалы масса нүктелерінен құрастырылғандықтан және одан бөлінетін бөлшектер сыртқы күштің әсеріне тәуелсіз, онда оның қозғалыс мөлшері тұрақты шама болады. Бөлінетін бөлшектермен бірге нүктелердің өз ара әсерлерінің ішкі

күштері өзгермейді. Жүйенің қозғалыс мөлшерінің сақталу заңынан алатынымыз

$$\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+dt}. \quad (3.5.1.2)$$

dt уақыт өсімшесінде айнымалы массалы нүкте мен одан $d'M$ массасымен бөлініп шығатын бөлшектердің тек өзара әсерлерін есепке аламыз, нүктеге және алдын ала бөлініп шыққан бөлшекке әсерін ескермейміз (3.5.1-сурет). *Охуз* координаттар жүйесіне қатысты қозғалатын t уақыт мезетінде массасы $M(t)$ бір ғана нүктені қарастыратын болғандықтан $\bar{Q}_t = M \cdot \bar{v}$ -ны аламыз.

$t + dt$ уақыт мезетінде сол *Охуз* координаттар жүйесіне қатысты жылдамдығы $\bar{v} + d\bar{v}_2$ болатын массасы $(M - d'M)$ нүкте және жылдамдығы \bar{u} массасы $d'M$ бөлініп шыққан бөлшектер бар болады. $t + dt$ уақыт мезетінде олардың қозғалыс мөлшерін анықтаймыз

$$\bar{Q}_{t+dt} = (M - d'M) \cdot (\bar{v} + d\bar{v}_2) + \bar{u} \cdot d'M.$$

$d'M \cdot \bar{v}_2 \approx 0$ екенін ескере отырып (3.5.1.2) теңдігін ауыстыра отырып, алатынымыз

$$d\bar{v}_2 = -\frac{d'M}{M} \cdot (\bar{u} - \bar{v}).$$

$d'M > 0$ болғанда немесе, $d'M$ таңбасы енгізіп (онда $d'M < 0$), алатынымыз

$$d\bar{v}_2 = -\frac{d'M}{M} \cdot (\bar{u} - \bar{v}). \quad (3.5.1.3)$$

(3.5.1.1) және (3.5.1.2) теңдіктерін немесе $d\bar{v} = d\bar{v}_1 + d\bar{v}_2$ ескеріп жалпы жылдамдықтың өзгеруін келесі түрде жазамыз

$$d\bar{v} = \frac{\bar{F}}{M} \cdot dt + \frac{dM}{M} \cdot (\bar{u} - \bar{v}).$$

Ауыстырулардан кейін Мещерскийдің (1897ж.) қозғалыс дифференциальдық теңдеуін аламыз

$$M \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{M} \cdot (\bar{u} - \bar{v}). \quad (3.5.1.4)$$

Егер *Охуз* координаттар жүйесіне қатысты ілгерілемелі қозғалатын қозғалмалы координаттар жүйесімен айнымалы массалы нүктені байланыстырсақ, онда массасы dM бөлініп шыққан бөлшектің абсолют \bar{u} жылдамдығы жылдамдықтарды қосу теоремасы бойынша төмендегідей түрде жазылады $\bar{u} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$.

Мұндағы $\bar{v}_e = \bar{v}$. және $\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}$ бөлініп шыққан бөлшектің салыстырмалы жылдамдығы.

(3.5.1.4) теңдігіне $\bar{v}_r = \bar{u} - \bar{v}$ шамасын қойып алатынымыз

$$M \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dM}{M} \cdot \bar{v}_r. \quad (3.5.1.5)$$

Егер $\bar{\Phi}_r = \frac{dM}{M} \cdot \bar{v}_r$ деген белгілеу енгізсек, онда (3.5.1.5) теңдігі

келесі түрде жазылады

$$M \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi}_r. \quad (3.5.1.6)$$

$\bar{\Phi}_r$ шамасы реактив күш деп аталады, ал dM/dt массаның өзгеру жылдамдығы болып табылады. Ол бірлік уақытта нүкте массасының өзгеруін сипаттайды, мысалы 1 секундта. Сондықтан реактивті күш нүктенің секундтағы өзгеруін айнымалы массалы нүктеден бөлініп шыққан бөлшектің салыстырмалы жылдамдығына көбейткенге тең.

Нүктенің массасы кеміген жағдайда уақыт өзгеруіне байланысты dM/dt шамасы теріс, көбейетін болса – оң болады. Нүктенің массасы одан бөлшек бөлініп шығатын болғандықтан реактивті күш $\bar{\Phi}_r$ бөлініп шыққан бөлшектің \bar{v}_r салыстырмалы жылдамдығының бағытына қарсы, ал нүкте массасы көбейгенде dM/dt шамасы нөлден үлкен және реактивті күш $\bar{\Phi}_r$ салыстырмалы \bar{v}_r жылдамдықтың бағытымен бағытталады. Реактивті қозғалтқыш dM/dt массасының өзгеру жылдамдығы теріс және массаның секундтағы жоғалуына тең болады, ал қозғалтқыштың қалдық шығатын тесігінен шығатын газдың \bar{v}_r жылдамдығы болады. Реактивті күш қалдық шығатын тесігінен шығатын газдың жылдамдығына қарсы бағытталған тарту күші болып табылады.

(3.5.1.6) теңдігін тік бұрышты координаттар жүйесіне проекциалап келесі теңдіктерді аламыз

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x + \Phi_{rx}, \quad M \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y + \Phi_{ry}, \quad M \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z + \Phi_{rz}. \quad (3.5.1.7)$$

Айнымалы массалы материалдық нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеуін материалдық нүкте және айнымалы массалы жүйе үшін жалпы теоремалардан қорытып шығаруға болады.

3.5.2 Циолковскидің екі есебі

Циолковскидің бірінші есебі. Тек қана бір реактивті күштің әсерінде «еркін кеңістікте» айнымалы массалы нүкте түзу сызықты қозғалыста болсын делік. Бөлініп шыққан бөлшектің салыстырмалы \bar{v}_r жылдамдығы тұрақты және айнымалы массалы нүкте қозғалысының жылдамдығы бағытына қарама-қарсы бағытталған деп санаймыз (3.5.2-сурет). (3.5.1.5) теңдігін Ox өсіне проекциалап алатынымыз

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = - \frac{dM}{M} \cdot v_r.$$

Айнымалыларды ажыратып және интегралдап алатынымыз

$$M \cdot \int_{v_0}^v dv = - \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}.$$

мұндағы \bar{v}_0 және M_0 – бастапқы жылдамдығы (реактивті күш бағытымен бағытталған) және сәйкес бастапқы массасы.

Интегралдап, алатынымыз

$$v = v_0 + v_r \cdot \ln \frac{M_0}{M}. \quad (3.5.2.1)$$

Нүктенің (ракетаның) массасы тек жанбаған бөлігінің M_p массасынан тұратын және сұйықтың массасын m арқылы белгілеп, жаныстың соңын сипаттайтын шаманы (3.5.2.1)-ге қойып, жанып болғанан кейінгі v_1 жылдамдығы үшін алатынымыз

$$v_1 = v_0 + v_r \cdot \ln \frac{m}{M_p}.$$

Циолковский $Z = m/M_p$ санын енгізіп,

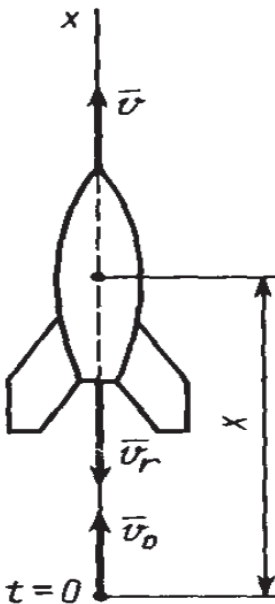
Циолковскидің формуласын аламыз

$$v_1 = v_0 + v_r \cdot \ln Z. \quad (3.5.2.2)$$

Осыдан, v_1 жылдамдығы массалардың өзгеруіне тәуелсіз болатынын көреміз.

Жанып болғаннан кейінгі жылдамдығын көбейтуді, реактивтік қозғалтқыш сопласынан шығатын газдың жылдамдығын көбейту арқылы, немесе көпсатылы ракетаның лақтырылатын Z санын көбейту арқылы іске асыруға болады.

Нүкте қозғалысының теңдеуін анықтау үшін (3.5.2.1)-ден алатынымыз



3.5.2-сурет

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + v_r \cdot \ln \frac{M_0}{M},$$

немесе, $x = 0$, $t = 0$ бастапқы уақыт мезетінде, $x = 0$ болатынын ескеріп, интегралдау амалын орындап, алатынымыз

$$x = v_0 \cdot t + v_r \int_0^t \ln \frac{M_0}{M} dt. \quad (3.5.2.3)$$

Массаның түзу сызықты өзгеру заңдылығы үшін келесі теңдікті жазуға болады

$$M = M_0 (1 - \alpha \cdot t), \quad (3.5.2.4)$$

мұндағы $\alpha = const$ – көлемдік салмақ, M_0 – бастапқы уақыт мезетіндегі массасы.

Масса өзгерісінің көрсеткіштік өзгеру заңдылығы үшін мынадай тәуелділік ұйымдастырамыз

$$M = M \cdot e^{\alpha \cdot t}. \quad (3.5.2.5)$$

(3.5.2.4)-ті массаның түзу сызықты өзгеру заңдылығы үшін (3.5.2.3)-ты интегралдау амалын орындап, келесі қозғалыс теңдеуін аламыз

$$x = v_0 \cdot t + \frac{v_r}{\alpha} \cdot [(1 - \alpha \cdot t) \cdot \ln(1 - \alpha \cdot t) + \alpha \cdot t]. \quad (3.5.2.6)$$

(3.5.2.5)-ке сәйкес масса өзгерісінің көрсеткіштік өзгеру заңдылығы үшін

$$x = v_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot v_r \cdot t^2}{2}. \quad (3.5.2.7)$$

Атап өтуге болады, (3.5.2.4)-ті массаның сызықтық өзгеру заңдылығы үшін, егер $v_r = const$ болса, онда $(-dM/dt) = \alpha \cdot M_0 = const$, $\Phi_r = (-dM/dt) \cdot v = \alpha \cdot M_0 \cdot v_r = const$ болады.

Көрсеткіштік заңдылық үшін секундтық массаның жойылуы және реактивті күш айнымалы болып табылады, ал нүктеге түсірілген реактивтік Φ_r күші әсерінде болатын айнымалы массалы нүктенің үдеуі тұрақты болады, яғни

$$a_r = \Phi_r / M = \alpha \cdot v_r = const$$

Циолковскидің екінші есебі. Егер айнымалы массалы нүкте (ракета) жерге жақын тік сызық бойымен қозғалса, онда $g = const$ және ауаның кедергісін ескермей, сонымен қатар Циолковскидің бірінші есебінің барлық жуықтауларын ескере отырып, келесі нүкте

қозғалысының дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$M \cdot \frac{dv}{dt} = -M \cdot g - \frac{dM}{dt} \cdot v_r.$$

Интегралдау амалын пайдаланып, алатынымыз

$$v = v_0 - g \cdot t + v_r \cdot \ln \frac{M_0}{M}.$$

Егер нүктенің орнын бастапқы орнынан бастайтын болсақ, онда x үшін массаның сызықтық заңдылық кезінде алатынымыз

$$x = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} + \frac{v_r}{\alpha} \cdot [(1 - \alpha \cdot t) \cdot \ln(1 - \alpha \cdot t) + \alpha \cdot t]. \quad (3.5.2.7)$$

Масса өзгерісінің көрсеткіштік заңдылығы үшін алатынымыз

$$x = v_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot v_r \cdot t^2}{2}.$$

3.6 «Динамика» бөлімі бойынша есептер

3.6.1-есеп. Пойыз массасы локомотивті санамағанда $2 \cdot 10^5$ кг тең.

Горизонталь жолмен тең үдемелі қозғалып, қозғалыс басталуынан 60 с өткенде, пойыз 15 м/с тең жылдамдыққа ие болды. Үйкеліс күші поезд салмағынан 0,005 бөлігін құрайды. Локомотив пен пойыз арасындағы күшті анықтау керек.

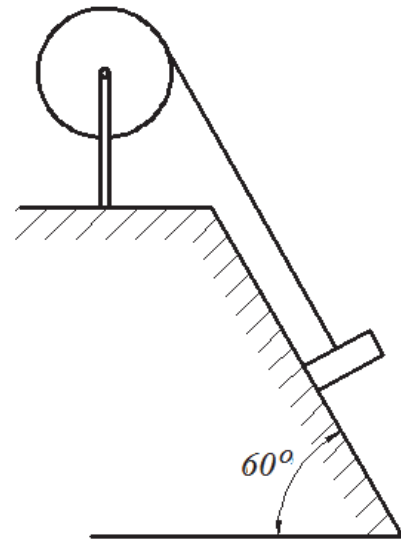
Жауабы: 59800 Н.

3.6.2-есеп. Массасы $M=600$ кг жүк блок көмегімен көлбеу жазықтық үстімен көтерілуде. Жүк пен жазықтық арасындағы үйкеліс күш коэффициенті $f=0,2$. Радиусы 0,2 м блок $\varphi=0,4t^3$ заңы бойынша айналады (φ радианмен өлшенеді). Арқанның тартылыс күшін уақыт функциясы түрінде анықтау керек.

Жауабы: $(5,68+0,288t)$ кН.

3.6.3-есеп. Массасы 50 кг дене жіпке ілінген. Жіптің жоғарғы шеті тең үдемелі төмен қозғалып, $t=2$ с ішінде 5 м жол жүреді. Жіптің тартылыс күшін анықтау керек.

Жауабы: 615 Н.



3.6.1-есепке сурет

3.6.4-есеп. Массасы $0,2 \text{ кг}$ дене ұзындығы 1 м жіп шетіне ілінген. Денені түртіп жібергенде, ол 5 м/с тең горизонталь жылдамдығына ие болды. Жіптің тартылыс күшін түрткі соңында анықтау керек.

Жауабы: $6,96 \text{ Н}$.

3.6.5-есеп. Массасы 1000 кг автомобиль дөңес көпір үстінде тұрақты 10 м/с жылдамдығымен қозғалуда. Көпір ортасындағы қисықтық радиусы $\rho=50 \text{ м}$. Автомобиль көпір ортасын өткенде оның көпірге түсірген қысымын анықтау керек.

Жауабы: 7800 Н .

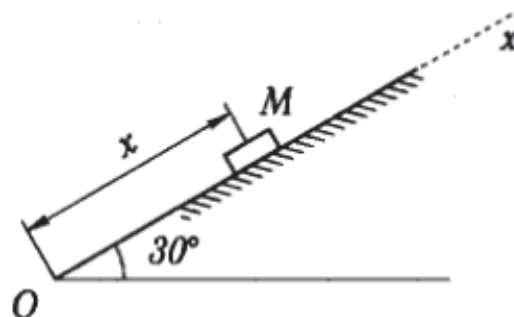
3.6.6-есеп. Массасы m материялық нүкте $F=F_0 \cos \omega t$ күш әсерінен түзу сызық бойымен қозғалады (F_0, ω – тұрақты шамалар). Бастапқы уақыт мезгілінде нүктенің жылдамдығы v_0 . Нүктенің қозғалыс теңдеуін анықтау керек.

Жауабы: $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_0 t$.

3.6.7-есеп. Массы 2 кг дене вертикаль жоғары 20 м/с жылдамдығымен лақтырылып жіберілді. Денеге әсер ететін ауаның кедергі күші дене жылдамдығына пропорционалды және $v \text{ м/с}$ жылдамдығы үшін $0,4v \text{ Н}$ тең. Дене ең жоғарғы орнына жететін уақыт мезгілін анықтау керек.

Жауабы: $1,71 \text{ с}$.

3.6.8-есеп. Массы $m=100 \text{ кг}$ дене көлбеу жазықтық бойымен жоғары қарай бағытталған айнымалы $F=120(6+t) \text{ Н}$ күш әсерінен қозғалады. Сырғанау үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Қозғалыс тыныштық күйден басталғанын ескеріп, $t=3 \text{ с}$ уақыт мезгілінде дененің жылдамдығын анықтау керек.



3.6.8-есепке сурет

Жауабы: $9,75 \text{ м/с}$.

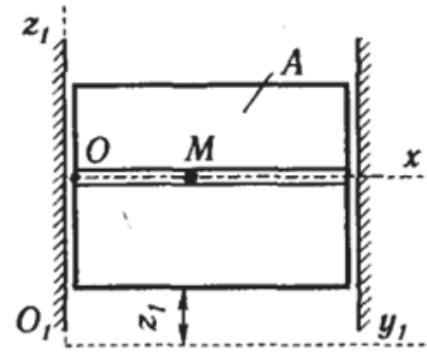
3.6.9-есеп. Массасы m материялық нүкте xOy горизонталь жазықтығында координат басынан қағажыту $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$ күші әсерінен қозғалады (\vec{r} - нүктенің радиус-векторы). Нүктенің бастапқы орны $M_0(a, 0)$, бастапқы жылдамдығы v_0 тең және y осіне параллель. Нүктенің траекториясын анықтау керек.

Жауабы: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ (гипербола).

3.6.10-есеп. Массасы $0,5 \text{ кг}$ материялық нүкте вертикаль жоғары бағытталған $v_0=6 \text{ м/с}$ бастапқы жылдамдығына ие болып қозғалады. Ауаның кедергі күші $R=0,002gv^2$ (өлшем бірліктері: жылдамдық - м/с , еркін түсу үдеуі - м/с^2 , күш - Н). Нүктенің қандай биіктікке көтерілетінін анықтау керек.

Жауабы: $1,72 \text{ м}$.

3.6.11-есеп. A денесі $z=2t^2 \text{ м}$ теңдеуі бойынша вертикаль жоғары қозғалады. Дене үстіндегі құбырда орналасқан M шаригі оң жаққа қарай бағытталған 3 м/с тең бастапқы жылдамдығына ие болып қозғалады. Шарик пен құбыр арасындағы сырғанау үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Шариктің құбыр ішінде қозғалыс теңдеуін анықтау керек.



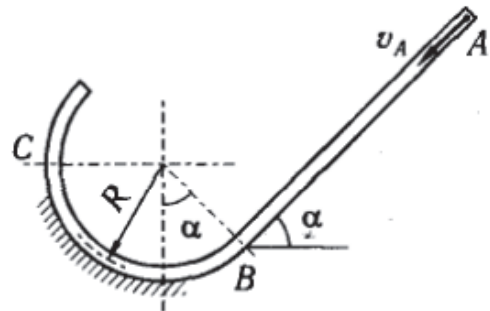
3.6.11-есепке сурет

Жауабы: $x=3t - 0,69 t^2 \text{ м}$.

3.6.12-есеп. Массасы 1 кг жүк ұзындығы $0,5 \text{ м}$ жіпке ілінген. Бастапқы уақыт мезгілінде жүкті вертикальдан 60° бұрышына ауытқып, оған вертикаль жазықтықта жіпке перпендикуляр төмен бағытталған $2,1 \text{ м/с}$ тең жылдамдық берілді. Жүк ең төмен орнын алғанда жіптің керілу күшін және жүк содан көтерілетін биіктігін анықтау керек.

Жауабы: $28,4 \text{ Н}, 47,5 \text{ см}$.

3.6.13-есеп. Массасы $0,2 \text{ кг}$ түйіршік құбыр ішінде A орнынан $v_A=3 \text{ м/с}$ бастапқы жылдамдығымен қозғалады. Үйкеліс күшін ескермей, түйіршіктің B, C орналасуында жылдамдықтарын және оның C орналасуында құбырға түсіретін қысымын анықтау керек. Берілгені:



3.6.13-есепке сурет

$R=3 \text{ м}, \alpha=45^\circ, AB$ аралығында қозғалу уақыты $t=4 \text{ с}$.

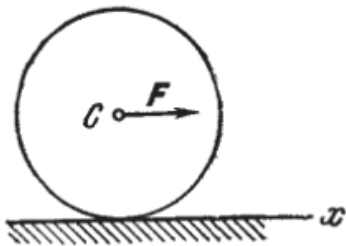
Жауабы: $v_B=16,9 \text{ м/с}, v_C=15,6 \text{ м/с}, N=16,3 \text{ Н}$.

3.6.14-есеп. Массасы 70 кг парашютшы ұшақтан секіріп, 100 м ұшқан соң парашютын ашады. Парашют ашылған соң 5 с уақыт аралығында парашютшының жылдамдығы $4,3 \text{ м/с}$ дейін азаяды. Ауаның кедергі күшін ескермей, парашютшы ілінген парашют арқандарының тартылыс күшін анықтау керек.

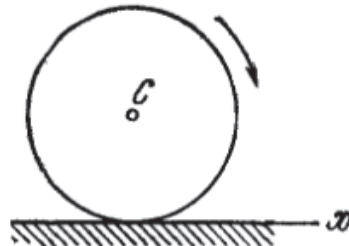
Жауабы: 1246 Н .

3.6.15-есеп. Дөңгелек тыныштық күйден F күш әсерінен горизонталь түзу бойымен сырғанап домалайды. Сырғанау үйкеліс коэффициенті f , дөңгелек салмағы P , күш $F=5fP$ тең болғанда дөңгелектің C массалар центрінің қозғалыс заңын анықтау керек.

Жауабы: $x_C = 2fgt^2$.



3.6.15-есепке сурет



3.6.16-есепке сурет

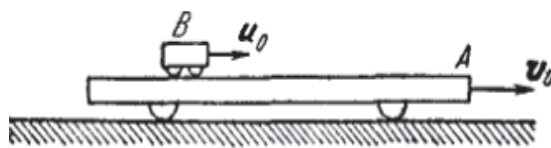
3.6.16-есеп. Дөңгелек тыныштық күйден оған түсірілген момент әсерінен горизонталь түзу бойымен сырғанап домалайды. Сырғанау үйкеліс коэффициенті f болғанда дөңгелектің C массалар центрінің қозғалыс заңын анықтау керек.

Жауабы: $x_C = fgt^2 / 2$.

3.6.17-есеп. Массасы 2 кг граната 15 м/с жылдамдығымен ұшып келе жатқанда, ауада екі бөлікке жарылады. Массасы 8 кг сынықтың жылдамдығы қозғалыс бағыты бойымен 25 м/с дейін өсті. Екінші сынық жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: 5 м/с , бағыты бірінші сынық қозғалысына қарсы.

3.6.18-есеп. Горизонталь A платформасы инерция бойынша v_0 жылдамдығымен, ал оның үстінде B арбасы тұрақты u_0 салыстырмалы жылдамдығымен қозғалады. Бір уақыт мезгілінде арба тежеуленеді. Арба тоқтаған соң платформа мен арбаның ортақ v жылдамдығын анықтау керек. Берілгені: M – платформа массасы, m – арба массасы.



3.6.18-есепке сурет

Жауабы: $v = v_0 + \frac{m}{M + m} u_0$.

3.6.19-есеп. Маховик тыныштық күйден тұрақты айналдырушы $M_{\text{айн}}=75 \text{ Нм}$ момент әсерінен қозғалады. Маховиктің айналу осіне қатысты инерция моменті $J=15 \text{ кгм}^2$. Кедергіні ескермей, маховик $n=150 \text{ обор/мин}$ айналу жиілігіне ие болатын уақыт мезгілін анықтау керек.

Жауабы: $\pi \text{ с}$.

3.6.20-есеп. Радиусы $r=20$ см және массасы $m=3$ кг шкив белдік арқылы қозғалысқа келіп, $\varepsilon=1,5$ рад/с бұрыштық үдеуімен айналады. Белдіктің жетекші және жетектегі тармақтарының тартылыс күштері $T_1=10$ Н және $T_2=5$ Н. Шкивті біртекті цилиндр ретінде қарастырып, кедергі күштер моментін анықтау керек.

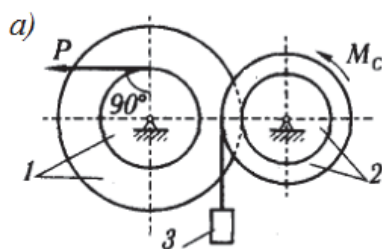
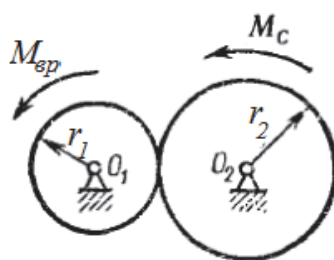
Жауабы: $0,91$ Нм.

3.6.21-есеп. Массасы $m=2$ кг, диаметрі $d=0,8$ м және тұтас диск түріндегі шкив инерция бойынша $\omega_0=10$ рад/с бұрыштық жылдамдығымен айналады. Шкив орнатылған білікті тоқтату үшін шкивке $Q=5$ Н күшімен тежегіш қалыпын сықпалады. Қалып және шкив арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,4$. Білік массасын және білік мойынтіректеріндегі үйкелісті ескермей, білік тоқтайтын уақыт мезгілін және оның тоқтағанша жасайтын айналым санын анықтау керек.

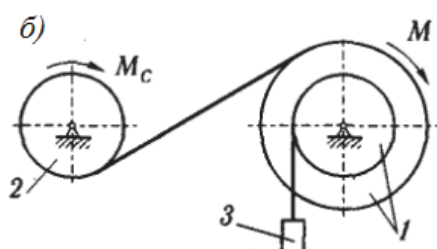
Жауабы: $6,28$ с, $15,7$ айналым.

3.6.22-есеп. Тісті беріліс екі тісті дөңгелектен тұрады, олардың радиустері r_1 және r_2 , осьтік инерция моменттері J_1 және J_2 . Бірінші дөңгелекке тұрақты айналдырушы $M_{\text{айн}}$ моменті, ал екінші дөңгелекке кедергі күштердің $M_{\text{кед}}$ моменті түсірілді. Бірінші дөңгелектің ε_1 бұрыштық үдеуін және дөңгелектердің ортақ нүктесінде олардың өзара әсер ететін S жанама күшін анықтау керек. Берілгені: $M_{\text{кед}}=M_{\text{айн}}/4$, $r_2=2r_1$, $J_1=J_2=J$.

Жауабы: $\varepsilon_1 = 0,7 \frac{M_{\text{айн}}}{J}$, $S = 0,3 \frac{M_{\text{айн}}}{r_1}$.



3.6.22-есепке сурет



3.6.23-есепке сурет

3.6.23-есеп. 3 жүгінің үдеуін келесі деректер үшін анықтау керек:

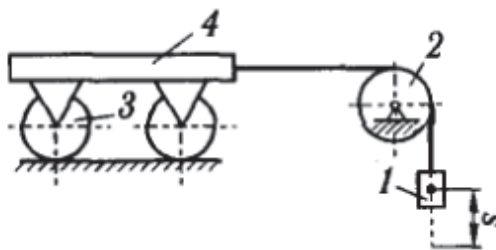
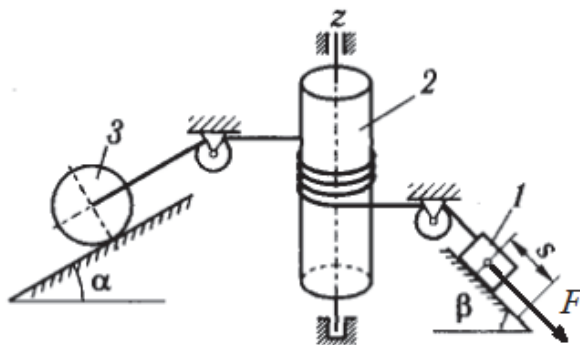
а) қозғалту күші $P=2500\text{ Н}$, кедергі момент $M_{\text{кед}}=50\text{ Нм}$, денелер массалары $m_1=20\text{ кг}$, $m_2=10\text{ кг}$, $m_3=30\text{ кг}$, дөңгелектер радиустері $R_1=50\text{ см}$, $r_1=20\text{ см}$, $R_2=40\text{ см}$, $r_2=25\text{ см}$ және олардың айналу осьтеріне қатысты инерция радиустері $i_{1z}=i_{2z}=30\text{ см}$;

б) қозғалту моменті $M=600\text{ Нм}$, кедергі момент $M_{\text{кед}}=100\text{ Нм}$, денелер массалары $m_1=30\text{ кг}$, $m_2=20\text{ кг}$, $m_3=40\text{ кг}$, дөңгелектер радиустері $R_1=60\text{ см}$, $r_1=40\text{ см}$, $R_2=30\text{ см}$ және олардың айналу осьтеріне қатысты инерция радиустері $i_{1z}=50\text{ см}$, $i_{2z}=30\text{ см}$.

Жауабы: а) $5,36\text{ м/с}^2$; б) $2,57\text{ м/с}^2$.

3.6.24-есеп. Механикалық жүйе тыныштық күйден l жүгіне түсірілген тұрақты $F=20\text{ Н}$ күші әсерінен қозғалады. Денелер массалары $m_1=4\text{ кг}$, $m_2=8\text{ кг}$, $m_3=5\text{ кг}$. 2 дене біртекті тұтас цилиндр болып келеді, сырғанаусыз домалайтын 3 дөңгелектің массасы шеткі жиегімен үлестіріледі, сырғанау үйкеліс коэффициенті $f=0,1$, бұрыштар $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$. Жіп салмақсыз және созылмайды, дөңгелек домалауына кедергі моменті және мойынтіректердегі үйкеліс күштері ескерілмейді. l жүктің жүрген жолы $s=1\text{ м}$ болғанда оның жылдамдығын анықтау керек.

Жауабы: $v_1 = 1,65\text{ м/с}$.



3.6.24-есепке сурет

3.6.25-есепке сурет

3.6.25-есеп. Механикалық жүйе тыныштық күйден ауырлық күштер әсерінен қозғалады. l дененің жылдамдығын дене жүрген s жолына тәуелдігін анықтау керек. Денелер массалары $m_1=m$, $m_2=m/2$,

$m_3=m/8$, $m_4=m/2$. Блок және арбаның төрт дөңгелегі біртекті дискілер ретінде алынады, жіп салмақсыз және созылмайды, қозғалысқа кедергілер ескерілмейді.

Жауабы: $v_1 = 2\sqrt{gs/5}$.

3.6.26-есеп. Диаметрі 60 мм білікке диаметрі 50 см маховик орнатылған, оның айналу жиілігі 180 айн/мин. Жетек өшірілген соң маховик тоқтағанша 90 айналым жасағаны белгілі. Білік пен мойынтіректер арасындағы сырғанау үйкеліс коэффициентін анықтау керек. Маховик массасы оның жиегі бойымен үлестіріледі, білік массасы ескерілмейді.

Жауабы: $f=0,07$.

3.6.27-есеп. Велосипедші 9 км/сағ жылдамдығына ие болып, педальды айналдырмай қозғалғанда оның тоқтағанша жүретін жолын анықтау керек. Велосипедші мен велосипедтің ортақ массасы 80 кг, әр дөңгелек массасы 5 кг тең және радиусы 50 см шеңбер бойымен үлестіріледі. Дөңгелектердің жер үстінде домалауға кедергі коэффициенті 0,5 см.

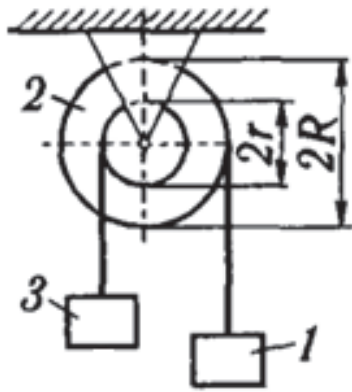
Жауабы: 35,6 м.

3.6.28-есеп. Түзу горизонталь жолмен келе жатқан автомобиль жылдамдығы мотор қуатын арттыру себебінен v_1 мәнінен v_2 мәніне дейін өседі, сол кезде автомобиль жүрген жолы s . Әр дөңгелек салмағы P_1 және радиусы r , кузов салмағы P_2 , дөңгелектердің домалау үйкеліс коэффициенті f_k . Дөңгелектер сырғанаусыз домалайды, олар біртекті тұтас диск ретінде алынады. Дөңгелек пен кузовтан басқа тетіктердің кинетикалық энергиясы ескерілмейді. Мотордың s орын ауыстыру кезінде жасаған жұмысын анықтау керек.

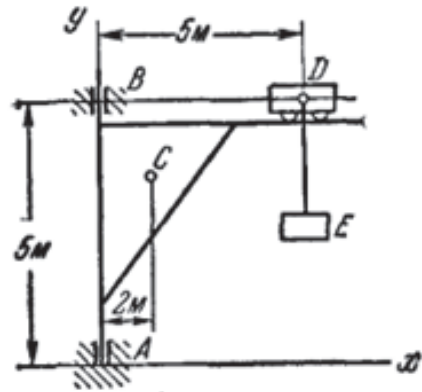
Жауабы: $A = \frac{6P_1 + P_2}{2g} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{f_k}{r} (4P_1 + P_2) s$.

3.6.29-есеп. Механикалық жүйе ауырлық күштер әсерінен қозғалысқа келеді. Денелердің массалары $m_1=2$ кг, $m_2=4$ кг, $m_3=5$ кг, блок радиустері $r=0,2$ м, $R=0,4$ м және айналу осіне қатысты инерция радиусы $i_z=0,3$ м. Блоктың бұрыштық үдеуін және оның бағытын анықтау керек.

Жауабы: 2,23 рад/с², бағыты сағат тілі жүрісіне қарама-қарсы.



3.6.29-есепке сурет

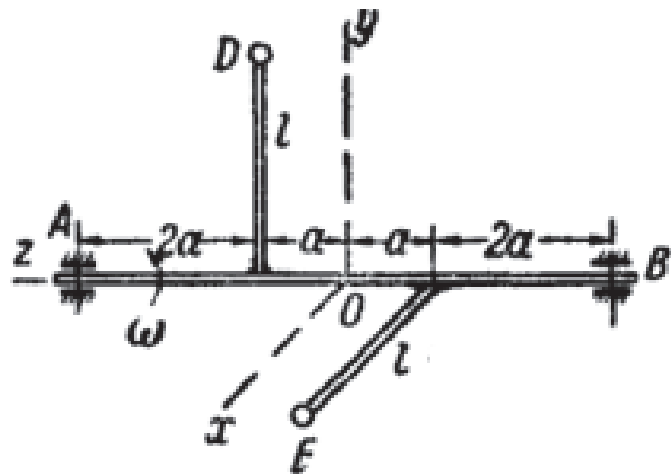


3.6.30-есепке сурет

3.6.30-есеп. Массасы 3 т тең E жүгі $g/3$ үдеуімен көтерілген жағдайда кран мойынтіректерінің реакцияларын анықтау керек. Кран массасы 2 т және оның ауырлық күші C ауырлық центрінде түсірілді, D арбасының массасы $0,5\text{ т}$. Өлшемдер суретте көрсетілген.

Жауабы: $X_A = -X_B = 52,1\text{ кН}$, $Y_A = 24,5\text{ кН}$.

3.6.31-есеп. Тұрақты ω бұрыштық жылдамдығымен айналатын горизонталь AB білігіне екі бірдей және өзара перпендикуляр жазықтықтарда орналасқан l ұзындығымен сырықтар білікке перпендикуляр тіркелген. Сырықтар шеттерінде m массаларымен D және E шарлары орналасқан.



1.6.31-есепке сурет

Сырықтар массаларын ескермей, біліктің A және B тіректерінің динамикалық реакцияларын анықтау керек.

Жауабы: $N_A = N_B = \frac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$.

4 Есептеу-графикалық жұмыс тапсырмалары, орындауға қойылатын жалпы талаптар және оларға әдістемелік нұсқаулар

«Теориялық механика» пәнінің кредиттер санына сәйкес, мамандықтардың оқу жоспары бойынша 2, 3 немесе 4 есептеу-графикалық жұмыс орындайды.

Тапсырма он сұлба және он нұсқа арқылы берілген. Студент тапсырманы орындау үшін, сәйкес суретте көрсетілген сұлба номерін сынақ кітапшасы бойынша соңғы цифрымен, ал шарттың номері сәйкес кестеден соңғы цифрдың алдындағы цифрымен қабылдайды. Мысалы, сынақ кітапшасындағы шифры 96472 студент, әрбір есепте 2–сұлбаны және кестеден 7– шарттың номерін қабылдайды. 2, 3, 5, 8, 12-тапсырмаларда сұлба және шарт номерін оқу журналындағы тізім номерін қабылдайды.

Есептеу-графикалық жұмысты біржола тапсырар алдында әрбір жұмысты түптеу керек. Орындалған жұмыс түсіндірме жазбасынан және графикалық бөлімінен тұрады. Жұмыс форматы А4 ақ қағазда мұқият орындалуы қажет: жұмыс мұқабадан, есептің берілгенінен, есептеудің орындалуынан, графикалық тұрғызулардан, қорытындыдан тұрады. Жұмыс қабылданған нормалар бойынша безендіріліуі қажет (СТП 768-01-07-97); түсіндірме жазбасы парақтың бір жағында болуы керек және ЕГЖ басында мазмұны, соңында пайдаланған әдебиеттер тізімі келтірілуі қажет. Жұмыстың графикалық, есептеу және түсіндірме жазба бөлімдерін компьютер көмегімен де орындауға болады.

Есепті шешуге кіріспес бұрын студент сәйкес теориялық тақырыптармен дәріс, оқулықтар және оқу құралдары бойынша, осы әдістемелік нұсқауда көрсетілген есепті шығару мысалдарымен танысуы қажет.

Орындалған ЕГЖ-ны студенттер қорғауы қажет. Жұмысты қорғау үшін тақырып бойынша 2-3 сұраққа жауап беруі немесе жеке жағдайда ұқсас есеп шығаруы қажет.

4.1-тапсырма. Жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігі

Қатаң жақтау (рама) A нүктесінде жылжымайтын топса арқылы, ал B нүктесінде шеттерінде топсалары бар салмақсыз BB_1 сырық немесе жылжымалы топса арқылы бекітілген (4.1.1-сурет). Жақтаудың C нүктесіне шығыр (блок) арқылы асылған және ұшында

салмағы $P = 25 \text{ Н}$ болатын жүгі бар трос байланған. Жақтауға моменті $M = 100 \text{ Ні}$ болатын қос күш және мәндері, бағыттары, түсу нүктелері 4.1.1-кестеде көрсетілген екі күш әсер етеді (мысалы, №1 нұсқада жақтауға K нүктесінде горизонталь өспен 30° бұрыш жасай $F_1 = 10 \text{ Н}$ күші және H нүктесінде горизонталь өспен 60° бұрыш жасай $F_4 = 40 \text{ Н}$ күші түсірілген).

Берілген жүктемелері әсерінен туындайтын A және B нүктелеріндегі байланыс реакция күштерін анықтау керек.

Нұсқау. 4.1-тапсырма жазық күштер жүйесі әсер еткендегі қатты дененің тепе-теңдігі қарастырылады. Егер екі реакция күші бір нүктеде қиылысатын болса, онда тепе-теңдік теңдеуін құрғанда осы нүктеге қатысты моменттер теңдеуі (белгісіз шамалар саны құрамында аз болатын) қарапайым болады (берілген жағдайда A нүктесіне қатысты). \bar{F} күшінің моментін есептегенде, иіндері жеңіл анықталатын \bar{F}' және \bar{F}'' құраушы күштерге жіктеп (құраушы күшері өстерге параллель болатындай) және Вариньон теоремасын пайдаланған дұрыс; онда $M_o(\bar{F}) = M_o(\bar{F}') + M_o(\bar{F}'')$.


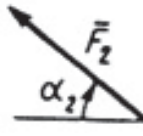
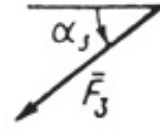
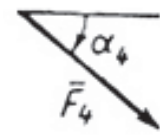
4.1-тапсырма мысалы. Қатаң тілімше $ABCD$ (4.1.2-сурет) A нүктесінде қозғалмайтын, ал B нүктесінде қозғалмалы топсалар көмегімен бекітілген. Барлық өлшемдер және әсер етуші күштер суретте көрсетілген.

Берілгені: $F = 25 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18 \text{ кН}$, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50 \text{ кНі}$, $\beta = 30^\circ$, $l = 0,5 \text{ і}$.

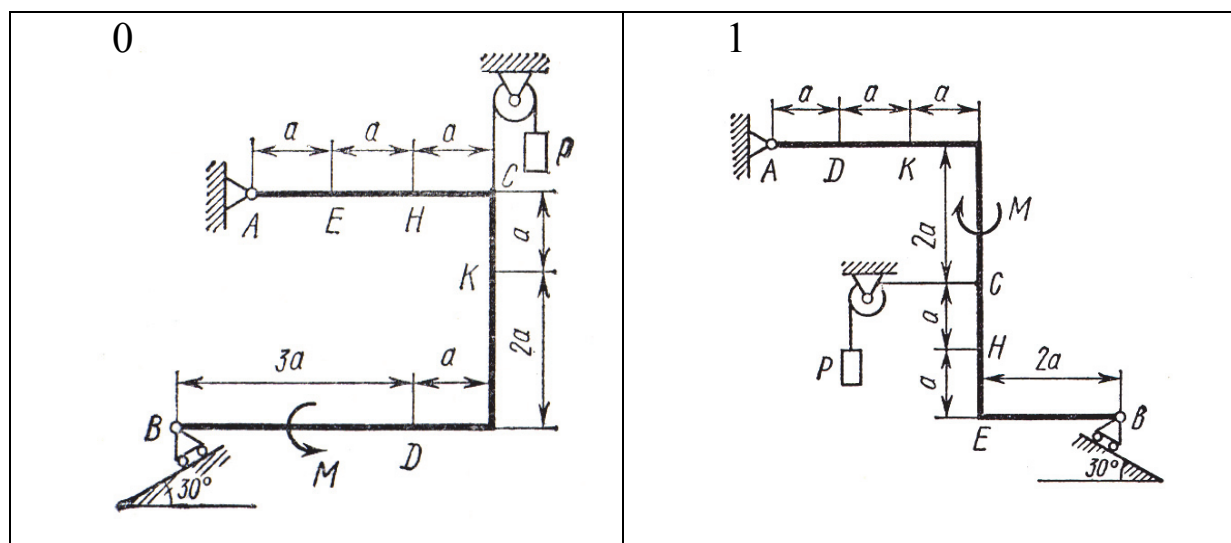
Табу қажет: сыртқы күштер әсерінен туындайтын A және B нүктелеріндегі реакция күштерін.

Шешуі. Тілімшенің тепе-теңдігін қарастырайық. x, y координаттар өстерін жүргіземіз және тілімшеге әсер етуші барлық күштерді көрсетеміз.

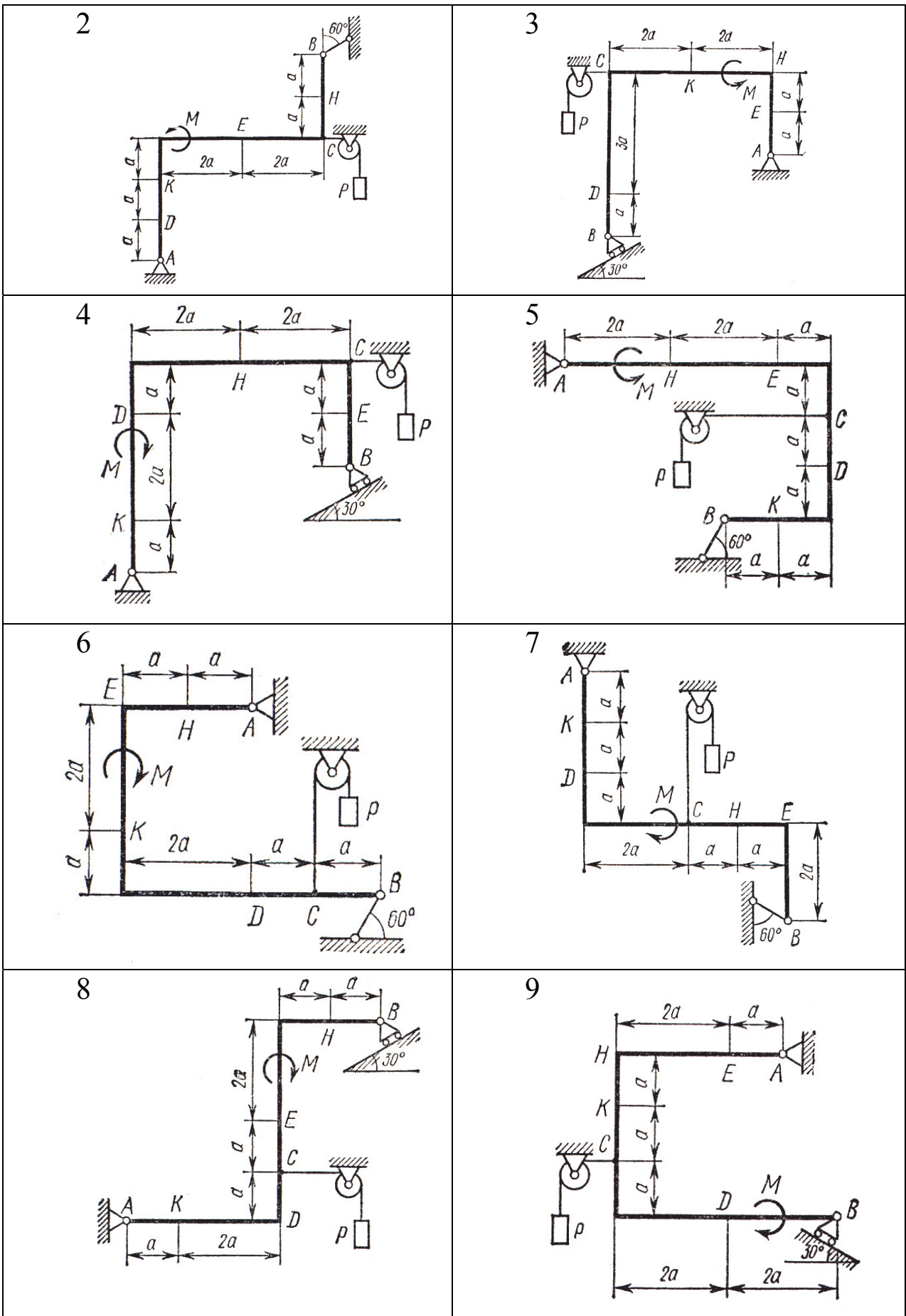
4.1.-кесте

Күштер				
	$F_1 = 10 \text{ Н}$	$F_2 = 20 \text{ Н}$	$F_3 = 30 \text{ Н}$	$F_4 = 40 \text{ Н}$
Шарттың номері	Түсу нүктесі α_1^0	Түсу нүктесі α_2^0	Түсу нүктесі α_3^0	Түсу нүктесі α_4^0

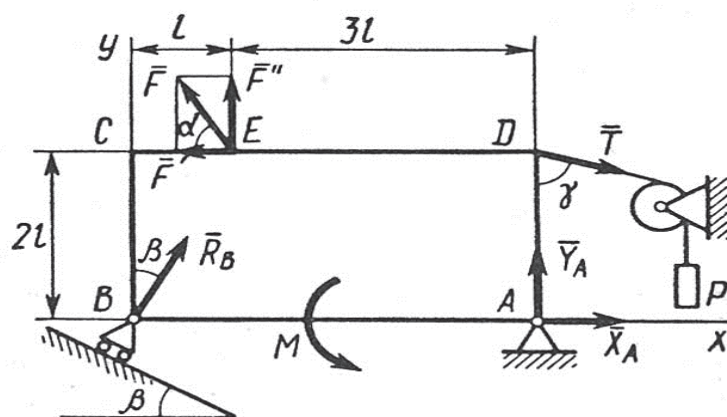
0	–		<i>D</i>	60	<i>E</i>	45	–	–
1	<i>K</i>	0	–	–	–	–	<i>H</i>	0
2	–	–	<i>H</i>	45	<i>K</i>	30	–	–
3	<i>D</i>	0	–	–	–	–	<i>E</i>	30
4	–	–	<i>K</i>	30	<i>E</i>	60	–	–
5	<i>H</i>	0	–	–	<i>D</i>	30	–	–
6	–	–	<i>E</i>	30	–	–	<i>K</i>	45
7	<i>D</i>	45	–	–	<i>H</i>	60	–	–
8	–	–	<i>H</i>	60	–	–	<i>D</i>	30
9	<i>E</i>	30	–	–	–	–	<i>K</i>	60



4.1.1-супер



4.1.1- суреттің жалғасы



4.1.2-сурет

Олар: \bar{F} күші, моменті M болатын қос күш, арқанның керуші күші \bar{T} (шамасы жөнінен $T = P$) және $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ байланыстардың реакция күштері (A нүктесіндегі қозғалмайтын топса реакция күшін екі құраушыға жіктейміз, ал қозғалмалы топсаның реакция күшін тірелу жазықтығына перпендикуляр бағыттаймыз).

Алынған жазық күштер жүйесі үшін үш тепе-теңдік теңдеулерді құрамыз. \bar{F} күшінің A нүктесіне қатысты моментін анықтағанда Вариньон теоремасын пайдаланамыз, яғни \bar{F} күшін \bar{F}', \bar{F}'' құраушы күштерге жіктейміз ($F' = F \cos \alpha, F'' = F \sin \alpha$) және $M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}') + M_A(\bar{F}'')$ формуласын ескереміз. Алатынымыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \cdot \sin \beta - F \cdot \cos \alpha + T \cdot \sin \gamma = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cdot \cos \beta + F \cdot \sin \alpha - T \cdot \cos \gamma = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cdot \cos \beta \cdot 4l + F \cdot \cos \alpha \cdot 2l - F \cdot \sin \alpha \cdot 3l - T \cdot \sin \gamma \cdot 2l = 0.$$

Осы теңдеулер жүйесіне берілген шамалардың сан мәндерін қойып, шешімін тауып белгісіз реакция күштерін анықтаймыз.

Жауабы : $X_A = -8,5 \text{ kH}$, $Y_A = -23,3 \text{ kH}$, $R_B = 7,3 \text{ kH}$. \bar{X}_A және \bar{Y}_A реакция күштерінің алдындағы теріс таңбалары 4.1.2-суретте көрсетілген бағыттарына қарама-қарсы бағытталаынын көрсетеді. Шешімнің дұрыстығын тексеру үшін, қандай да басқа бір нүктеге қатысты моментер теңдеуін, мысалы барлық күштердің E немесе D

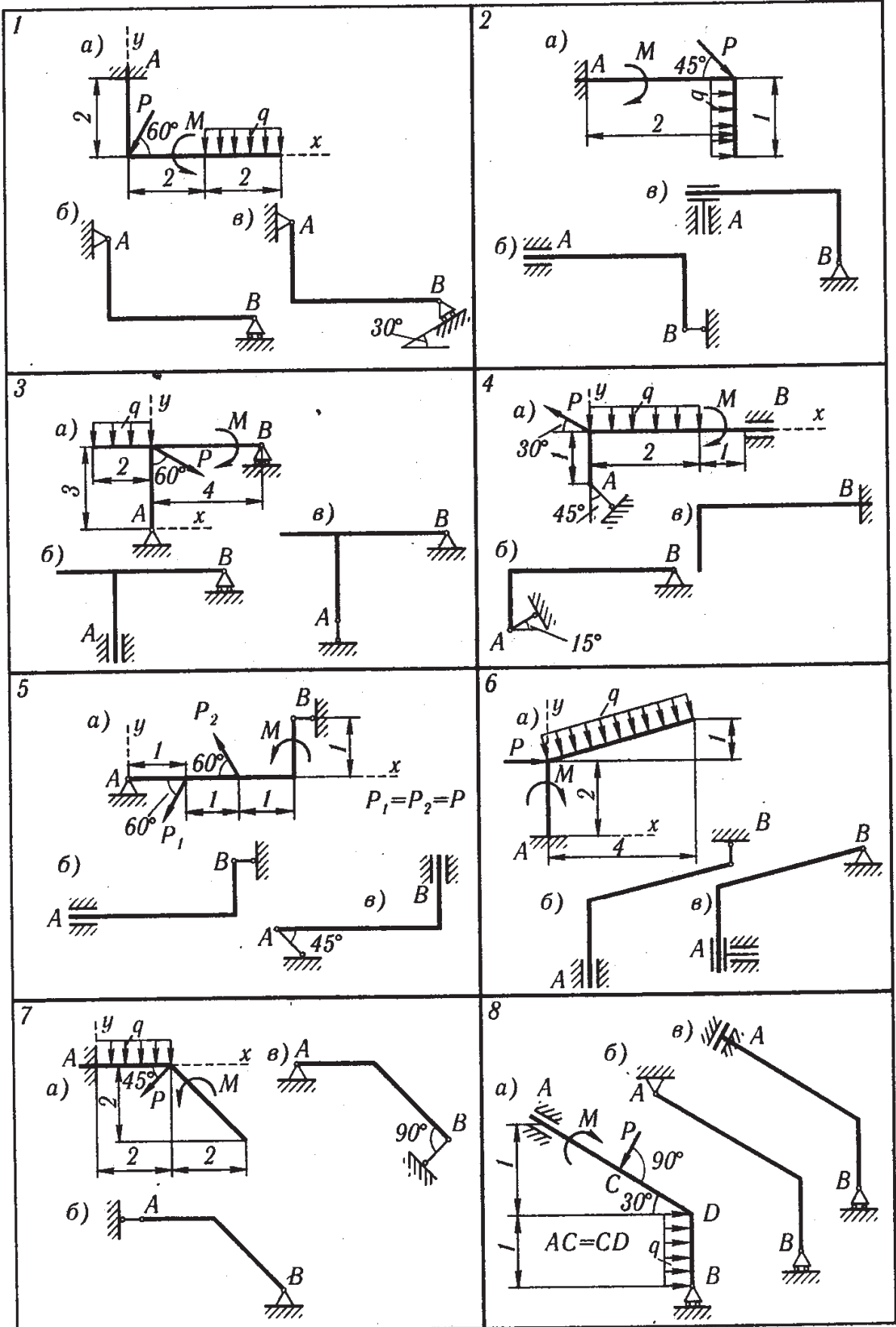
нүктесіне қатысты моменттерінің қосындысы түріндегі теңдеуді, пайдалану кажет.

4.2-тапсырма. Қатты дененің байланыс реакцияларын анықтау

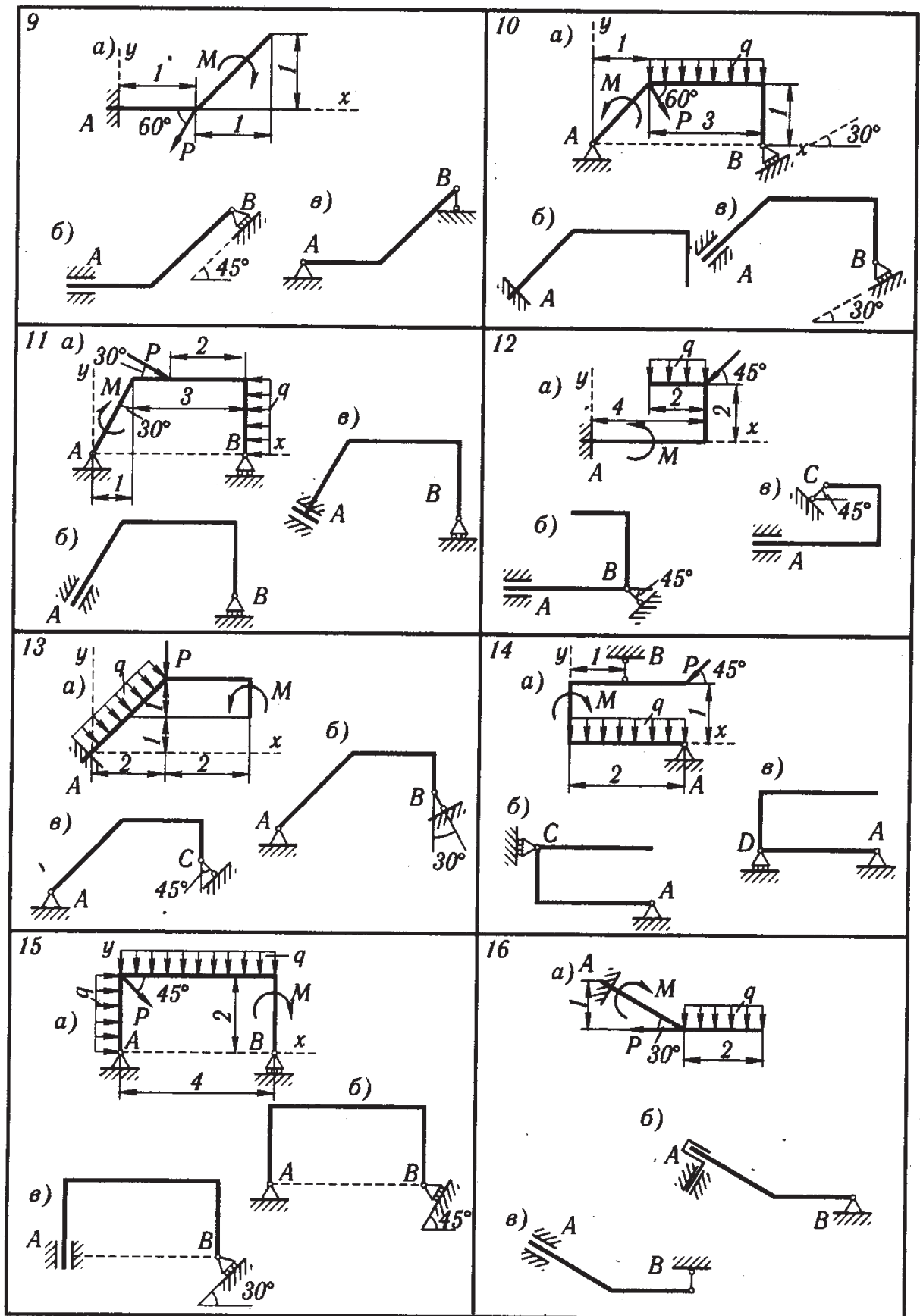
Сұлбаларда (4.2.1-сурет) әрбір шарт үшін қатаң жақтаудың (рама) үш қосылыс тәсілдері көрсетілген. Берілген жүктемелер және өлшемдер барлық үш жағдайлар үшін бірдей.

4.2.1-кесте

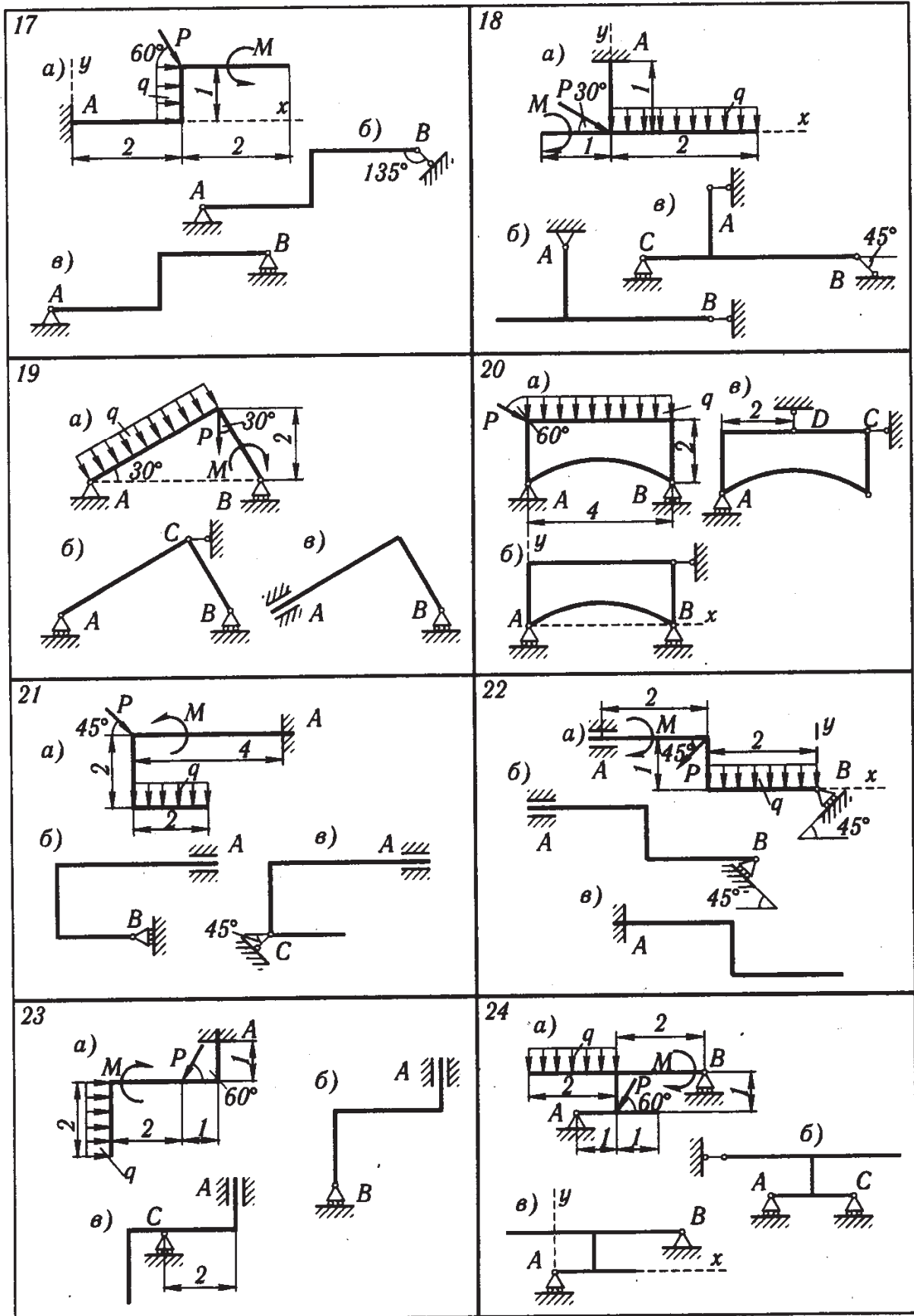
Шарттың номері	$P, кН$	$M, кНм$	$q, кН/м$	Зерттелетін реакция	Шарттың номері	$P, кН$	$M, кН м$	$q, кН/м$	Зерттелетін реакция
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	Y_A
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	R_B
5	10	4	-	X_B	20	10	-	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	R_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	-	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	R_A	25	10	10	2	X_A
11	4	10	1	R_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	-	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	R_B



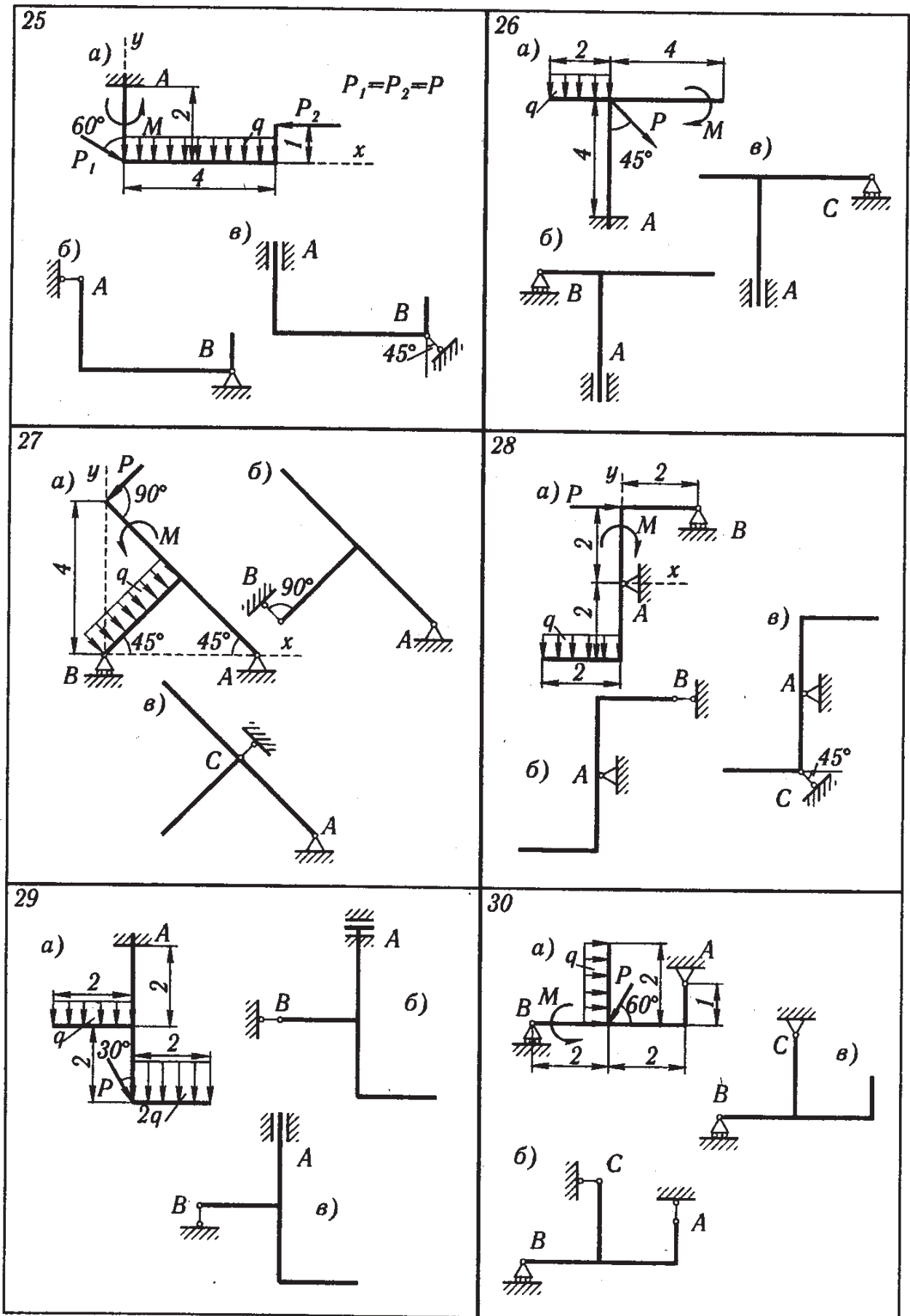
4.2.1-сурет



4.2.1-суреттің жалғасы

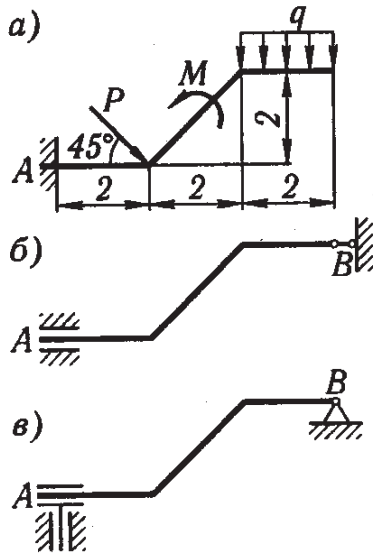


4.2.1-суреттің жалғасы

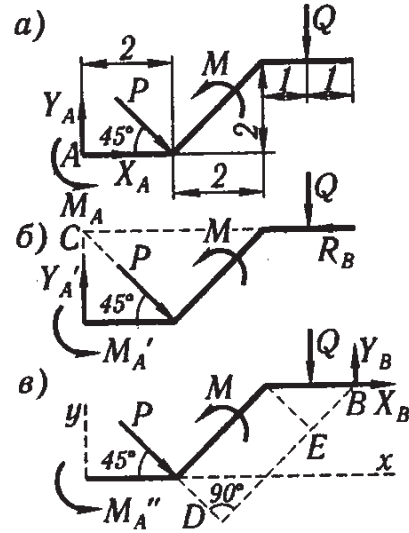


4.2.1-суреттің жалғасы

4.2.1-кестеде көрсетілген ең кіші реакция күші шамасына сәйкес болатын жақтаудың қосылыс тәсілі үшін тіректердің реакция күштерін анықтау қажет.



4.2.2-сурет



4.2.3-сурет

4.2-тапсырма мысалы. Берілгені: қатаң жақтаудың қосылыс сұлбасы (4.2.2.а,б,в-сурет); $P = 5 \text{ kH}$, $M = 8 \text{ kHm}$, $q = 12 \text{ kH/м}$. Ең кіші реакция күші модуліне сәйкес болатын қатаң жақтаудың қосылыс тәсілі үшін реакция күштерін анықтау қажет.

Шешуі. Қатаң жақтауға түсірілген күштер жүйесін қарастырамыз. Байланыстардың жақтауға әсерін олардың реакция күштерімен ауыстырамыз (4.2.3-сурет): а сұлбасында $-X_A, Y_A, M_A$, б сұлбасында $-X'_A, M'_A, R_B$, в сұлбасында $-M''_A, X_B, Y_B$.

Бірқалыпты таралған жүктеменің тең әсерлі күшін табу үшін, ұзындықтың бір өлшеміне келетін q – ді ұзындыққа көбейтеміз

$$Q = q \cdot 2 = 2,4 \text{ kH}.$$

Қайсы жағдайда қатаң байланыстың моменті ең кіші болатынын білу үшін, қалған реакция күштерді анықтамас бұрын, барлық үш сұлба үшін оны табамыз.

а сұлбасы үшін

$$\sum M_{kA} = 0, \quad M_A - P \cdot 2 \sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0.$$

Осы теңдеуден M_A -ны табамыз

$$M = 11,07 \text{ kHm}.$$

б сұлбасы үшін

$$\sum M_{kC} = 0, \quad M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \quad \text{және} \quad M'_A = 4,00 \text{ кНм.}$$

в сұлбасы үшін

$$\sum M_{kB} = 0, \quad M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \quad \text{және} \quad M''_A = -31,61 \text{ кНм.}$$

мұндағы,

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4,24 \text{ м.}$$

Сонымен, қатаң байланыстың ең кіші моменті белбеу қосылысының б сұлбасында. Осы сұлба үшін қалған реакция күштерін анықтаймыз

$$\sum X_k = 0, \quad P \cos 45^\circ - R_B = 0.$$

Осы теңдеуден

$$R_B = 3,54 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_k = 0, \quad Y'_A - P \sin 45^\circ - Q = 0.$$

Осы теңдеуден

$$Y'_A = 5,94 \text{ кН.}$$

Есептеу қорытындысы 4.2.2-кестеде келтірілген.

4.2.2-кесте

4.2.3-суреттегі сұлба бойынша	Момент $M_A (M'_A, M''_A) \text{ кНм}$	Күштер, кН	
		Y'_A	R_B
а	11,07	-	-
б	4,00	5,94	3,54

4.3-тапсырма. Құрылымдар жүйесінің байланыс реакция күштерін анықтау

Құрылым екі бөліктен тұрады (4.3.1-сурет). 4.3.1-кестеде көрсетілген құрылым бөліктерінің ең кіші реакция күшінің модуліне сәйкес болатын қосылыс тәсілін және осы қосылыс шарттары үшін байланыс реакция күштерін, сонымен қатар С топсасының реакция күшін анықтау қажет.

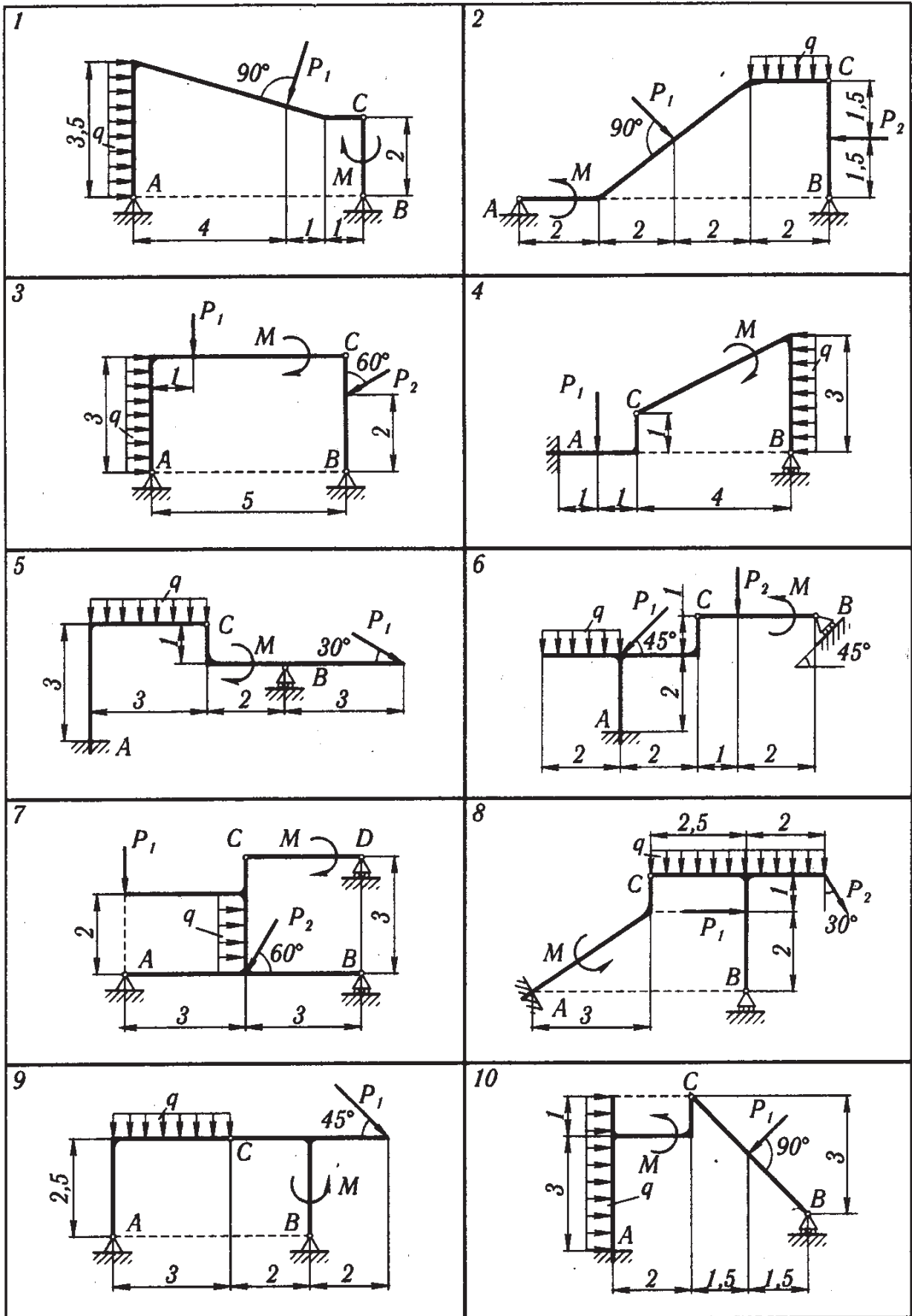
4.3.2-суретте С топсаның көмегімен қосылған бірінші тәсіл көрсетілген. 4.3.3-суретте қатаң жылжымалы топса көмегімен қосылған екінші тәсіл сұлбасы көрсетілген.

4.3-тапсырма мысалы. Берілгені: құрылымның сұлбасы (4.3.2-сурет), $P_1 = 5\text{кН}$, $P_2 = 7\text{кН}$, $M = 22\text{кНм}$, $q = 2\text{кН/м}$, $\alpha = 60^\circ$.

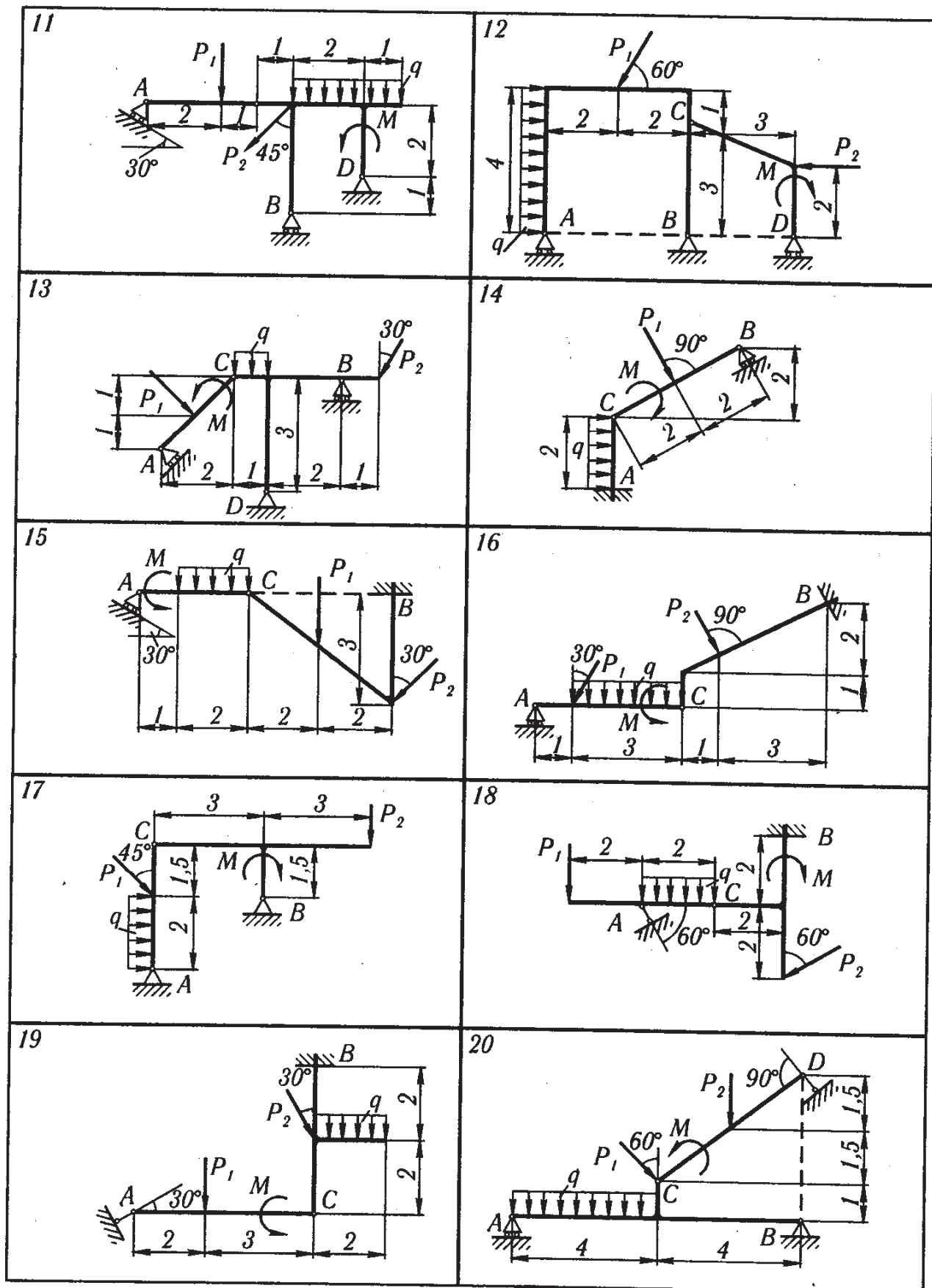
Тірек A -ның ең кіші реакция күші модуліне сәйкес болатын қосылыс тәсілін, және осы қосылыс шарты үшін байланыстардың реакция күштерін, сонымен қатар C топсасының реакция күшін анықтау қажет.

4.3.1-кесте

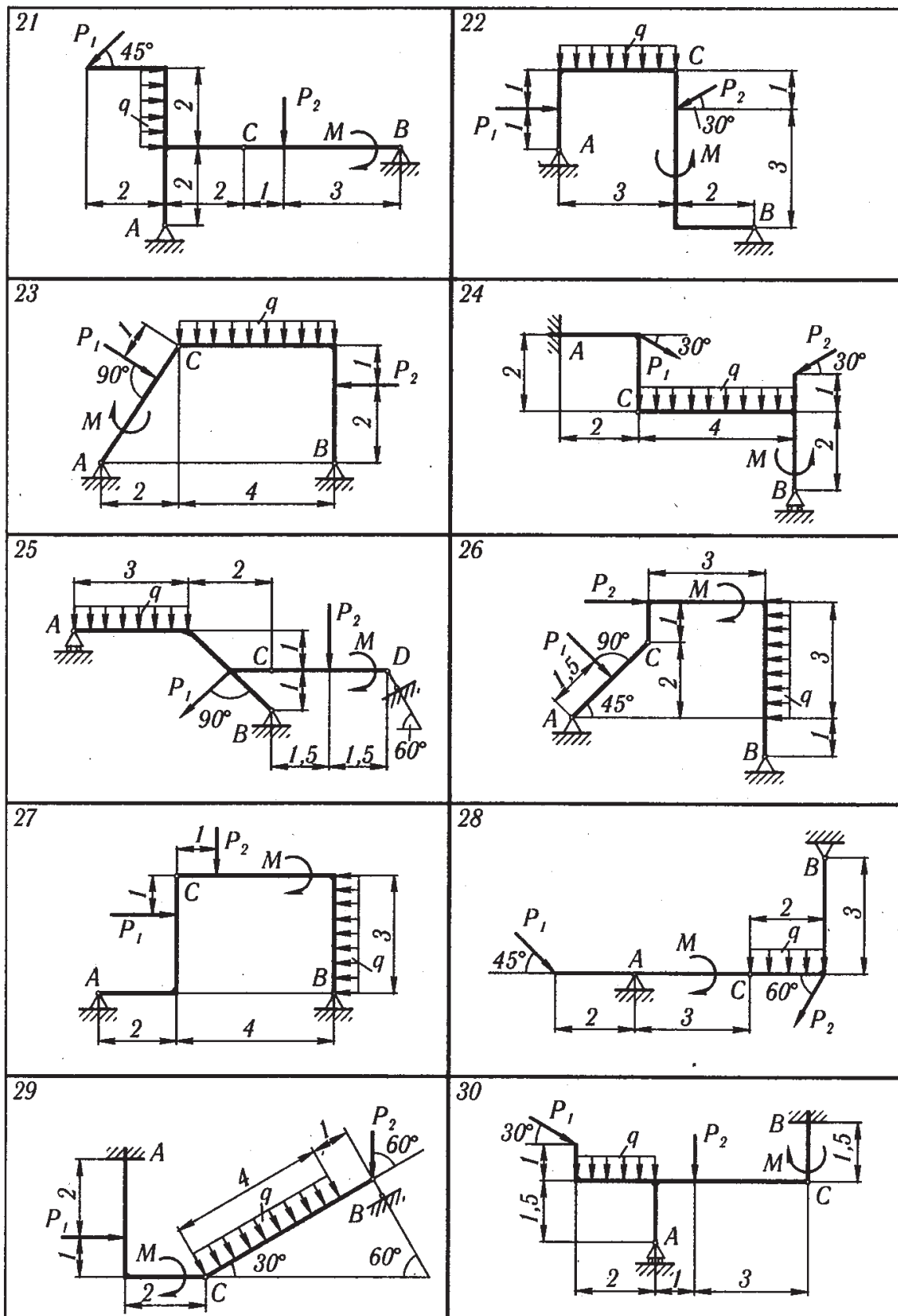
Шарттың номері	P_1	P_2	$M,$ кНм	$q,$ кН/м	Зерттелетін реакция күші	Шарттың номері	P_1	P_2	$M,$ кНм	$q,$ кН/м	Зерттелетін реакция күші
	кН						кН				
1	5,0	-	24,0	0,8	X_A	16	7,0	10,0	14,0	3,8	R_B
2	6,0	10,0	22,0	1,0	R_A	17	9,0	12,0	26,0	4,0	R_A
3	7,0	9,0	20,0	1,2	R_B	18	11,0	10,0	18,0	3,5	M_B
4	8,0	-	18,0	1,4	M_A	19	13,0	9,0	30,0	3,0	M_B
5	9,0	-	16,0	1,6	R_A	20	15,0	8,0	25,0	2,5	R_B
6	10,0	8,0	25,0	1,8	M_A	21	10,0	7,0	20,0	2,0	R_A
7	11,0	7,0	20,0	2,0	R_B	22	5,0	6,0	15,0	1,5	R_A
8	12,0	6,0	15,0	2,2	M_A	23	8,0	5,0	10,0	1,4	R_A
9	13,0	-	10,0	2,4	X_A	24	11,0	4,0	5,0	1,3	M_A
10	14,0	-	12,0	2,6	R_A	25	14,0	6,0	7,0	1,2	R_B
11	15,0	5,0	14,0	2,8	R_D	26	12,0	8,0	9,0	1,1	R_B
12	12,0	4,0	16,0	3,0	R_B	27	10,0	7,0	11,0	1,0	X_A
13	9,0	6,0	18,0	3,2	R_A	28	8,0	9,0	13,0	1,2	R_A
14	6,0	-	20,0	3,4	M_A	29	6,0	10,0	15,0	1,4	M_A
15	5,0	8,0	22,0	3,6	M_B	30	10,0	12,0	17,0	1,6	M_B



4.3.1-супер



4.3.1-суреттің жалғасы



4.3.1-суреттің жалғасы

Шешуі. 1. С нүктесінде топсаның көмегімен қосылысы үшін тірек А-ның реакция күшін анықтау.

Құрылымға түсірілген теңгерілген күштер жүйесін қарастырамыз (4.3.2-сурет). B нүктесіне қатысты күш моменттері теңдеуін құрамыз. Моментті есептеу жеңіл болу \bar{P}_1 күшін вертикаль және горизонталь құраушыларына жіктейміз

$$P_1' = P_1 \cos 60^\circ = 2,5 \text{ kH}, \quad P_1'' = P_1 \sin 60^\circ = 4,33 \text{ kH},$$

$$\sum M_{kB} = 0, \quad P_1' \cdot 3 + P_1'' \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + \sqrt{1^2 + 1,5^2} = 0, \quad (4.3.1)$$

мұндағы, $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kH}$.

Берілген шамалардың сан мәндерін орындарына қойсақ, онда (4.3.1)-теңдеу мынадай түрде жазылады

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ kH}. \quad (4.3.1')$$

C топсасының сол жағында орналасқан құрылым бөлігін қарастыра отырып, белгісіздер X_A және Y_A үшін екінші теңдеуді құрамыз

$$\sum M_{kC} = 0, \quad P_1'' \cdot 6 + Q \cdot 2 - Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 = 0,$$

немесе есептеуден кейін

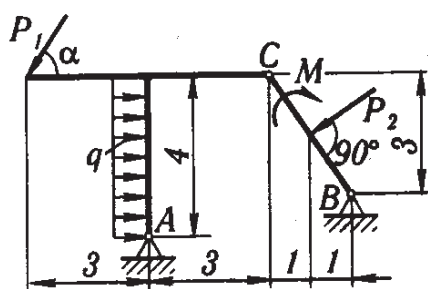
$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ kH}. \quad (4.3.2)$$

Алынған (4.3.1) және (4.3.2) теңдеулер жүйесін шешеміз

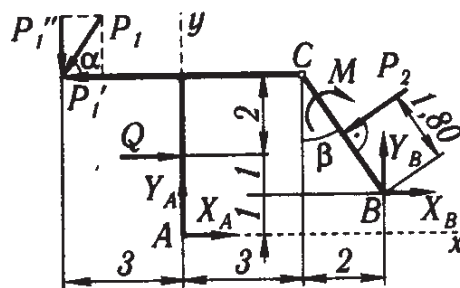
$$X_A = -7,97 \text{ kH}, \quad Y_A = 3,36 \text{ kH}.$$

C нүктесінде топсаның көмегімен қосылысы үшін тірек A -ның реакция күшінің модулін анықтаймыз

$$R_A' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,65 \text{ kH}.$$



4.3.2-сурет



4.3.3-сурет

2. 4.3.5-суретте көрсетілген C нүктесінде қатаң жылжымалы топса көмегімен қосылған құрылым бөлігін есептеу сұлбасы. 4.3.3 және 4.3.5-суреттерде көрсетілген күштер жүйесінің айырмашылығы жоқ. Сондықтан (4.3.1')-теңдеу өзгеріссіз қалады. Екінші теңдеуді құру үшін C топсасының сол жағында орналасқан құрылым бөлігіне түсірілген күштер жүйесін қарастырамыз.

Осы күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеуді жазамыз

$$\sum X_k = 0, \quad X_A + Q - P_1' = 0, \quad (4.3.3)$$

осыдан

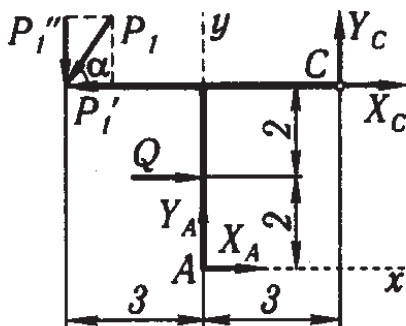
$$X_A = -5,50 \text{ kH},$$

және 4.3.1¹)-теңдеуінен Y_A -ны табамыз

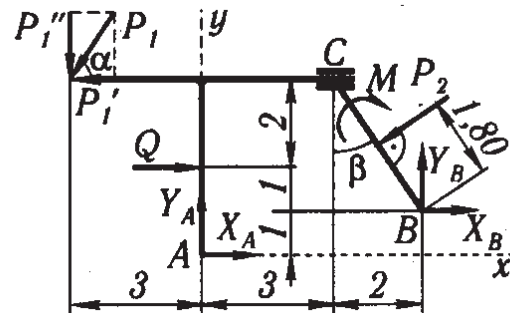
$$Y_A = 3,85 \text{ kH}.$$

C нүктесінде қатаң жылжымалы топса көмегімен қосылысы үшін тірек A -ның реакция күшінің модулін анықтаймыз

$$R_A'' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 6,71 \text{ kH}.$$



4.3.4-сурет



4.3.5-сурет

Сонымен, C нүктесінде қатаң жылжымалы топса көмегімен қосылысы үшін тірек A -ның реакция күшінің модулі, топсаның көмегімен қосылысынан кіші ($\approx 22\%$ -ке). Тірек B -ның құраушы реакция күштерімен және қатаң жылжымалы топса реакция күшін анықтаймыз.

C нүктесінің сол жағындағы бөлігі үшін түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеуді жазамыз (4.3.6, a -сурет)

$$\sum Y_k = 0, \quad -P_1'' + Y_A + Y_C = 0, \quad (4.3.4)$$

осыдан

$$Y_C = P_1'' - Y_A = 0,48 \text{ kH}.$$

Тірек B -ның құраушы реакция күштерін және қатаң жылжымалы топса моментін, C топсасының сол жағында орналасқан құрылым бөлігіне құрылған тепе-теңдік теңдеулер арқылы анықтаймыз (4.3.6, b -сурет)

$$\sum M_{kB} = 0, \quad M_C + P_1'' \cdot 6 + Y_C \cdot 2 - M + P_1 \cdot 1,8 = 0, \quad (4.3.5)$$

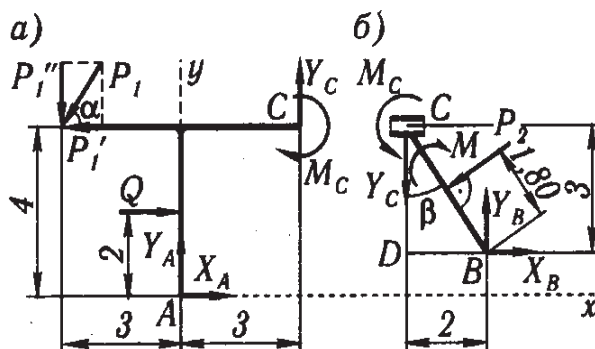
$$\sum X_k = 0, \quad X_B - P_2 \cos \beta = 0, \quad (4.3.6)$$

$$\sum Y_k = 0, \quad -P_2 \sin \beta + Y_B - Y_C = 0, \quad (4.3.7)$$

BCD тікбұрышты үшбұрышынан

$$\sin \beta = BD/BC = 0,555,$$

$$\cos \beta = CD/BC = 0,832.$$



4.3.6-сурет

Құрылған үш теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз шамаларды табамыз

$$M_C = 8,44 \text{ кНм}, \quad X_A = 5,82 \text{ кН}, \quad Y_A = 4,47 \text{ кН}.$$

Реакция күштерінің дұрыс анықталғанына көз жеткізу үшін, бүтіндей құрылымға түсірілген күштердің қолданылмаған тепе-теңдік теңдеуін құрамыз (4.3.2-сурет), мысалы

$$\begin{aligned} \sum M_{kB} &= P_1' \cdot 4 + P_1'' \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \sin \beta \cdot 2,5 - X_B \cdot 1 + Y_D \cdot 5 = \\ &= 2,5 \cdot 4 + 4,33 \cdot 3 - 8 \cdot 2 - 22 - 7 \cdot 0,555 \cdot 4 + 7 \cdot 0,832 \cdot 2,5 - 5,82 \cdot 1 + \\ &+ 4,37 \cdot 5 - 59,4 - 59,36 \approx 0. \end{aligned}$$

Есептеу қорытындысы 4.3.2-кестеде келтірілген.

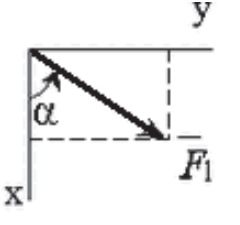
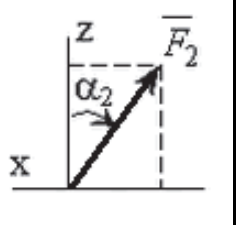
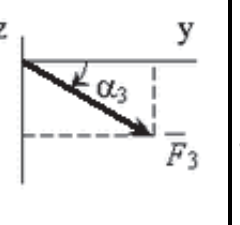
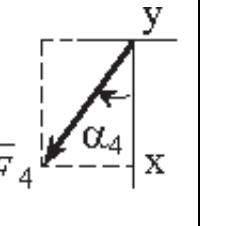
4.3.2-кесте

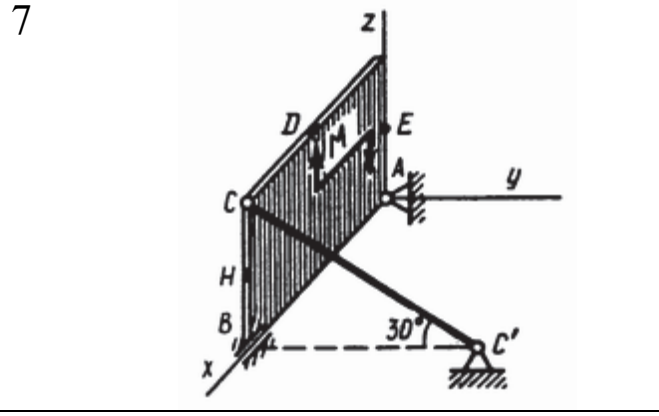
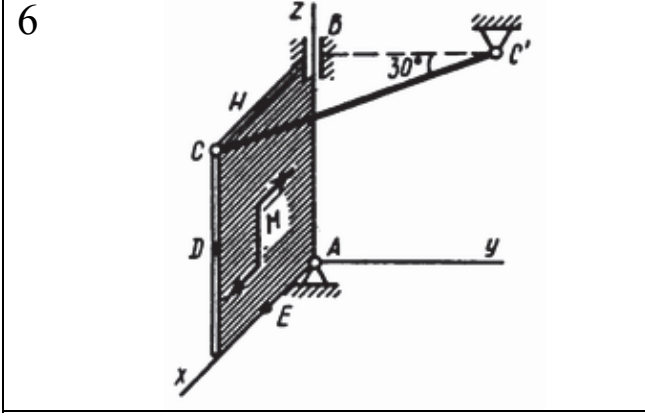
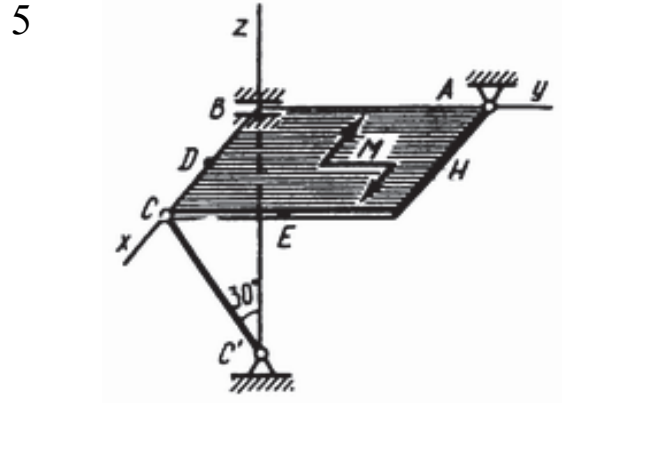
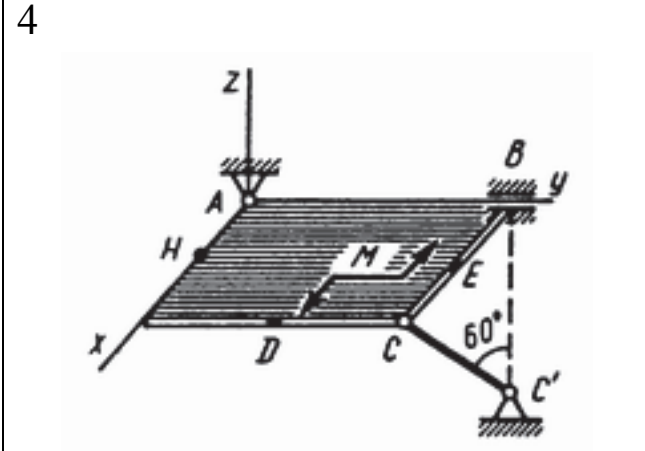
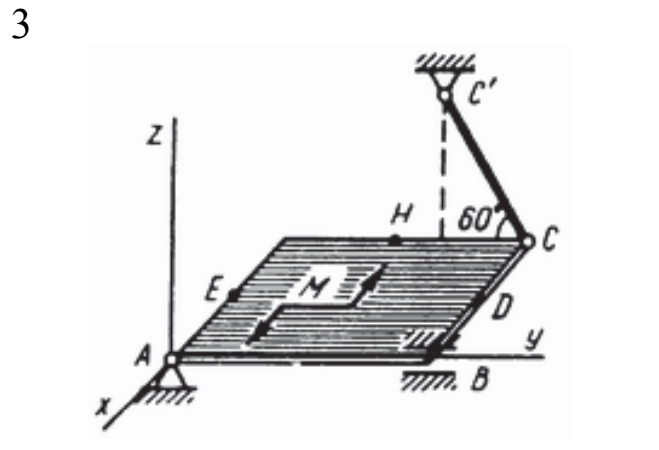
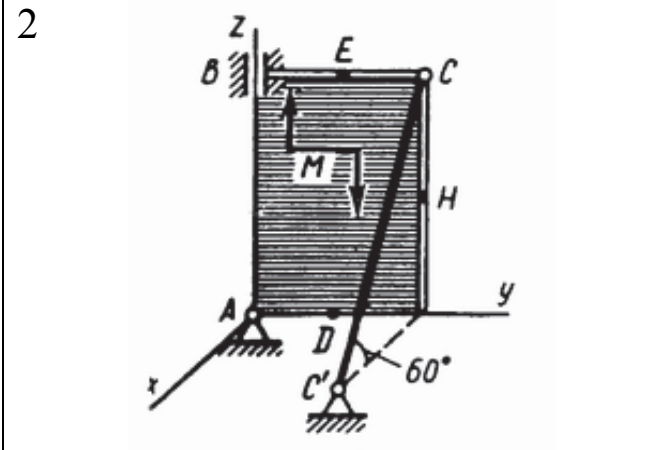
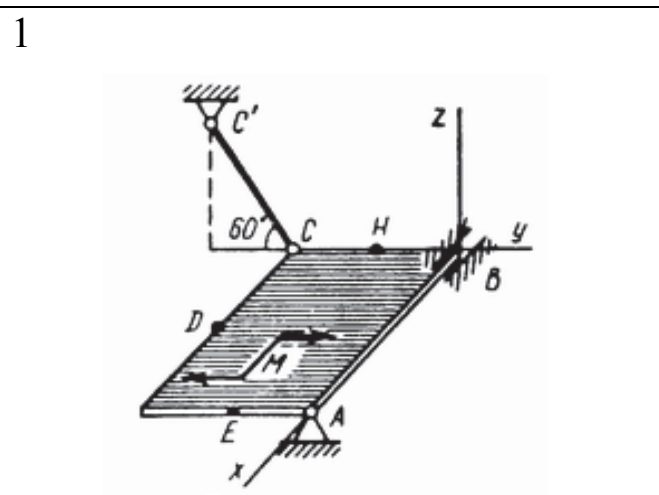
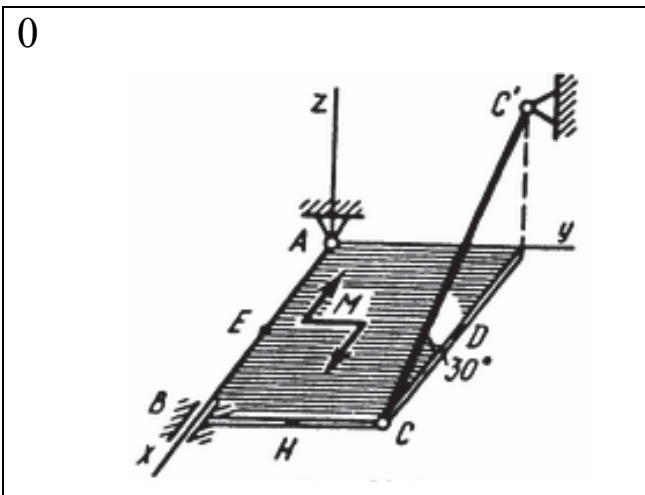
	Күштер, кН						Момент, кНм
	X_A	Y_A	R_A	Y_C	X_B	Y_B	M_C
4.3.2-сурет	-7,97	3,36	8,65	—	—	—	—
4.3.3-сурет	-5,50	3,85	6,71	$\pm 0,48$	5,82	4,37	$\pm 8,44$

4.4-тапсырма. Кеңістік күштер жүйесінің тепе-теңдігі

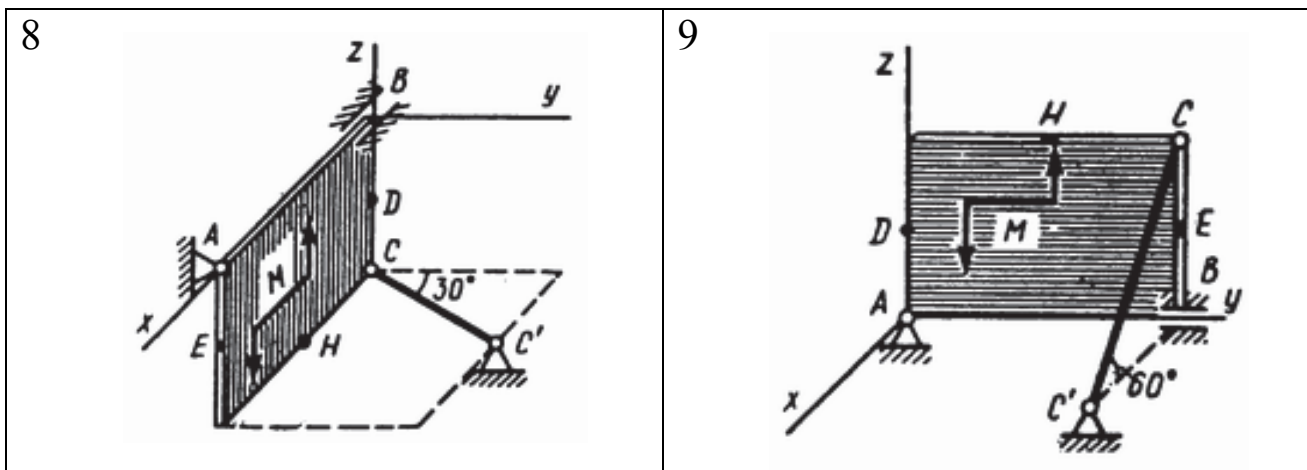
Салмағы $P = 5 \text{ кН}$, қабырғалары $AB = 3l$, $BC = 2l$ біртекті тікбұрышты плита A нүктесінде сфералық топса көмегімен, B нүктесінде цилиндрлік топса көмегімен және салмақсыз CC' сырығымен бекітілген (4.4.1-сурет). Плитаға моменті $M = 6 \text{ кНі}$ болатын плитаның жазықтығында жатқан қос күш және одан басқа екі күш әсер етеді. Бұл күштердің сан мәндері, олардың бағыттары және түсу нүктелері 4.4.1-кестеде көрсетілген. \vec{F}_1 және \vec{F}_4 күштері xy жазықтығына параллель жазықтықта, \vec{F}_2 күші – xz жазықтығына

4.4.1-кесте

Күштер								
	$F_1 = 4 \text{ кН}$		$F_2 = 6 \text{ кН}$		$F_3 = 8 \text{ кН}$		$F_4 = 10 \text{ кН}$	
Шарттың номері	түсу нүктесі	α_1	түсу нүктесі	α_2	түсу нүктесі	α_3	түсу нүктесі	α_4
0	D	0	–	–	E	0	–	–
1	D	30	H	30	–	–	–	–
2	–	–	E	0	–	–	D	0
3	–	–	–	–	D	60	H	0
4	E	0	–	–	H	60	–	–
5	–	–	D	60	H	0	–	–
6	–	–	H	0	–	–	D	0
7	E	30	H	90	–	–	–	–
8	–	–	–	–	D	0	E	60
9	–	–	E	90	D	30	–	–



4.4.1-супер



4.1-суреттің жалғасы

параллель жазықтықта және \vec{F}_3 күші yz жазықтығына параллель жазықтықта орналасқан. Күштердің (D, E, H) түсу нүктелері плита қабырғаларының орталарында орналасқан. Есептеулер барысында $l = 0,8 i$ деп алу керек.

A, B және C нүктелеріндегі байланыс реакция күштерін анықтау қажет.

Нұсқау. 4.4-тапсырмада кеңістік күштер жүйесі әсеріндегі қатты дененің тепе-теңдігі қарастырылады. Есепті шешу кезінде сфералық топса реакция күшін координаттар өстеріне параллель үш құраушы күштерге, ал цилиндрлік топса реакция күшін топса өсіне перпендикуляр жазықтықта жататын екі құраушы күштерге жіктеу қажет. \vec{F} күшінің өске қатысты моментін есептегенде, өске қатысты иіндері жеңіл анықталатын \vec{F}' және \vec{F}'' құраушы күштерге жіктеп (құраушы күштері өстерге параллель болатындай) және Вариньон теоремасын пайдаланған дұрыс; онда $M_x(\vec{F}) = M_x(\vec{F}') + M_x(\vec{F}'')$.

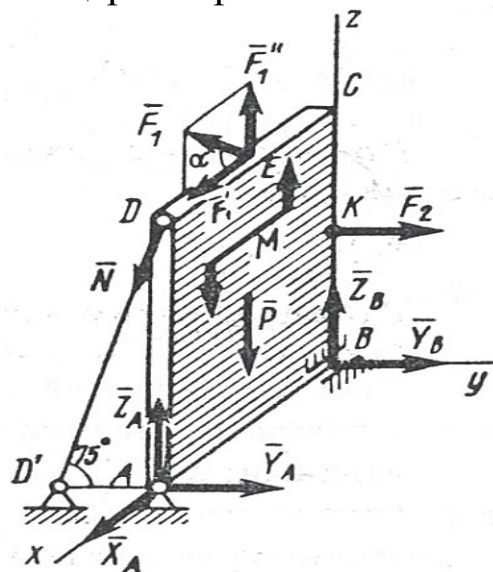
4.4-тапсырма мысалы. Біртекті тік бұрышты вертикаль плита A нүктесінде сфералық топса көмегімен, B нүктесінде цилиндрлік топса көмегімен және yz жазықтығына параллель жазықтықта жататын салмақсыз DD' сырығымен бекітілген (4.4.2-сурет).

Плитаға моменті M болатын плита жазықтығында жатқан қос күш, және одан басқа екі күш \vec{F}_1 (xz жазықтығында), \vec{F}_2 (y өсіне параллель) күштері түсірілген.

Берілгені: $P = 5 \text{ kH}$, $M = 3 \text{ kHi}$, $F_1 = 7,5 \text{ kH}$, $F_2 = 7,5 \text{ kH}$,
 $AB = 1 i$, $BC = 2 i$, $CE = 0,5AB$, $BK = 0,5BC$.

Табу қажет: түсірілген күштер әсерінен A және B нүктелеріндегі реакция күштері және салмақсыз DD' сырықтың реакция күші.

Шешуі. а) плитаның тепе-теңдігін қарастырамыз. Плитаға берілген \bar{P} , \bar{F}_1 , \bar{F}_2 күштері және қос күш моменті M , сонымен қатар байланыс реакция күштері әсер етеді. Сфералық топса реакция күшін үш \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A құраушы реакция күшіне, цилиндрлік топса реакция күшін екі \bar{Y}_B , \bar{Z}_B реакция күштеріне (цилиндрлік топса өсіне перпендикуляр жазықтықта жататын) жіктейміз, сырықтың \bar{N} реакция күшін сырық бойымен бағыттаймыз;



4.4.2-сурет

б) Алты белгісіз реакция күштерін анықтау үшін, плитаға түсірілген кеңістік күштер жүйесі үшін алты тепе-теңдік теңдеу жүйесін құрамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_2 - N \cos 75^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P - N \sin 75^\circ + F_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -F_2 \cdot BK + N \cos 75^\circ \cdot BC = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad P \frac{AB}{2} + F_1 \cos \alpha BC - F_1 \sin \alpha \frac{AB}{2} - Z_A AB + N \sin 75^\circ AB + M = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad Y_A AB - N \cos 75^\circ AB = 0.$$

\bar{F}_1 күшінің моментін анықтау үшін x және z өстеріне параллель \bar{F}_1' , \bar{F}_1'' құраушы күштеріне жіктейміз ($F_1' = F_1 \cos \alpha$, $F_1'' = F_1 \sin \alpha$) және Вариньон теоремасын пайдаланамыз. \bar{N} реакция күшін анықтау үшін де Вариньон теоремасын пайдалануға болады.

Осы теңдеулер жүйесіне берілген шамалардың сандық мәндерін қойып, оларды шешеміз және белгісіз реакция күштерін анықтаймыз.

Жауабы:

$$X_A = -5,2 \text{ kH}, Y_A = -3,8 \text{ kH}, Z_A = 28,4 \text{ kH}, Y_B = -7,5 \text{ kH},$$

$$Z_B = -12,4 \text{ kH}, N = 14,5 \text{ kH}.$$

$\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Y}_B$ және \bar{Z}_B реакция күштерінің алдындағы таңбалары осы күштер 4.4.2-суретте көрсетілген бағыттарына қарама-қарсы бағытталадынын көрсетеді.

4.5-тапсырма. Қатты дененің тірек реакцияларын анықтау

Құрылымның тірек реакция күштерін табу керек. Құрылымның сұлбасы 4.5.1-суретте көрсетілген. Есептеуге қажет берілген шамалар 4.5.1-кестеде келтірілген.

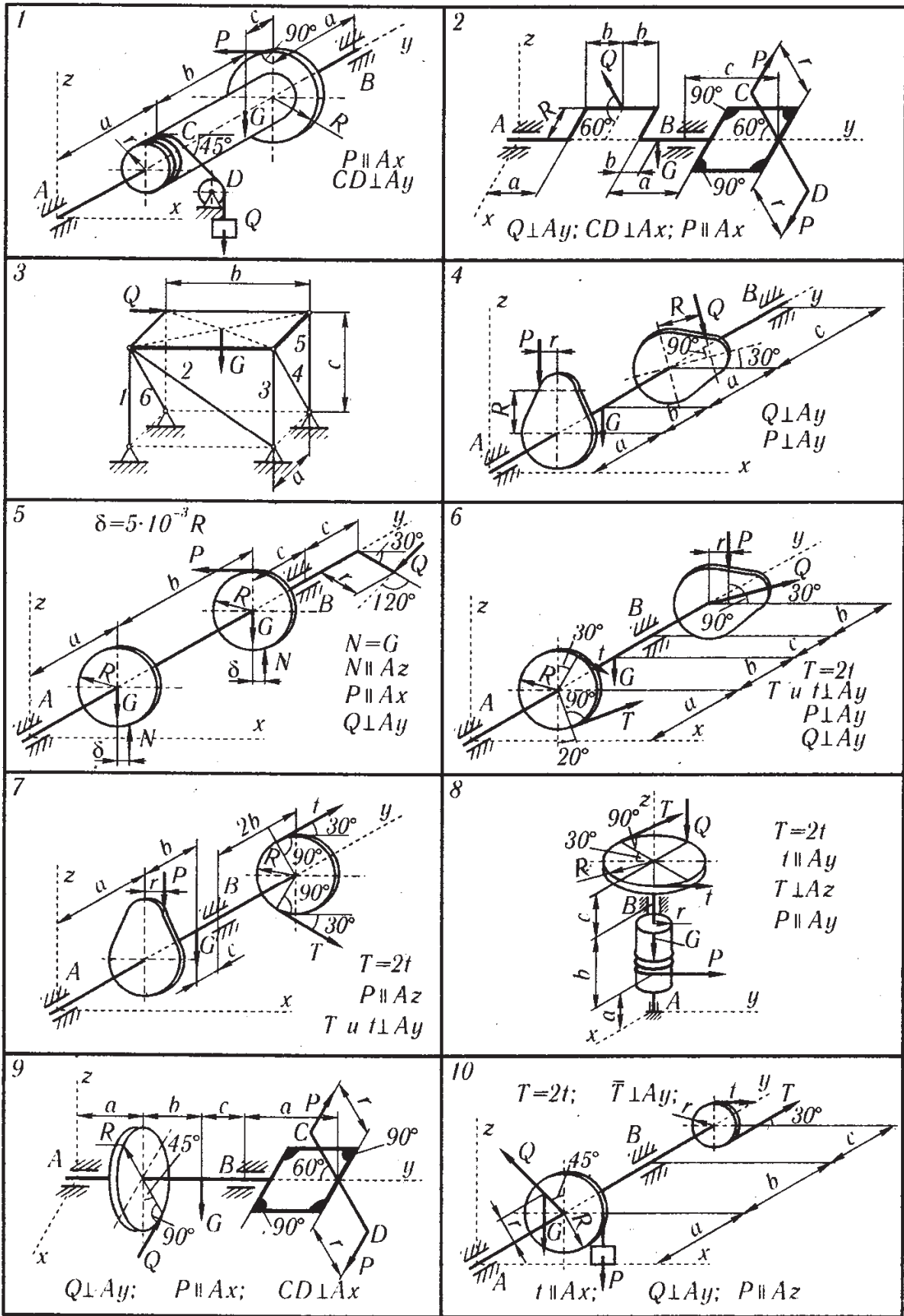
4.5-тапсырма мысалы. Берілгені: салмағы $G = 1 \text{ kH}$ рама $ABCD$

$$P = 2 \text{ kH}, \bar{P} // Ay, AD = BC = 100 \text{ см}, \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ \text{ (4.5.2-сурет)}.$$

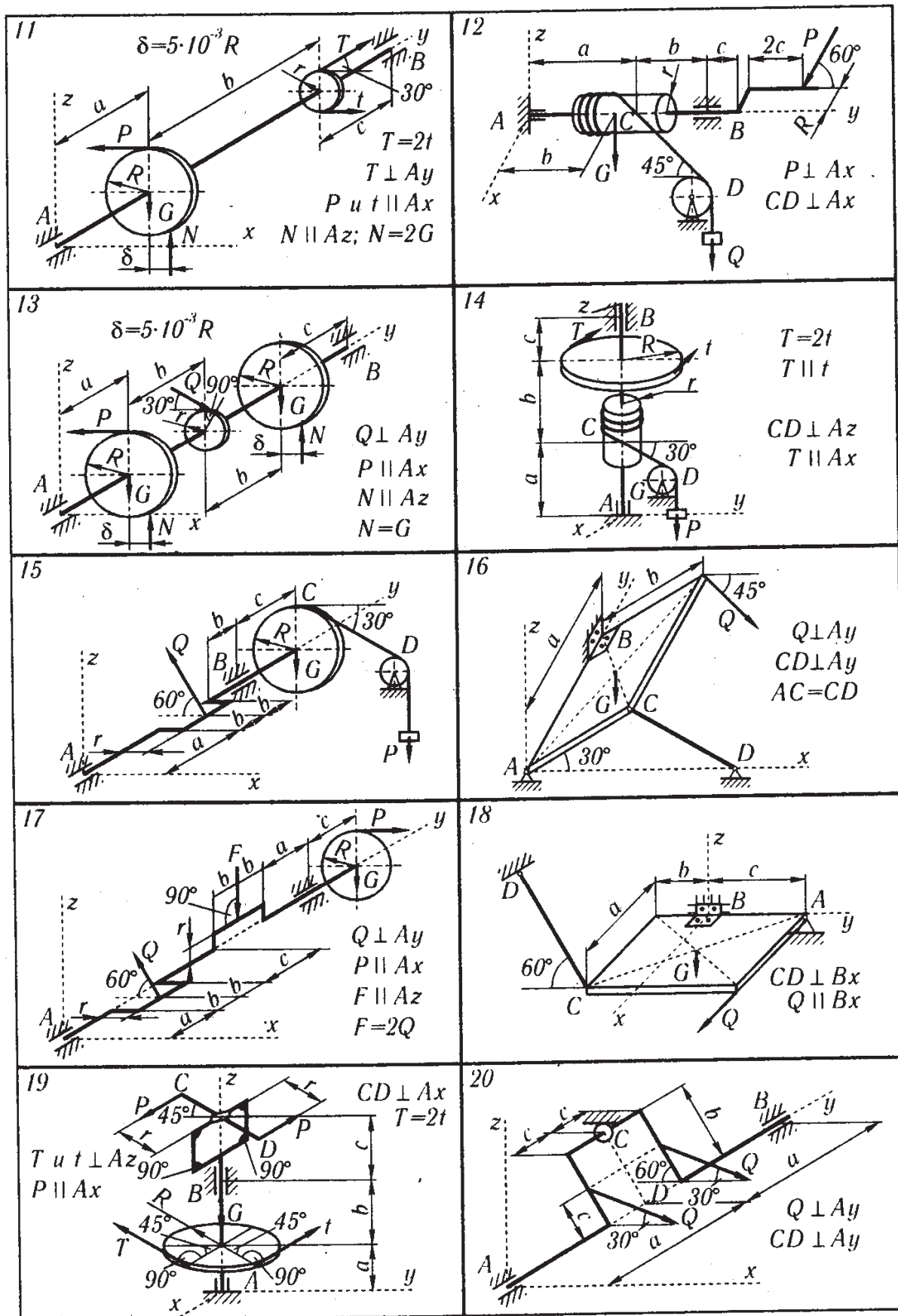
A, B және C тіректерінің реакция күштерін табу қажет (A -сфералық топса, B -топса, C -салмақсыз сырық).

4.5.1-кесте

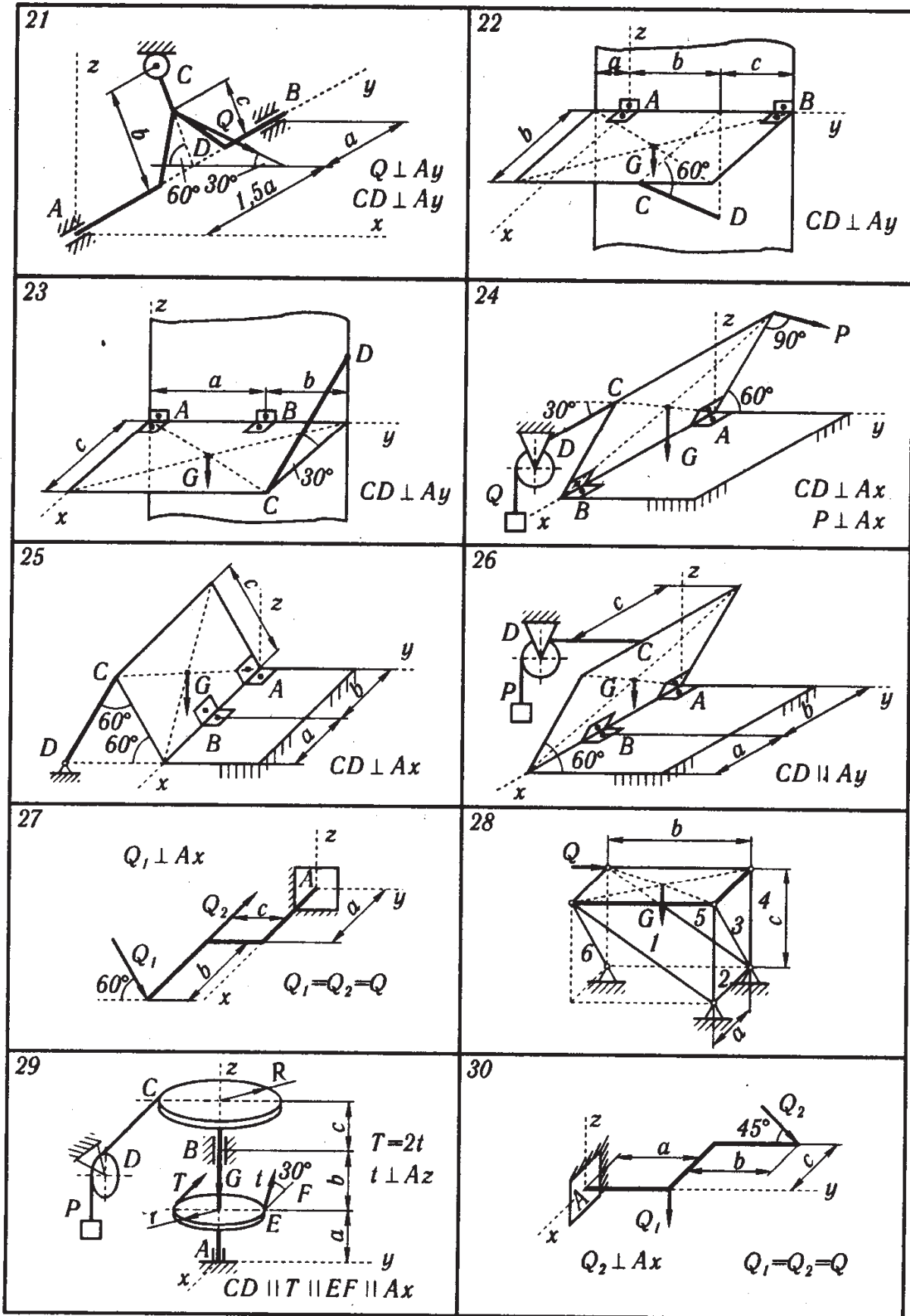
Вариант	Күштер, kH			Өлшем бірліктері, см					Вариант	Күштер, kH			Өлшем бірліктері, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r		Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	-	20	20	30	10	15	5	16	4	-	2	50	30	-	-	-
2	4	-	2	20	10	30	10	10	17	2	-	1	15	10	20	20	5
3	20	-	18	400	400	450	-	-	18	6	-	2	60	40	60	-	15
4	3	-	2	30	20	40	15	10	19	-	8	2	20	30	40	20	-
5	5	-	3	30	40	20	20	15	20	4	-	-	60	40	20	-	-
6	1	4	2	40	30	20	20	10	21	2	-	-	40	60	30	-	-
7	-	3	1	30	10	5	18	6	22	-	-	5	20	50	30	-	-
8	4	6	3	20	40	15	20	10	23	-	-	4	40	30	50	-	-
9	5	-	3	20	15	10	30	40	24	5	-	2	-	-	-	-	-
10	1	4	2	30	40	20	20	10	25	-	-	3	50	50	60	-	-
11	-	2	1	20	30	15	15	10	26	-	-	1	20	60	40	-	-
12	4	-	1	25	20	8	15	10	27	10	-	-	50	30	50	-	-
13	10	-	5	40	30	20	25	15	28	35	-	32	400	200	200	-	-
14	-	2	1	30	90	20	30	10	29	-	4	3	15	20	15	15	10
15	3	-	2	60	20	40	20	5	30	5	-	-	40	40	10	-	-



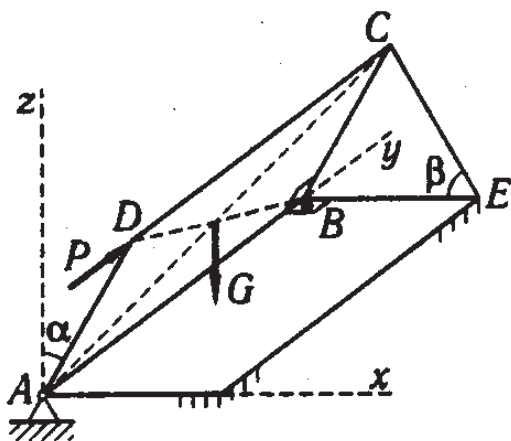
4.5.1-супер



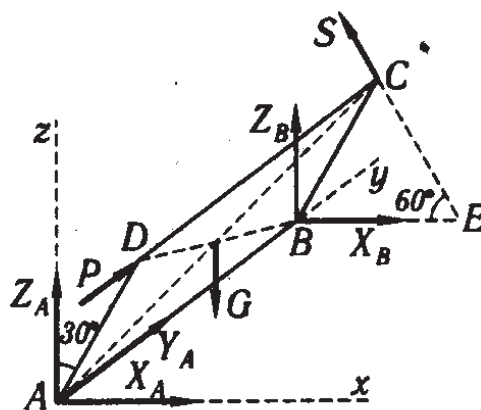
4.5.1-суреттің жалғасы



4.5.1-суреттің жалғасы



4.5.2-сурет



4.5.3-сурет

Шешуі. Жақтау $ABCD$ -ға салмақ күші \bar{G} , күш \bar{P} , сырық CE -нің реакциясы \bar{S} , A және B тіректерінің реакция күштері түсірілген.

Сфералық топса A -ның реакция күші үш құраушыларымен анықталады: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , ал топса B -ның реакция күші – екі: \bar{X}_B және \bar{Y}_B (4.5.3-сурет).

Күштер жүйесінің әсерінен тепе-теңдікте тұрған жақтау $ABCD$ -ның тепе-теңдігі теңдеулерін жазамыз

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + P = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cdot AB \cos 30^\circ + Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cdot AB \cos 60^\circ - X_B \cdot AB = 0.$$

Ескерту. 1. 16, 18, 22-26 варианттарда топсалар жақтаудың AB бойымен орын ауыстыруына кедергі жасамайды деп қабылданады.

2. 20 және 21 варианттарда жанасатын беттер жылтыр деп қабылданады.

Осы теңдеулер жүйесінен \bar{S} , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Z}_A , \bar{X}_B , \bar{Y}_B белгісіз шамаларды табамыз.

Есептеу қорытындысы 4.5.2-кестеде келтірілген.

4.5.2-кесте

Күштер, кН					
S	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Z_B
0,289	-0,600	-2,00	-0,54	0,744	1,2

4.6-тапсырма. Нүкте кинематикасы

B нүктесі xu жазықтығында қозғалады (4.6.1–суретте көрсетілген нүкте траекториясы шартты түрінде көрсетілген). Нүктенің қозғалысы келесі теңдеулермен берілген: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$.

Мұндағы: x және y - сантиметрмен, ал t - секундпен өлшенеді.

Нүкте траекториясының теңдеуін, $t = 1c$ уақыт мезгілінде нүктенің жылдамдығын және үдеуін, сонымен қатар жанама және нормаль үдеулерін және нүктенің қозғалыс траекториясының қисықтық радиусын анықтау қажет. Масштаб бойынша тұрғызылған нүкте траекториясында нүктенің бастапқы және берілген уақыт мезгіліндегі орын-жағдайын, толық жылдамдығын және үдеуін, олардың координаттар өстеріндегі проекцияларын, жанама және нормаль үдеулерін көрсету керек.

$x = f_1(t)$ тәуелділігі 4.6.1–суретте көрсетілген, ал $y = f_2(t)$ тәуелділігі 4.6.1–кестеде (0-2 сұлбалар үшін екінші бағанада, 3-6 сұлбалар үшін үшінші бағанада, 7-9 сұлбалар үшін төртінші бағанада) берілген.

Нұсқау. 4.6-тапсырма «Нүкте кинематикасы» тақырыбына жатады. Бұл есеп декарт координаттарда нүктенің жылдамдығы мен үдеуін, сонымен қатар нүктенің жанама және нормаль үдеулерін анықтайтын формулалардың көмегімен шешіледі.

4.6-тапсырма мысалы. XU жазықтығында қозғалатын нүктенің қозғалыс теңдеулері берілген

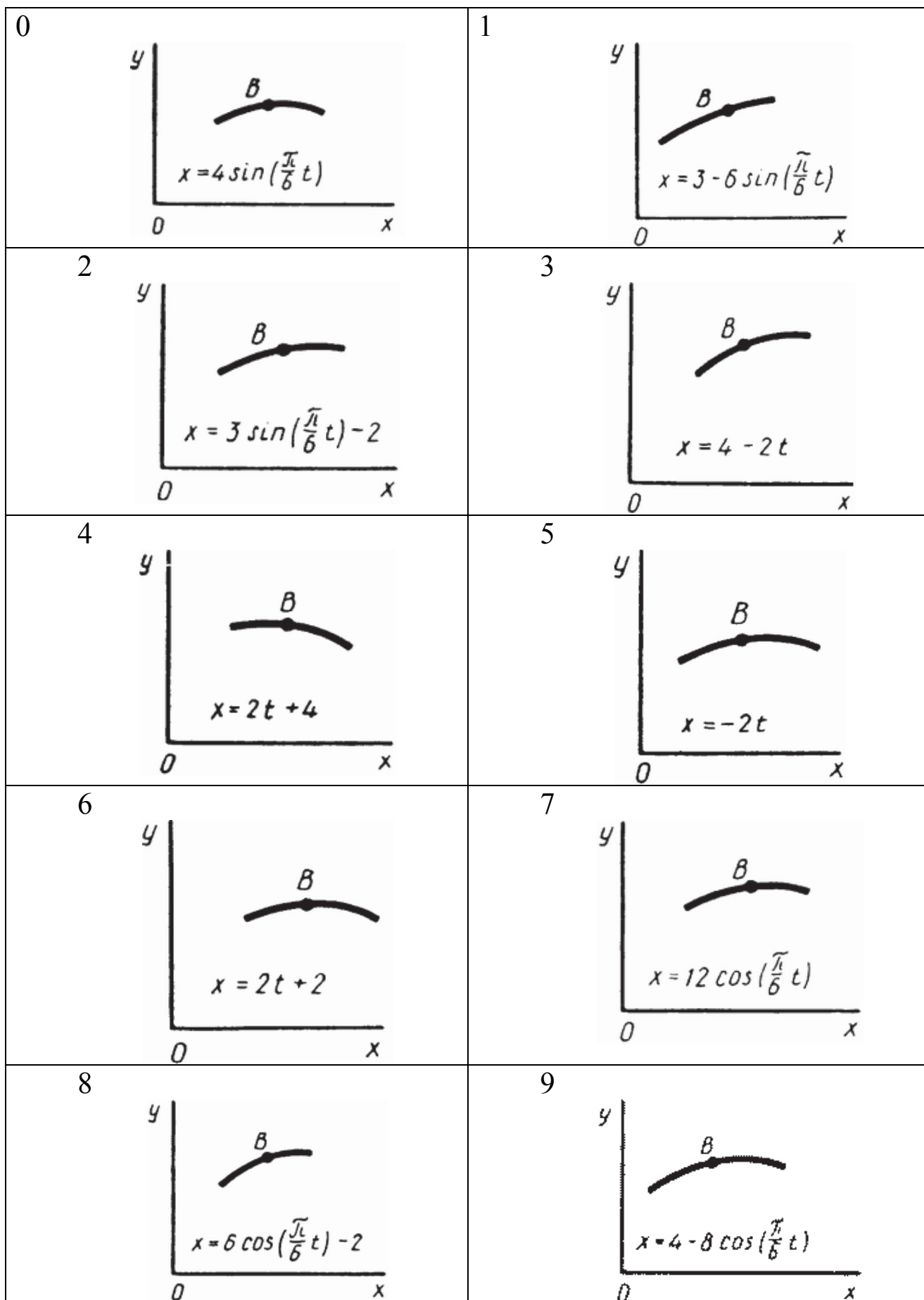
$$x = 3 - 6 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad y = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - 3,$$

мұндағы: x және y сантиметрмен, ал t секундпен өлшенеді.

Шешуі. Нүктенің траекториясын анықтау үшін берілген теңдеулерден t уақытты аластаймыз, ол үшін тригонометрия байланыстарын қолданамыз

4.6.1-кесте

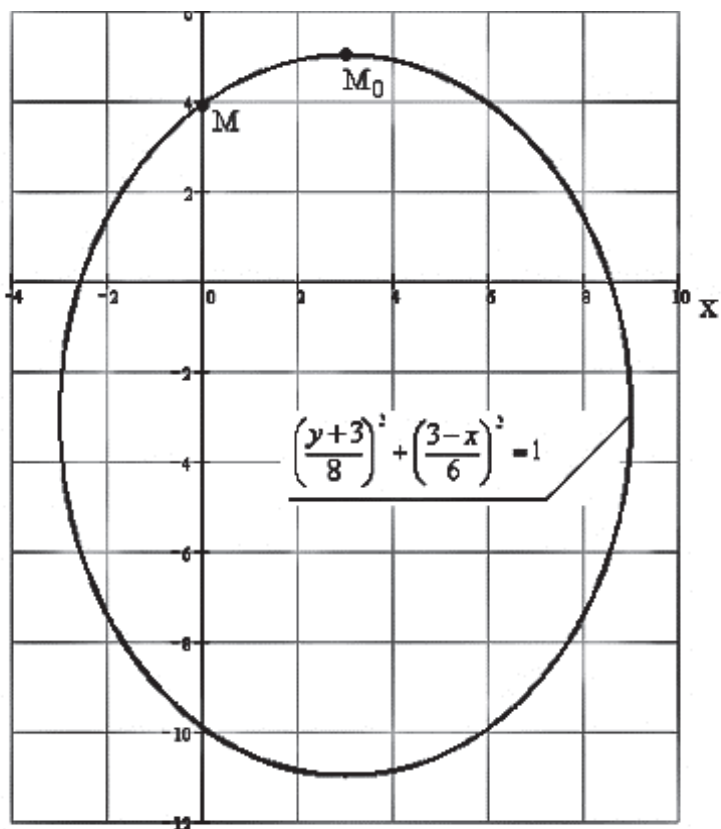
Шарттың номері	0-2	3-6	7-9
0	$4 - 9 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$t^2 - 2$	$-4 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right)$
1	$2 - 3 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right)$	$8 \cos\left(\pi \frac{t}{4}\right)$	$10 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right)$
2	$4 - 6 \cos^2\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$4 + 2t^2$	$12 \sin^2\left(\pi \frac{t}{6}\right)$
3	$12 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$2(t+1)^2$	$2 - 4 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right)$
4	$9 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right) + 5$	$2 + 2 \sin\left(\pi \frac{t}{4}\right)$	$12 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right) + 13$
5	$-10 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$3t^2 - 2$	$3 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right)$
6	$8 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right) - 3$	$(t+1)^3$	$16 \sin^2\left(\pi \frac{t}{6}\right) - 14$
7	$-9 \cos^2\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$3 - 4 \cos\left(\pi \frac{t}{4}\right)$	$6 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right)$
8	$6 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right) - 4$	$2t^3$	$4 - 9 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right)$
9	$2 - 2 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right)$	$2 \sin\left(\pi \frac{t}{4}\right)$	$8 \cos\left(\pi \frac{t}{3}\right) + 6$



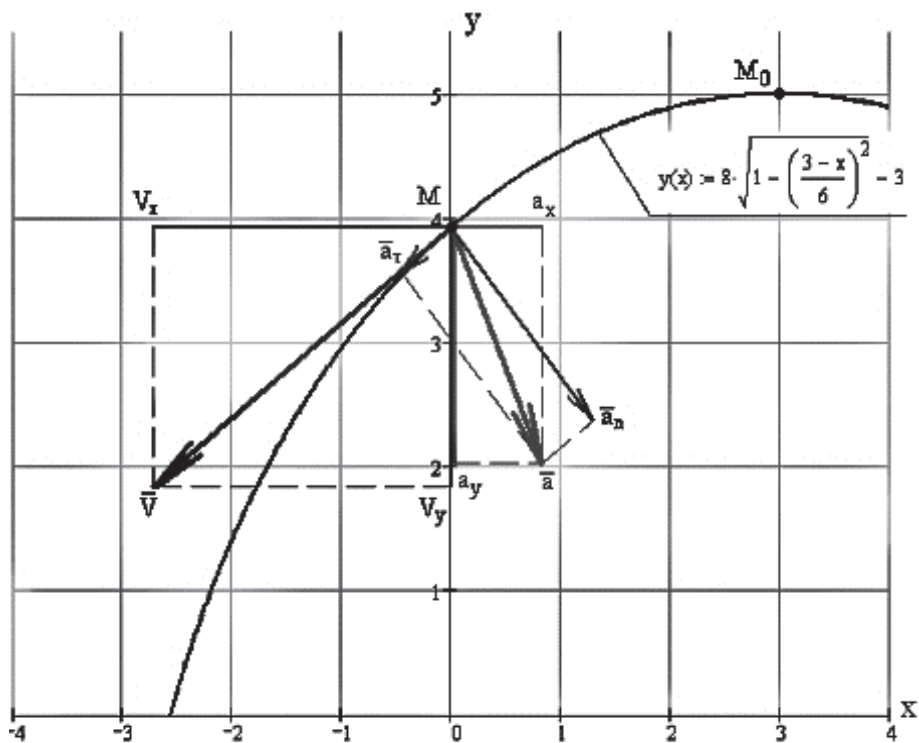
4.6.1-сурет

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{3-x}{6}, \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y+3}{8}.$$

a)



b)



4.6.2-супер

Екі теңдікті квадрат дәрежесіне шығарып, екеуін қосамыз, сонда

$$\left(\frac{y+3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{6}\right)^2 = 1. \quad \text{Бұл эллипстің теңдеуі.}$$

Нүктенің траекториясы 4.6.2,*a* – суретте көрсетілген; $t=0$ бастапқы уақыт мезгілінде нүктенің орны M_0 , ал $t=1\text{ c}$ уақыт мезгілінде нүктенің орны M .

Нүктенің жылдамдығын оның координаттар өстеріне проекциялары арқылы анықтаймыз

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -6 \frac{\pi}{6} \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -\pi \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -8 \frac{\pi}{6} \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -\frac{4}{3} \pi \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

$t=1\text{ c}$ болғанда

$$v_x = -\pi \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -2,72 \text{ см/с}, \quad v_y = -\frac{4}{3} \pi \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -2,09 \text{ см/с},$$

$$v = \sqrt{(-2,72)^2 + (-2,09)^2} = 3,43 \text{ см/с}$$

Дәл осылай нүктенің үдеуін анықтаймыз

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \pi \frac{\pi}{6} \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right) = \frac{1}{6} \pi^2 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right),$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{4}{3} \pi \frac{\pi}{6} \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -\frac{2}{9} \pi^2 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right), \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$t=1\text{ c}$ болғанда

$$a_x = \frac{1}{6} \pi^2 \sin\left(\pi \frac{t}{6}\right) = 0,822 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = -\frac{2}{9} \pi^2 \cos\left(\pi \frac{t}{6}\right) = -1,90 \text{ см/с}^2,$$

$$a = \sqrt{0,822^2 + (-1,9)^2} = 2,07 \text{ см/с}^2.$$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$ теңдігін уақыт бойынша дифференциалдап, жанама үдеуді анықтаймыз

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt},$$

Осыдан

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}.$$

Осы теңдікке $t = 1 \text{ c}$ уақыт мезгіліндегі шамаларының сан мәндерін қойып \bar{a}_τ шамасын анықтаймыз

$$a_\tau = 0,506 \text{ см/с}^2.$$

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ формуланы пайдаланып \bar{a}_n шамасын анықтаймыз

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{2,07^2 - 0,506^2} = 2,00 \text{ см/с}^2.$$

Траекторияның қисықтық радиусын анықтау үшін, мынадай формуланы пайдаланамыз

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

осыдан

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3,43^2}{2,0} = 5,87 \text{ м}.$$

Жауабы: $t = 1 \text{ c}$ уақыт мезгілінде $v = 3,43 \text{ см/с}$, $a = 2,07 \text{ см/с}^2$, $a_n = 2,0 \text{ см/с}^2$, $a_\tau = 0,506 \text{ см/с}^2$, $\rho = 5,87 \text{ см}$.

4.6.2,б–суретте M нүктесінің жылдамдықтары мен үдеулері көрсетілген.

4.7-тапсырма. Дененің қарапайым қозғалыстары

Механизм бір-бірімен түйісу немесе белдікті беріліс арқылы байланысқан 1-3 сатылы дөңгелектерінен, 4-тісті рейкасы мен дөңгелектердің біріне оралған жіптің ұшына байланған 5-жүгінен тұрады (4.7.1-сурет).

Дөңгелек сатыларының радиустары: 1 дөңгелегі үшін $r_1 = 2 \text{ см}$, $R_1 = 4 \text{ см}$, 2 дөңгелегі үшін $r_2 = 6 \text{ см}$, $R_2 = 8 \text{ см}$, 3 дөңгелегі

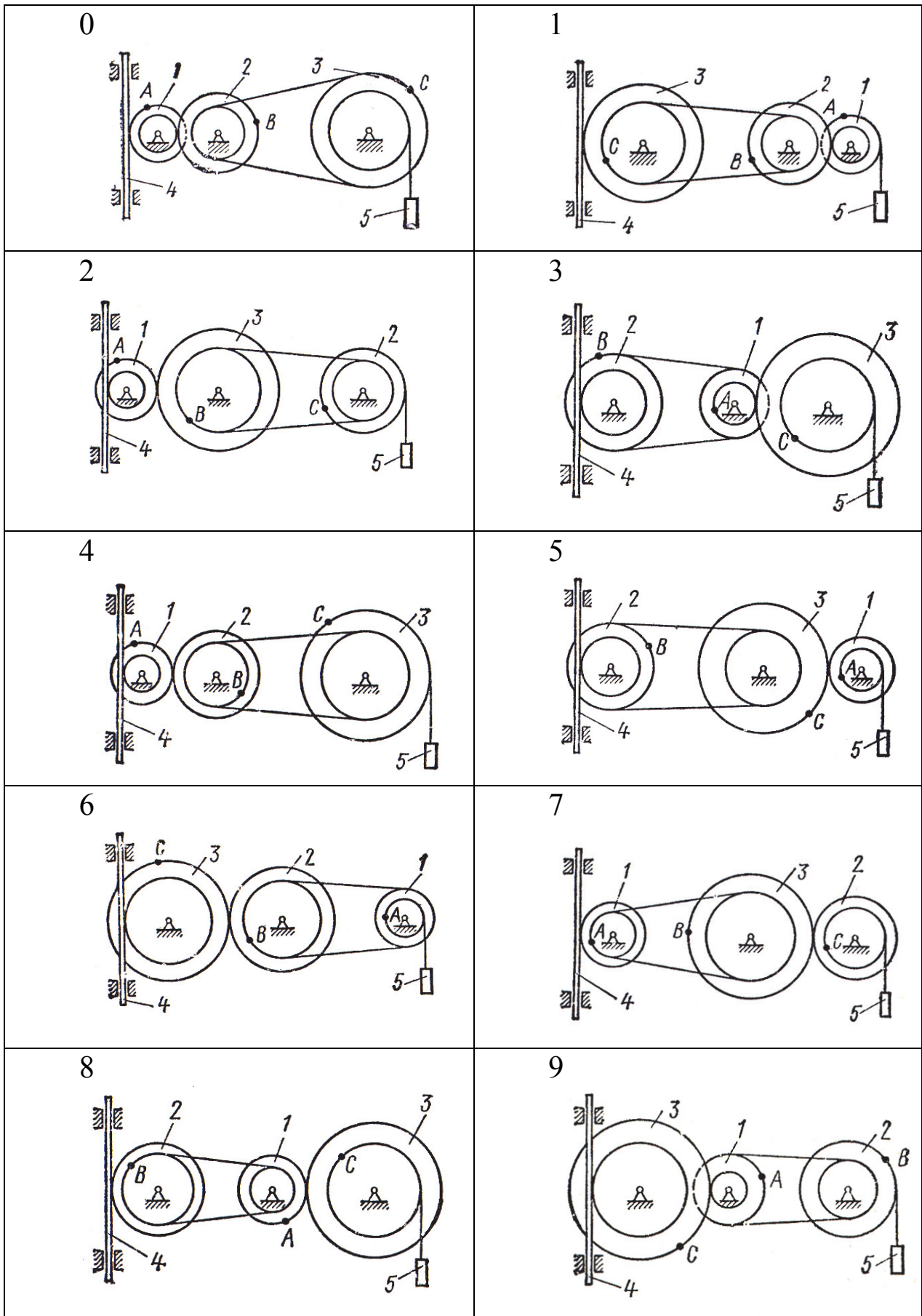
үшін $-r_3 = 12 \text{ см}$, $R_3 = 16 \text{ см}$. Дөңгелектердің бойында A , B және C (4.7.1-суретте) нүктелері орналасқан.

4.7.1-кестенің «Берілген» бағанында механизмнің жетекші буынының қозғалыс заңы немесе жылдамдығының өзгеру заңы көрсетілген: $\varphi_1(t)$ – 1-дөңгелегінің айналу заңы, $s_4(t)$ – 4-рейкасының қозғалыс заңы, $\omega_2(t)$ – 2-дөңгелегінің бұрыштық жылдамдығының өзгеру заңы, $v_5(t)$ – 5-жүк жылдамдығының өзгеру заңы және т.с. φ және ω үшін оң бағыт сағат тілінің қозғалысына қарсы, ал s_4 , s_5 және v_4 , v_5 үшін - төмен бағытталған, φ радианмен, s – сантиметрмен, t – секундпен өлшенеді.

$t_1 = 2 \text{ с}$ уақыт мезетіне сәйкес кестенің «Табу керек» бағанында көрсетілген нүктелер мен денелердің жылдамдықтары мен үдеулерін анықтаңыз.

4.7.1-кесте

Шарттың номері	Берілгені	Табу қажет	
		Жылдамдықтар	үдеулер
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_2, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4



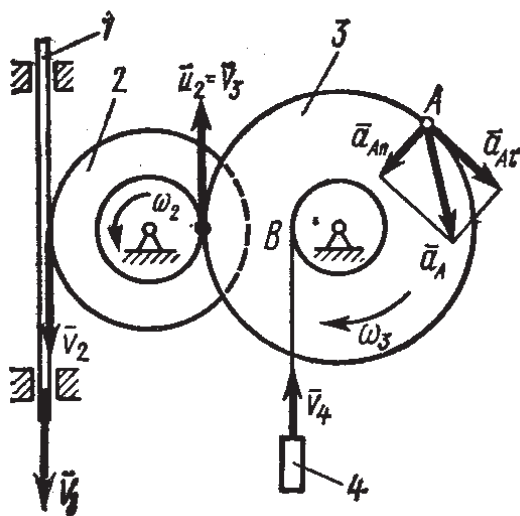
4.7.1-супер

Нұсқау. 4.7-тапсырма қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысын зерттеуге арналған. Тапсырманы орындау кезінде, егер екі дөңгелек іліністе болса, онда олардың түйісуіндегі әрбір дөңгелек нүктелерінің жылдамдықтары бірдей, ал екі дөңгелек белдікті байланыста болып дөңгелектің бетінде сырғанамайтын болса, онда белдік нүктелерінің және екі дөңгелек бетінде жатқан нүктелердің жылдамдықтары өзара тең болатындығын ескеру қажет.

4.7-тапсырма мысалы. Рейка 1, радиустары R_2 және r_2 сатылы дөңгелек 2, радиусы r_3 валға бекітілген радиусы R_3 дөңгелек 3 түйіскен берілісте болады, ал валға жүк 4 ілінген жіп оралған (4.7.2-сурет). Рейканың қозғалыс теңдеуі $s_1 = f(t)$.

Берілгені: $R_2 = 6 \text{ см}$, $r_2 = 4 \text{ см}$, $R_3 = 8 \text{ см}$, $r_3 = 3 \text{ см}$, $s_1 = 3 t^3$ (s – сантиметрмен, ал t – секундпен өлшенеді), A – дөңгелек 3-тің бетіндегі нүкте, $t_1 = 3 \text{ с}$.

Табу қажеті: $t = t_1$ уақыт мезетінде ω_3 , v_4 , ε_3 , α_A .



4.7.2-сурет

Шешуі. Дөңгелектердің (радиустары R_i) сыртқы бетіндегі нүктелерінің жылдамдықтарын v_i арқылы, ал (радиустары r_i) ішкі бетіндегі нүктелерінің жылдамдықтарын u_i арқылы белгілеуді қабылдаймыз.

1. Алдымен барлық дөңгелектердің бұрыштық жылдамдықтарын t уақытқа тәуелді функция ретінде анықтаймыз. Рейка 1-дің қозғалыс заңдылығын біле отырып, оның жылдамдығын анықтаймыз

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (4.7.1)$$

Рейка және дөңгелек 2 түйіскен берілісте болғандықтан $v_2 = v_1$ немесе $\omega_2 R_2 = v_1$. Сонымен қатар дөңгелектер 2 және 3 түйіскен берілісте болғандықтан, яғни $u_2 = v_3$ немесе $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Осы теңдіктерден анықтайтынымыз

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2} t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{3}{4} t^2. \quad (4.7.2)$$

Онда $t_1 = 3 \text{ c}$ уақыт мезетінде $\omega_3 = 6,75 \text{ c}^{-1}$ болады.

2. Жүктің v_4 жылдамдығын анықтаймыз. $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$ болғандықтан, $t_1 = 3 \text{ c}$ уақыт мезетінде $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$ болады.

3. Дөңгелек 3-тің ε_3 бұрыштық үдеуін анықтаймыз. (4.7.2)-тендікті ескере отырып, $\varepsilon_3 \omega_3 = 1,5 \text{ t}$ болатындығын анықтаймыз. Онда $t_1 = 3 \text{ c}$ уақыт мезетінде $\varepsilon_3 = 4,5 \text{ c}^{-2}$ болады.

4. A нүктесінің a_A үдеуін анықтаймыз. A нүктесі үшін $\bar{a}_A = \bar{a}_{Ar} + \bar{a}_{An}$, мұндағы $a_{Ar} = R_3 \varepsilon_3$, $a_{An} = R_3 \varepsilon_3^2$. Онда $t_1 = 3 \text{ c}$ уақыт мезетінде анықтайтынымыз

$$a_{Ar} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 364,5 \text{ см/с}^2, \quad a_A = \sqrt{a_{Ar}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Барлық нүктелердің жылдамдықтары және үдеулері, сонымен қатар бұрыштық жылдамдықтардың бағыттары 4.7.2-суретте көрсетілген.

Жауабы: $t_1 = 3 \text{ c}$ уақыт мезетінде $\omega_3 = 6,75 \text{ c}^{-1}$; $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$; $\varepsilon_3 = 4,5 \text{ c}^{-2}$; $a_A = 366,3 \text{ см/с}^2$.

4.8-тапсырма. Иітiректі жазық механизм қозғалысы

Иітiректі жазық механизм берілген (4.8.1-сурет). Буындарының өлшем бірліктері, жетекші буынының қозғалыс заңы белгілі.

Тапсырма қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерін пайдаланып механизмге кинематикалық талдау әдістемесін оқып үйренуге арналған. Механизм қозғалыстар дифференциалдық теңдеулері арнайы компьютерді қолданып интегралдау арқылы анықталады.

1. Механизмнің сұлбасын, 4.8.1-кестеде көрсетілген нүктесінің 12 орнын (бастапқы буынның әрбір 30° бұрышына сәйкес) және траекториясын тұрғызу қажет.

2. Бас нүктесі A декарттық координаттар жүйесіне қатысты 2.2-кестеде көрсетілген нүктесінің қозғалыс теңдеулерін құрастыру және траекториясын анықтау қажет.

3. φ_1 бұрышына сәйкес 4.8.1-кестеде көрсетілген нүктесінің жылдамдығын, үдеуін сонымен қатар жанама және нормаль құраушы үдеулерін, қисықтық радиусын табу қажет.

4. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтарын жылдамдықтар лездік центрі тәсілімен табу қажет.

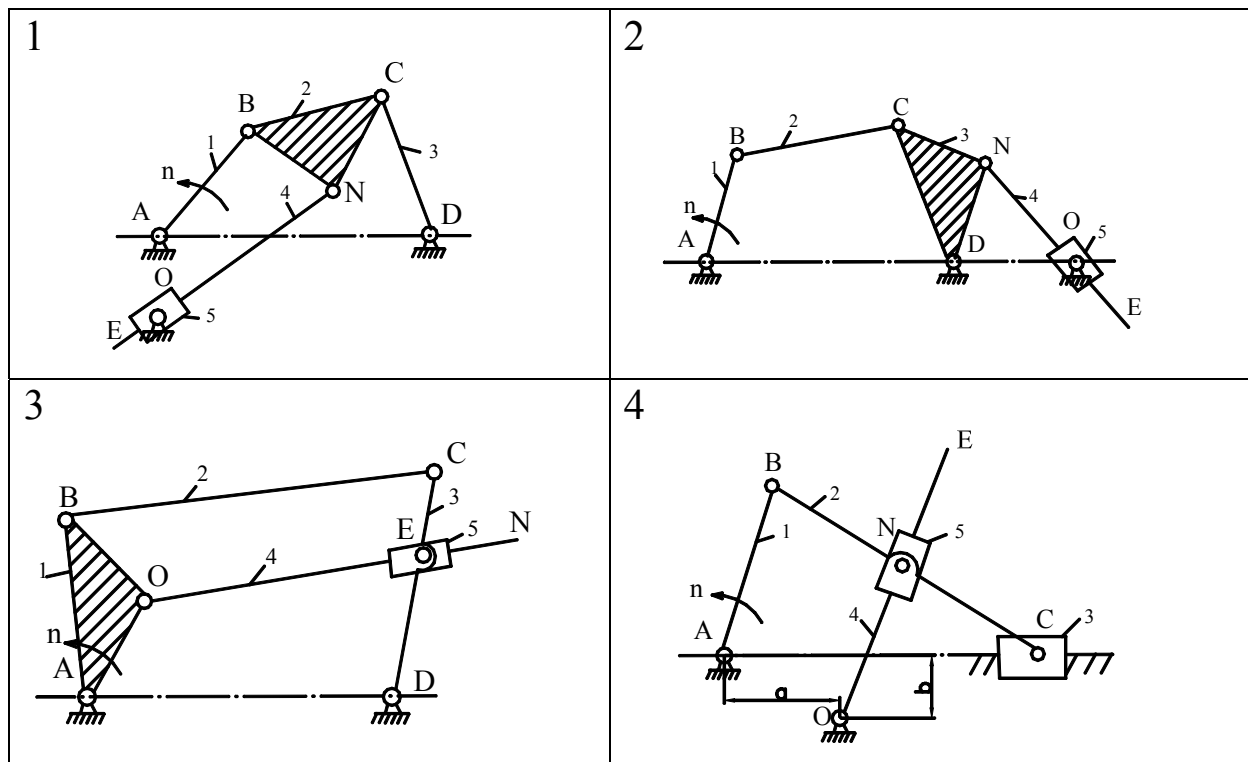
5. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтар жобасын тұрғызу тәсілімен табу қажет.

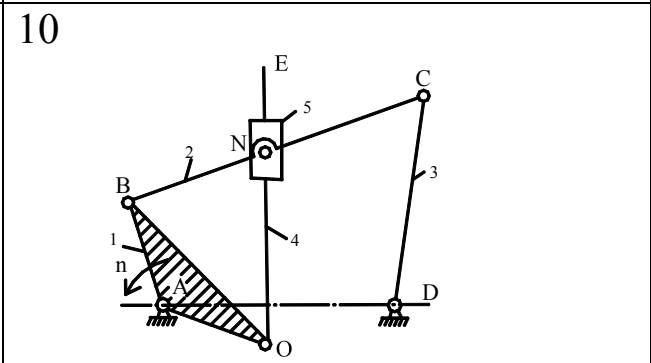
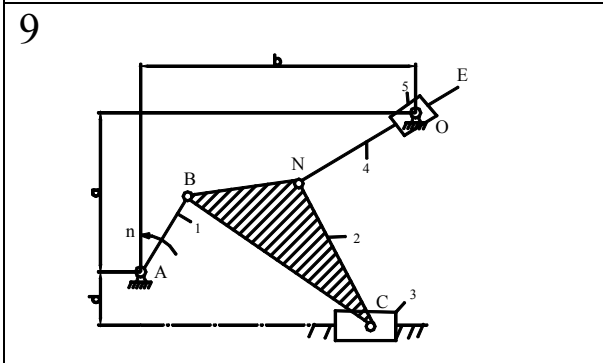
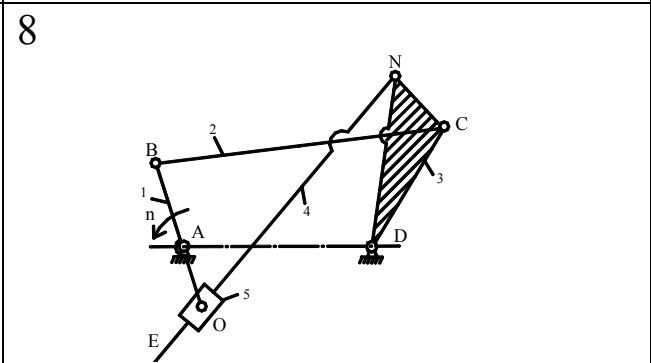
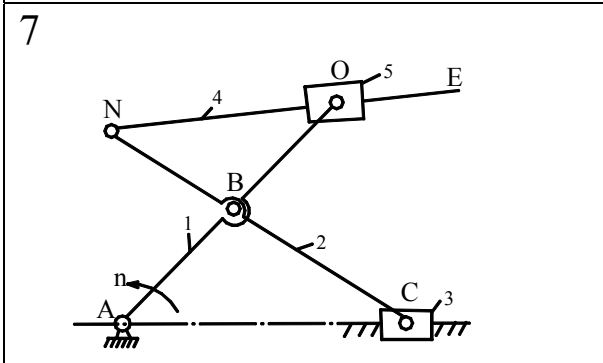
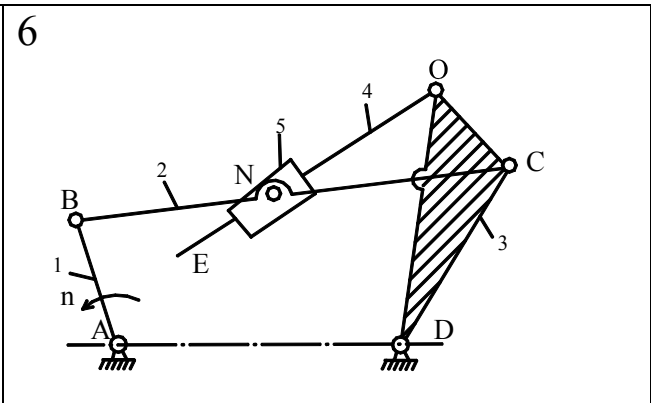
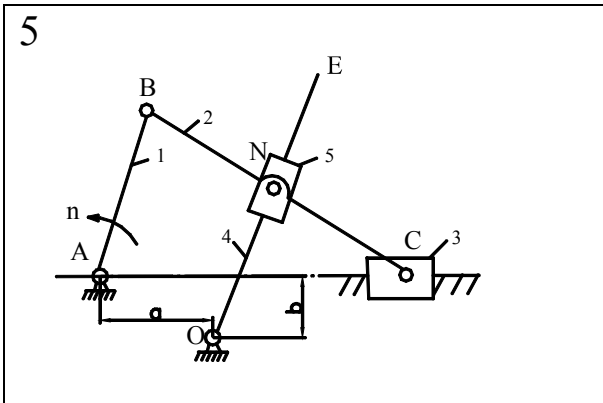
6. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін үдеулерді қосу теоремасын (проекциялық әдіс) пайдаланып табу қажет.

7. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен табу қажет.

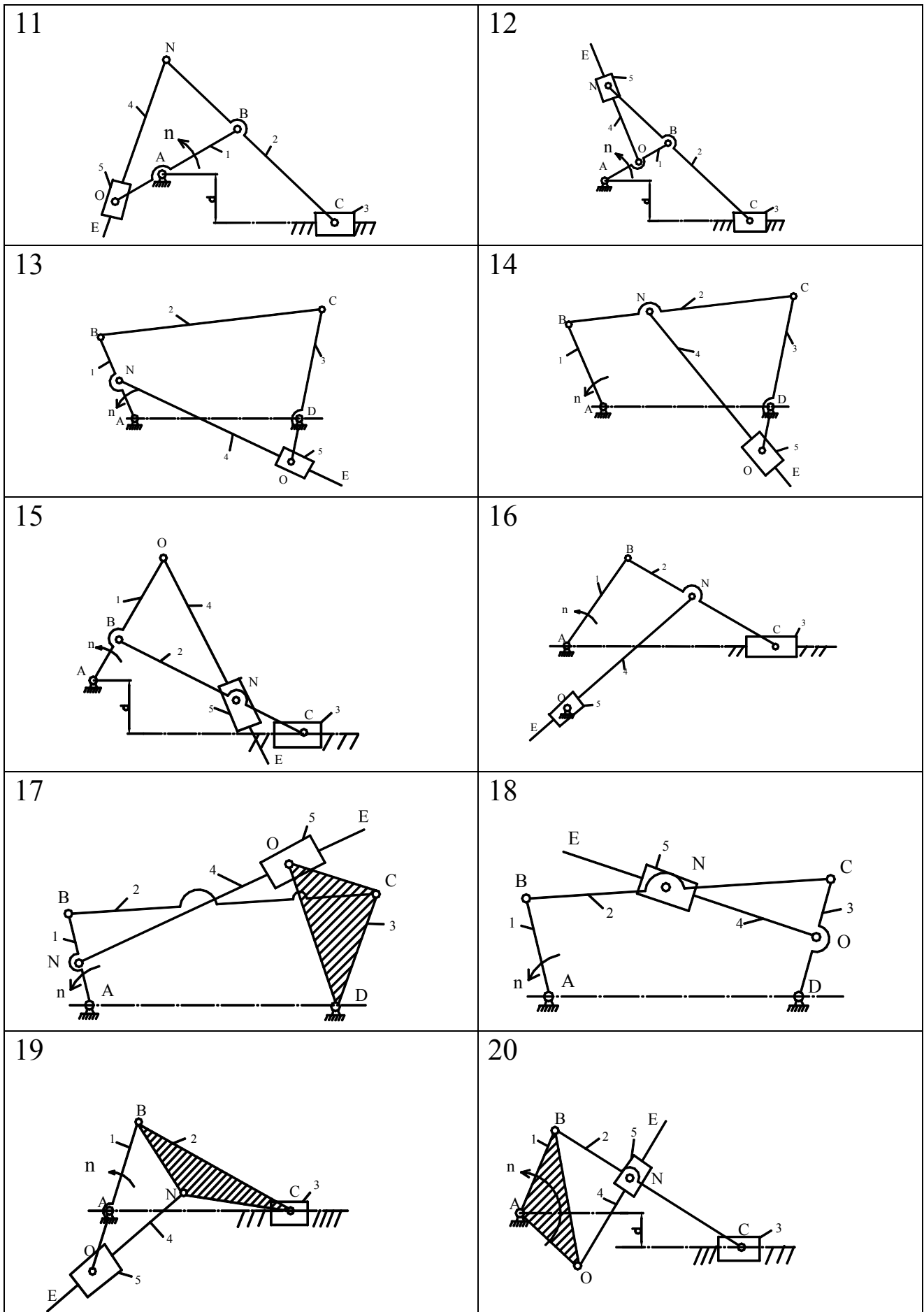
8. Кулисалы механизм нүктесінің абсолют жылдамдығының және үдеуінің құраушыларын табу қажет.

9. Кулисалы механизм буынының бұрыштық жылдамдығын және бұрыштық үдеуін электронды есептеу машинасының көмегімен табу қажет.

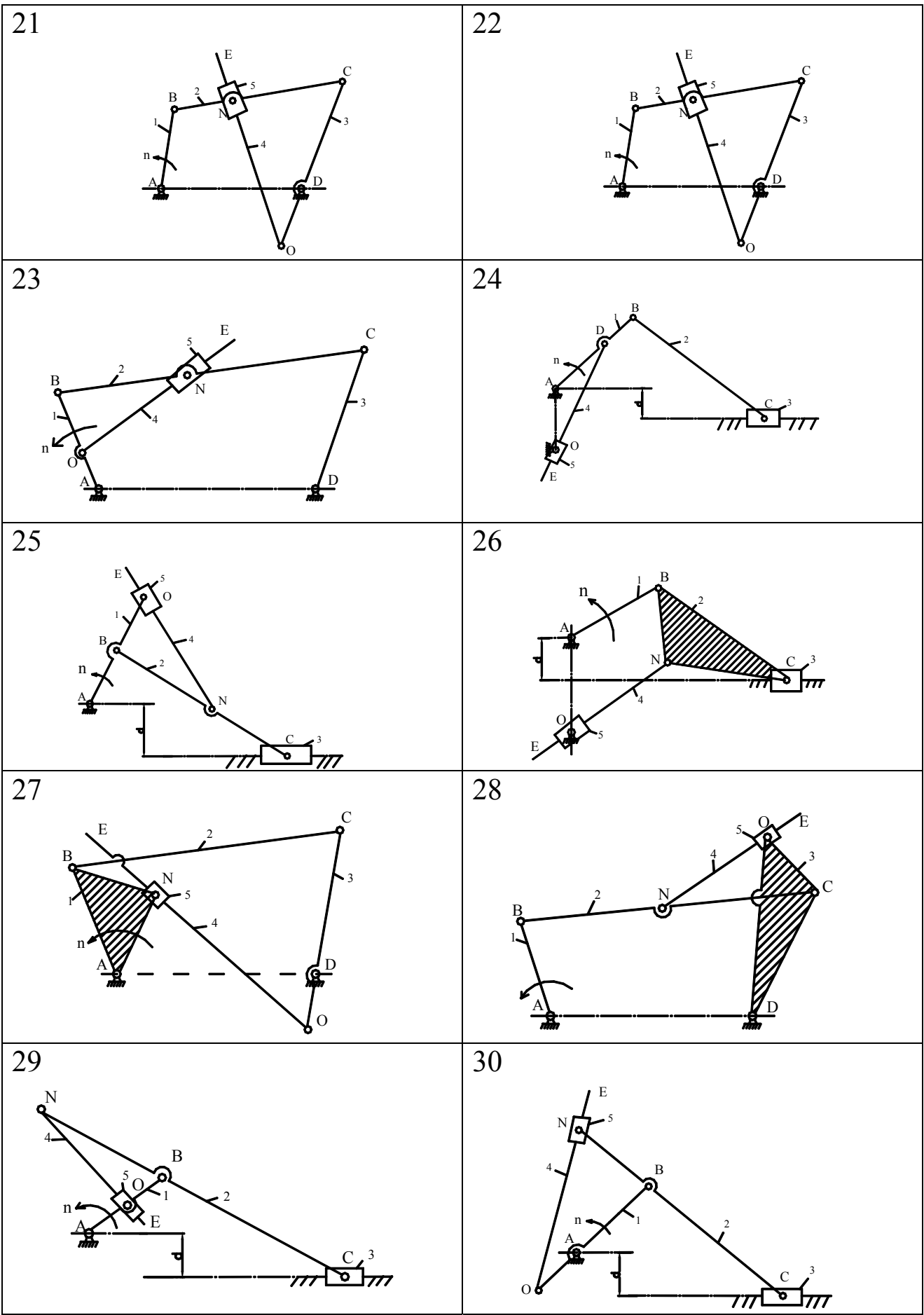




4.8.1-сурет



4.8.1-суреттің жалғасы



4.8.1-суреттің жалғасы

4.8.1-кесте

ТАБУ КЕРЕК													
Берілгені		Берілген нүкте үшін					Берілген механизмнің орны үшін					Механизмнің 12 орны үшін ω, ε -ді ЕЕМ көмегімен	
$\omega, 1/c$	$\varphi, \text{град}$	$x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$	$F_1(x, y) = 0$	v_x, v_y, v a_x, a_y, a точки	a_r, a_n, ρ точки	$s = f_1(t)$ $v = f_2(t)$ $a_r = f_3(t)$	v точек	ω звеньев	a точек	ε звеньев	U_r, U_e $a_r, a_e,$ a_c точек	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13
4	60	N	N	N	N	N	B, C, N, E	BC, CD NE	B, C, N, E	$BC, N, CD,$ NE	O_4	O_4	NE
5	120	C	C	C	C	N	B, C, N, E	BC, CD NE	B, C, N, E	$BC, CDN,$ NE	O_4	O_4	NE
4	30	C	C	C	C	C	B, O, C, E, N	BO, CD ON	B, O, C, E, N	$BC, CD,$ OE	E_4	E_4	DE
10	330	C	C	C	C	C	B, C, N, E	BC, OE	B, C, N, E	BC, OE	N_4	N_4	OE
10	150	C	C	C	C	C	B, C, O, N, E	BC, DN OE	B, C, O, N, E	BC, DN, OE	N_4	N_4	OE
3	90	C	C	C	C	C	B, C, O, N, E	BC, DO DE	B, C, O, N, E	$BC, DOC,$ OE	N_4	N_4	OE
4	210	N	N	N	N	N	B, O, C, N, E	ON, NE	B, O, C, N, E	CN, NE	O_4	O_4	NE
5	120	C	C	C	C	C	B, O, C, N, E	BC, DC NE	B, O, C, N, E	$BC, DCN,$ NE	O_4	O_4	NE
4	240	N	N	N	N	N	B, C, N, E	BN, NE	B, C, N, E	BCN, NE	O_4	O_4	NE
5	120	C	C	C	C	C	B, O, C, N, E	BC, CD OE	B, O, C, N, E	BC, CD OE	N_4	N_4	OE
4	30	N	N	N	N	N	B, O, C, N, E	BC, NE	B, O, C, N, E	BC, NE	O_4	O_4	NE
4	300	N	N	N	N	N	B, O, C, N, E	NC, OE	B, O, C, N, E	NC, OE	N_4	N_4	OE
5	150	C	C	C	C	C	B, N, C, O, E	BC, CD NE	B, N, C, O, E	$BC, CDO,$ NE	O_4	O_4	NE
5	210	N	N	N	N	N	B, C, O, N, E	BC, CD NE	B, C, O, N, E	$BC, CDO,$ NE	O_4	O_4	NE
3	30	N	N	N	N	N	B, C, O, N, E	BC, OE	B, C, O, N, E	BC, OE	N_4	N_4	OE
5	300	N	N	N	N	N	B, C, N, E	BC, NE	B, C, N, E	BC, NE	O_4	O_4	NE

8	150	C	C	C	C	C	C	C	B,N,C,O,E	BC,DC Nr	B,N,C,O,E	BC,DOC, NE	O ₄	NE
3	120	N	N	N	N	N	N	N	B,C,O,N,E	BC,CD OE	B,C,O,N,E	BC,CD OE	O ₄	OE
4	45	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	BC,NE	B,O,C,N,E	BCN, NE	N ₄	NE
4	150	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	BC,OE	B,O,C,N,E	BC, OE	O ₄	OE
4	240	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	BC,CD OE	B,O,C,N,E	BC,CDO, OE	N ₄	OE
8	210	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	BC,NE	B,O,C,N,E	BC, NE	N ₄	NE
8	450	C	C	C	C	C	C	C	B,O,C,N,E	BC,OD DE	B,O,C,N,E	BC,OD OE	O ₄	OE
5	300	C	C	C	C	C	C	C	B,D,C,E	BC,DE	B,D,C,E	BC, DE	N ₄	DE
3	330	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	BC,NE	B,O,C,N,E	BC, NE	O ₄	NE
5	180	N	N	N	N	N	N	N	B,C,N,E	BC,NE	B,C,N,E	BCN, NE	O ₄	NE
6	150	C	C	C	C	C	C	C	B,N,C,O,E	BC,OCOE	B,N,C,O,E	BO,CDO, OE	N ₄	OE
3	90	C	C	C	C	C	C	C	B,C,O,N,E	BC,OD NE	B,C,O,N,E	BC,ODC, NE	O ₄	NE
7	225	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	CBN,NE	B,O,C,N,E	CBN, NE	O ₄	NE
4	135	N	N	N	N	N	N	N	B,O,C,N,E	CBN,NE	B,O,C,N,E	OBN, OE	N ₄	NE

4.8.2-кесте

Варианттары	Белгіленуі														d			
	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	l_{AD}	l_{BN}	l_{CN}	l_{AO}	l_{NE}	l_{DN}	l_{DO}	l_{DE}	l_{OB}	l_{OE}	l_{OC}		l_{AN}	a	b
	Өлшем бірлігі, м																	
1	0,1	0,2	0,18	0,25	0,1	0,15	0,1	0,5										18
2	0,12	0,22	0,25	0,33		0,12		0,45	0,18	0,35								
3	0,15	0,35	0,3	0,3						0,25	0,07	0,45				0,125	0,15	
4	0,05	0,25		0,125								0,275						
5	0,12	0,3	0,24	0,26	0,14		0,1				0,2	0,52						
6	0,12	0,3	0,24	0,26		0,12			0,3		0,2	0,25	0,1					
7	0,1	0,3			0,1			0,4			0,2							
8	0,15	0,35	0,3	0,3		0,09	0,1	0,63	0,33									
9	0,1	0,3			0,18	0,21		0,42							0,15	0,4		0,04
10	0,21	0,4	0,36	0,4	0,2		0,15				0,33	0,6						
11	0,24	0,5			0,12		0,12	0,52										0,05
12	0,18	0,4			0,16						0,06	0,3						0,04
13	0,15	0,35	0,3	0,3	0,09			0,4		0,12								
14	0,18	0,4	0,35	0,4	0,12			0,5		0,16								
15	0,12	0,5			0,18						0,08	0,4						0,05
16	0,12	0,36			0,11		0,24	0,4										
17	0,24	0,46	0,1	0,4	0,12			0,395		0,4				0,4				
18	0,12	0,3	0,24	0,2		0,25						0,45	0,15					
19	0,16	0,4			0,25	0,28	0,14	0,6										
20	0,15	0,45			0,4		0,21				0,3	0,72						0,04
21	0,18	0,4	0,36	0,3	0,07					0,2		0,54						
22	0,12	0,4			0,14		0,2	0,5			0,1	0,5						
23	0,24	0,5	0,4	0,5	0,2		0,04											
24	0,17	0,55		0,1	0,3		0,32		0,35									0,04
25	0,12	0,6			0,3			0,4			0,5	0,08						0,05
26	0,18	0,4			0,18	0,23	0,16	0,42				0,08						0,04
27	0,21	0,4	0,35	0,4	0,09				0,12						0,15			
28	0,12	0,3	0,24	0,26		0,12		0,26	0,3					0,1				
29	0,24	0,6			0,08		0,12	0,25										0,03
30	0,15	0,35			0,1		0					0,3						0,03

Тапсырма мысалы. Берілгені: иіптіректі механизм (4.8.2-сурет), $\omega_{O_1A} = 2 \text{ рад/сек}$, $l_{O_1A} = 0,12 \text{ м}$, $l_{AB} = 0,12 \text{ м}$, $l_{O_1O_3} = 0,12 \text{ м}$, $l_{BC} = 0,12 \text{ м}$, $l_{DE} = 0,38 \text{ м}$, $l_{AF} = 0,06 \text{ м}$, $l_{O_2D} = 0,06 \text{ м}$, $l_{O_2C} = 0,24 \text{ м}$, $l_{DC} = 0,20 \text{ м}$, $a = 0,10 \text{ м}$, $b = 0,18 \text{ м}$.

1. Механизмнің сұлбасын, F нүктесінің 12 орнын (бастапқы буынның әрбір 30° бұрышына сәйкес) және траекториясын тұрғызу қажет.

2. Бас нүктесі O_1 декарттық координаттар жүйесіне қатысты F нүктесінің қозғалыс теңдеулерін құрастыру және траекториясын анықтау қажет.

3. φ_1 бұрышына сәйкес F нүктесінің жылдамдығын, үдеуін сонымен қатар жанама және нормаль құраушы үдеулерін, қисықтық радиусын табу қажет.

4. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтарын жылдамдықтар лездік центрі тәсілімен табу қажет.

5. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтарын, жылдамдықтар жобасын тұрғызу тәсілімен табу қажет.

6. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін үдеулерді қосу теоремасын (проекциялық әдіс) пайдаланып табу қажет.

7. φ_1 бұрышына сәйкес механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін, үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен табу қажет.

8. Кулисалы механизм F нүктесінің абсолют жылдамдығының және үдеуінің құраушыларын табу қажет.

9. Кулисалы механизм буынының бұрыштық жылдамдығын және бұрыштық үдеуін арнай компьютер көмегімен табу қажет.

Шешуі: 1. механизмнің сұлбасын, F нүктесінің 12 орнын және траекториясын тұрғызу. Механизмнің сұлбасын ұзындық масштабы μ_l -ге сәйкес тұрғызамыз. Егер біздің мысалда $l_{O_1A} = 0,12 \text{ м}$ буыны $(O_1a) = 30 \text{ мм}$ кесіндімен кескінделетін болса, онда ұзындық масштабы мынадай түрде анықталады

$$\mu_e = \frac{l_{O_1A}}{(O_1a)} = \frac{0,12 \text{ м}}{30 \text{ мм}} = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Осы масштабқа сәйкес механизм буындарының ұзындықтарын мынадай теңдіктер арқылы анықтаймыз

$$\begin{aligned} (AB) &= \frac{l_{AB}}{\mu_1} = \frac{0,12}{0,004} = 30\text{мм}, & (O_1O_3) &= \frac{l_{O_1O_3}}{\mu_1} = \frac{0,12}{0,004} = 30\text{мм}, \\ (BC) &= \frac{l_{BC}}{\mu_1} = \frac{0,12}{0,004} = 30\text{мм}, & (DE) &= \frac{l_{DE}}{\mu_1} = \frac{0,38}{0,004} = 95\text{мм}, \\ (AF) &= \frac{l_{AF}}{\mu_1} = \frac{0,06}{0,004} = 15\text{мм}, & (O_2D) &= \frac{l_{O_2D}}{\mu_1} = \frac{0,06}{0,004} = 15\text{мм}, \\ (O_2C) &= \frac{l_{O_2C}}{\mu_1} = \frac{0,24}{0,004} = 60\text{мм}, & (DC) &= \frac{l_{DC}}{\mu_1} = \frac{0,20}{0,004} = 50\text{мм}, \\ a &= \frac{a}{\mu_1} = \frac{0,10}{0,004} = 25\text{мм}, & b &= \frac{b}{\mu_1} = \frac{0,08}{0,004} = 20\text{мм}. \end{aligned}$$

Буындар ұзындықтарының осы мәндері бойынша механизмнің сұлбасын тұрғызамыз.

Бастапқы буынның әрбір 30° бұрышына сәйкес A_iB_i сәулелерінің бойында $(A_0, A_1, \dots, A_{12})$ нүктелерінен ұзындығы $(A_iF_i) = 15\text{мм}$ – ге тең кесінділер өлшеп салып F_i нүктелерінің орындарын анықтаймыз. Алынған A_0, A_1, \dots, A_{12} нүктелерін қисық сызықтармен қосып, O_1A буыны бір айналыс жасағандағы F нүктесінің траекториясын тұрғызамыз. F нүктесінің траекториясы эллипс болады (4.8.2 – сурет).

2. Механизмнің F нүктесінің қозғалыс теңдеулерін құрастыру және траекториясын анықтау. O_1A буыны бірқалыпты O_1 өсті айналмалы қозғалыста болғанда бұрыштық жылдамдығы мынадай түрде анықталады

$$\omega_{O_1A} = \frac{\varphi_1}{t} \text{ немесе } \varphi_1 = \omega_{O_1A} \cdot t = 2 \cdot t.$$

Бас нүктесі O_1 болатын xO_1y координаттар жүйесінде F нүктесінің орнын анықтай отырып, қозғалыс теңдеулерін құрамыз

$$x_F = 0,06 \cdot \cos(2t), \quad y_F = 0,18 \cdot \sin(2t).$$

F нүктесінің траекториясын анықтау үшін қозғалыс теңдеулерінен уақыт t -ны аластаймыз

$$\cos(2t) = \frac{x_F}{0,06}, \quad \sin(2t) = \frac{y_F}{0,18}.$$

Теңдіктің екі жағында квадраттап қосамыз

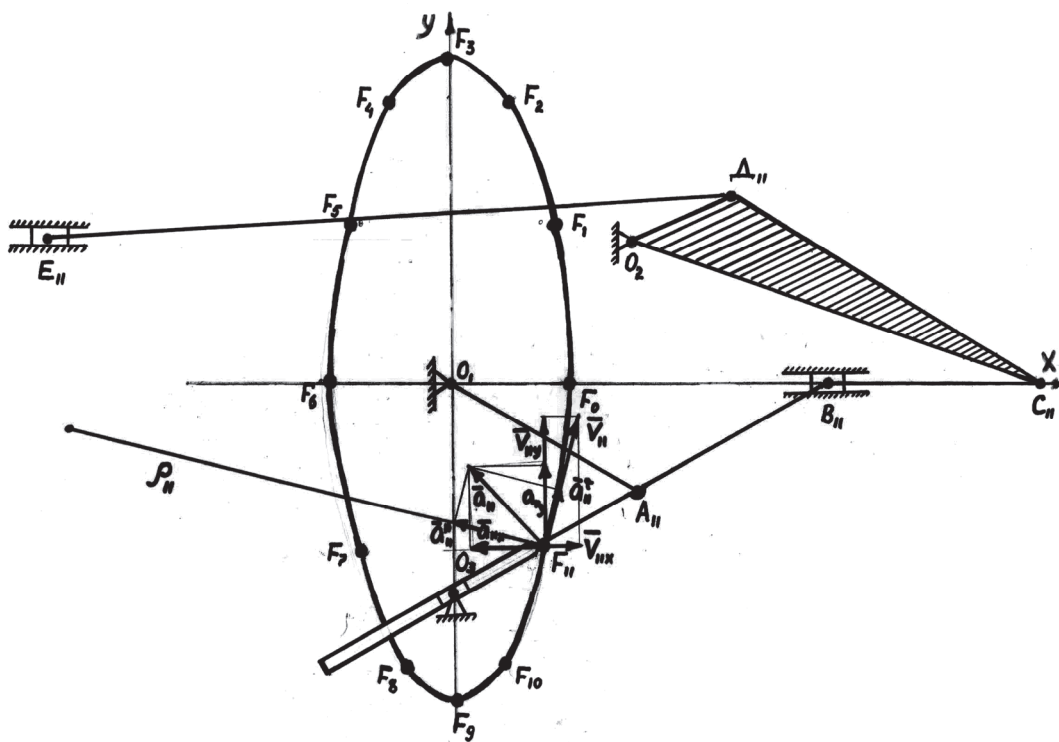
$$\frac{x_F^2}{(0,06)^2} + \frac{y_F^2}{(0,18)^2} = 1.$$

Бұл өрнек эллипстің теңдеуі.

3. F нүктесінің жылдамдығын, үдеуін, жанама және нормаль құраушы үдеулерін, қисықтық радиусын анықтау.

3.1. F нүктесінің жылдамдығын анықтау. F нүктесінің жылдамдығын координаттар өстеріне проекциялары арқылы анықтаймыз

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -0,12 \cdot \sin(2t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 0,36 \cdot \cos(2t).$$



4.8.2-сурет

Егер $\varphi_{11} = 2t = 330^\circ$ -қа тең болса, онда

$$v_{x_{11}} = 0,06 \text{ м/с}, \quad v_{y_{11}} = 0,31 \text{ м/с}.$$

F нүктесінің жылдамдығының шамасы

$$v_{11} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,32 \text{ м/с}.$$

3.2. F нүктесінің үдеуін анықтау. F нүктесінің үдеуін координаттар өстеріне проекциялары арқылы анықтаймыз

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0,24 \cdot \cos(2t), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -0,74 \cdot \sin(2t).$$

Егер $\varphi_{11} = 2t = 330^0$ -қа тең болса, онда

$$a_{x_{11}} = -0,206 \text{ м/с}, \quad a_{y_{11}} = 0,360 \text{ м/с}.$$

F нүктесінің үдеуінің шамасы:

$$a_{11} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0,415 \text{ м/с}.$$

3.3. F нүктесінің жанама құраушы үдеуін анықтау. F нүктесінің жанама құраушы үдеуі мынадай өрнек арқылы анықталады

$$a_{\tau_{11}} = \frac{v_{x_{11}} a_{x_{11}} + v_{y_{11}} a_{y_{11}}}{v_{11}}.$$

Егер $\varphi_{11} = 2t = 330^0$ -қа тең болса, онда

$$a_{\tau_{11}} = \frac{v_{x_{11}} a_{x_{11}} + v_{y_{11}} a_{y_{11}}}{v_{11}} = 0,31 \text{ м/с}^2.$$

3.4. F нүктесінің нормаль құраушы үдеуін анықтау. F нүктесінің нормаль құраушы үдеуі мынадай өрнек арқылы анықталады

$$a_{n_{11}} = \sqrt{a_{11}^2 - a_{\tau_{11}}^2} = 0,275 \text{ м/с}^2.$$

3.5. F нүктесінің қисықтық радиусын анықтау. F нүктесінің қисықтық радиусы мынадай өрнек арқылы анықталады

$$\rho_{11} = \frac{v_{11}^2}{a_{n_{11}}} = 0,371 \text{ м}.$$

4. Механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтарын жылдамдықтар лездік центрі тәсілімен анықтау.

4.1. Механизм нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау. Механизмнің орнын берілген φ_1 бұрышына сәйкес тұрғызамыз

$\left(\mu_l = 0,004 \frac{\text{м}}{\text{мм}} \right)$ (4.8.3-сурет). O_1A буыны қозғалмайтын O_1 центрін

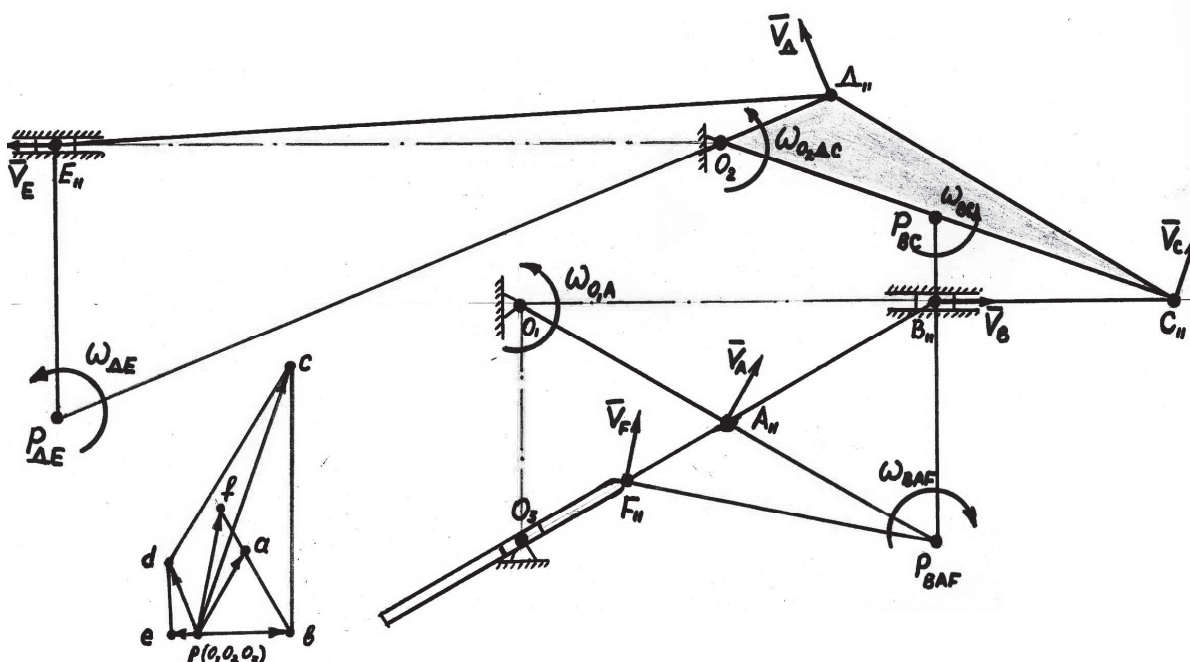
ω_{O_1A} бағытында айнала қозғалады, сондықтан

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot l_{O_1A} = 0,24 \text{ м/с}, \quad \bar{v}_A \perp O_1A.$$

Жылжыма B -ның қозғалысы түзу сызықты болғандықтан, жылжыманың жылдамдық векторы, қозғалыс бағытымен бағыттас болады.

ABF буынының жылдамдықтар лездік центрі P_{BAF} , B және A нүктелері арқылы жүргізілген жылдамдық векторларына

перпендикуляр түзулердің қиылысу нүктесі болады, ал F нүктесінің жылдамдық векторы FP_{BAF} кесіндісіне перпендикуляр бағытта бағыталады.



4.8.3-сурет

v_B және v_F шамаларын мынадай қатынастар арқылы анықтаймыз

$$\frac{v_A}{P_{ABF}A} = \frac{v_B}{P_{ABF}B}, \quad v_B = v_A \frac{P_{ABF}B}{P_{ABF}A} = 0,24 \text{ м/с},$$

$$\frac{v_A}{P_{ABF}A} = \frac{v_F}{P_{ABF}F}, \quad v_F = \frac{P_{ABF}F}{P_{ABF}A} v_A = 0,31 \text{ м/с}.$$

Жылдамдықтар лездік центріден нүктелерге дейінгі ара қашықтық суретте өлшенеді.

Алдында орындалған амалдарға ұқсас амалдарды орындай отырып, BC , O_2CD , DE буындарының сәйкес P_{BC} , O_2 , P_{DE} жылдамдықтар лездік центрлерінің орындарын анықтаймыз және v_C ,

v_D , v_E шамаларын мынадай қатынастар арқылы анықтаймыз

$$\frac{v_B}{P_{BC}B} = \frac{v_C}{P_{BC}C}, \quad v_C = \frac{P_{BC}C}{P_{BC}B} v_B = 0,72,$$

$$\frac{v_D}{O_2D} = \frac{v_C}{O_2C}, \quad v_D = \frac{O_2D}{O_2C} v_C = 0,18 \text{ м/с},$$

$$\frac{v_D}{P_{DE}D} = \frac{v_E}{P_{DE}E}, \quad v_E = \frac{P_{DE}E}{P_{DE}D} v_D = 0,065 \text{ м/с}.$$

4.2. Буындарының бұрыштық жылдамдықтарын анықтау. Механизм буындарының бұрыштық жылдамдықтары мынадай өрнектер арқылы есептеледі, ал бағыттары нүктелер жылдамдықтарының бағыттарымен анықталады

$$\omega_{ABF} = \frac{v_A}{\mu_l(P_{ABF}A)} = 2,07 \text{ рад/с}, \quad \omega_{BC} = \frac{v_B}{\mu_l(P_{ABF}B)} = 5,45 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{O_2DC} = \frac{v_C}{\mu_e(O_2C)} = 3 \text{ рад/с}, \quad \omega_{DE} = \frac{v_E}{\mu_e(P_{DE}E)} = 0,44 \text{ рад/с}.$$

5. Механизм нүктелерінің жылдамдықтарын және буындарының бұрыштық жылдамдықтарын жылдамдықтар жобасын тұрғызу тәсілімен анықтау.

5.1. Механизм нүктелерінің жылдамдықтарын анықтау.

Жетекші буын үшін A нүктесінің жылдамдығы $v_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A}$ формуласы бойынша аналиткалық түрде анықталады. Жылдамдықтар жобасының масштабын анықтаймыз

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot l_{O_1A} = 0,24 \text{ м/с}, \quad (pa) = 24 \text{ мм}, \quad \mu_v = \frac{v_A}{(pa)} = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Механизмнің қалған нүктелері (B, F, C, D, E) үшін жылдамдықтары, векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы және ұқсастық ережесі бойынша анықталады.

B нүктесінің жылдамдығын мынадай векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы анықтаймыз

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad \bar{v}_A \perp O_1A, \quad \bar{v}_{BA} \perp AB, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_{B_0} + \bar{v}_{BB_0}, \quad \bar{v}_{BB_0} \parallel xx,$$

Мұндағы:

вектор \bar{v}_A – шамасы және бағыты жөнінен белгілі (O_1A түзуіне перпендикуляр және O_1A буынының бұрыштық жылдамдығының бағытымен бағыттас);

вектор \bar{v}_{BA} – B нүктесінің AB буыны A нүктесіне қатысты айнала қозғалғандағы жылдамдығы, бағыты AB түзуіне перпендикуляр, шамасы белгісіз;

вектор \bar{v}_{B_0} – тоғызыншы тірек нүктесінің жылдамдығы $\bar{v}_{B_0} = 0$;

вектор \bar{v}_{BB_0} – B нүктесінің тірекке қатысты салыстырмалы жылдамдығы, бағыты xx түзуі бойымен сәйкес, шамасы белгісіз;

вектор \bar{v}_B – B нүктесінің ізделініп отырған жылдамдығы, бағыты xx түзуі бойымен бағыттас, шамасы белгісіз.

Жылдамдықтар жобасын төмендегі тәртіп бойынша тұрғызамыз:

бірінші теңдеуге сәйкес жобаның полюсінен (еркін алынған p нүктесі) бастап, O_1A түзуіне перпендикуляр, жобада A нүктесінің жылдамдығы үшін, ұзындығы $(pa)=24\text{ мм}$ кесіндісін саламыз;

a нүктесінен AB түзуіне перпендикуляр \bar{v}_{BA} жылдамдығының бағытын саламыз;

екінші векторлық теңдеуге сәйкес $\bar{v}_{B_0} = 0$ болғандықтан, жобаның полюсінен xx – ке параллель бағытта \bar{v}_{BB_0} жылдамдығының бағытын саламыз. Сонымен, B нүктесінің жылдамдық соңы болатын b нүктесін табамыз. (pa) және (pb) кесінділері μ_v масштабында \bar{v}_A және \bar{v}_B жылдамдықтарын кескіндейді.

C, D, E нүктелерінің жылдамдықтарын мынадай векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы анықтайды

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{CO_2}, \quad \bar{v}_{CO_2} \perp O_2C, \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB}, \quad \bar{v}_{CB} \perp BC,$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}, \quad \bar{v}_{DC} \perp DC, \quad \bar{v}_D = \bar{v}_{O_2} + \bar{v}_{DO_2}, \quad \bar{v}_{DO_2} \perp DO_2,$$

$$\bar{v}_E = \bar{v}_D + \bar{v}_{ED}, \quad \bar{v}_{ED} \perp ED, \quad \bar{v}_E = \bar{v}_{E_0} + \bar{v}_{EE_0}, \quad \bar{v}_{EE_0} \parallel xx.$$

B, C, D, E нүктелерінің жылдамдықтарының шамалары жылдамдықтар жобасының масштабы арқылы анықтаймыз

$$v_B = (pb) \cdot \mu_v = 0,24 \text{ м/с}, \quad v_{AB} = (ab) \cdot \mu_v = 0,24 \text{ м/с},$$

$$v_C = (pc) \cdot \mu_v = 0,7 \text{ м/с}, \quad v_D = (pd) \cdot \mu_v = 0,18 \text{ м/с},$$

$$v_E = (pe) \cdot \mu_v = 0,07 \text{ м/с}.$$

F нүктесінің жылдамдығын ұқсастық ережесі бойынша анықтайды

$$\frac{(af)}{(ab)} = \frac{(AF)}{(AB)}, \quad (af) = \frac{(AF)}{(AB)}(ab) = 12 \text{ мм}, \quad v_F = (af) \cdot \mu_v = 0,32 \text{ м/с}.$$

5.2. Бұрыштық жылдамдықтарын анықтау. Механизм буындарының бұрыштық жылдамдықтары мынадай өрнектер арқылы есептеледі

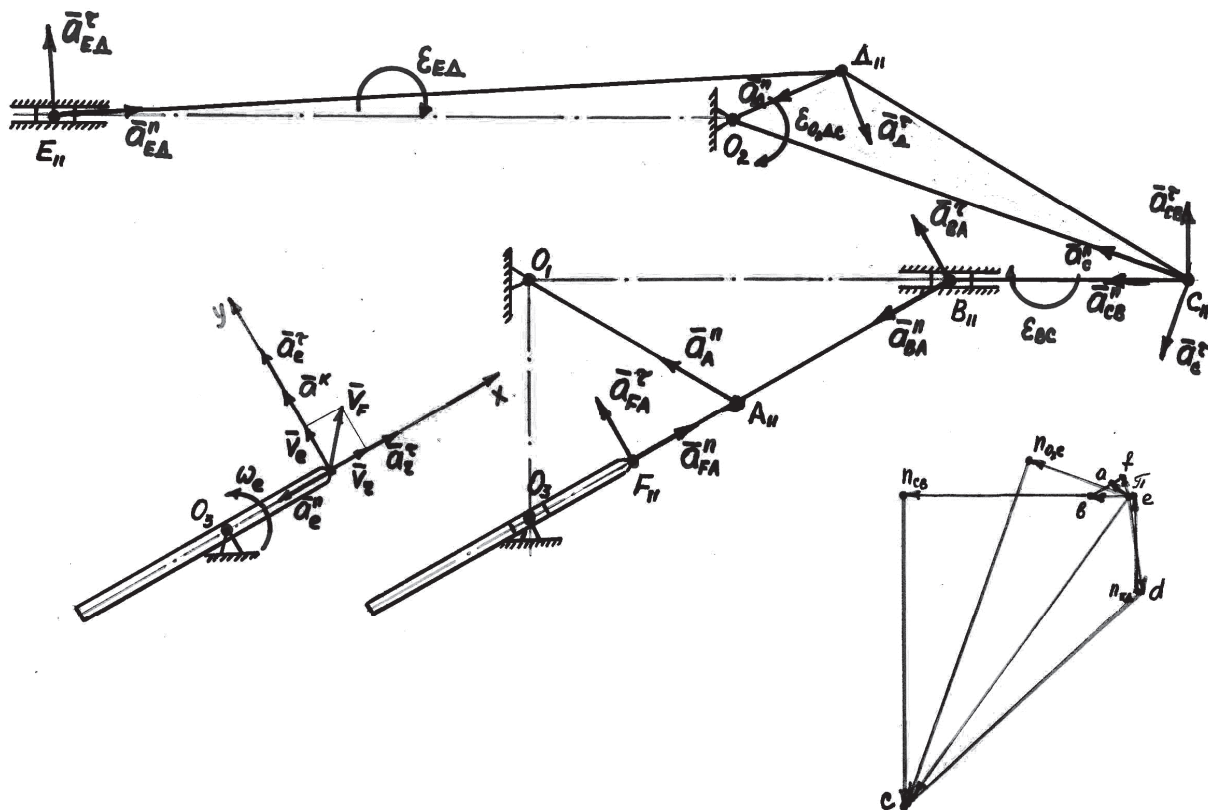
$$\omega_{BAF} = \frac{(ab) \cdot \mu_v}{(AB)} = 2 \text{ рад/с}, \quad \omega_{BC} = \frac{(bc) \cdot \mu_v}{(BC)} = 5,58 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{O_2DC} = \frac{(dc) \cdot \mu_v}{(DC)} = 3 \text{ рад/с}, \quad \omega_{ED} = \frac{(ed) \cdot \mu_v}{(ED)} = 0,45 \text{ рад/с}.$$

6. Механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін үдеулерді қосу теоремасын (проекциялық әдіс) пайдаланып анықтау.

6.1. Механизм нүктелерінің үдеулерін анықтау. B нүктесінің толық үдеуін, мына формуланы қолдану арқылы табамыз

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^r,$$



4.8.4-сурет

мұндағы вектор \bar{a}_A^n – полюс ретінде қабылданған нүктенің үдеуі, шамасы $a_A = a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2$, O_1 айналу центріне қарай бағытталады; вектор \bar{a}_{AB}^n – центрге тартқыш үдеу, модулі $a_A^n = \omega_{AB}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2$, AB бойымен полюске қарай бағытталады; вектор \bar{a}_{AB}^r – айналдырушы үдеу, шамасы белгісіз, AB -ға перпендикуляр айналыс болатын жаққа қарай бағытталады.

B нүктесінің толық үдеуі \bar{a}_B – ны және \bar{a}_{AB}^r – айналдырушы үдеуді табу үшін векторлық теңдіктің екі жағында координаттар өстеріне проекциялаймыз

$$a_B = -a_A^n \cdot \cos 30^0 - a_{AB}^n \cdot \cos 30^0 + a_{AB}^\tau \cdot \cos 60^0,$$

$$0 = -a_{AB}^\tau \cdot \sin 60^0 - a_{AB}^n \cdot \sin 30^0 + a_A \cdot \sin 30^0.$$

Осы соңғы теңдіктердің көмегімен, іздеп отырған үдеулерді табамыз

$$a_{AB}^\tau = \frac{0,5 \cdot (a_A^n - a_{AB}^n)}{0,86} = 0, \quad a_B = -0,826 \text{ м/с}^2.$$

BAF буынының бұрыштық үдеуі

$$\varepsilon_{BAF} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = 0.$$

F нүктесінің толық үдеуін мынадай векторлық формуланы қолдану арқылы анықтаймыз

$$\bar{a}_F = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{FA}^n + \bar{a}_{FA}^\tau,$$

мұндағы вектор \bar{a}_A^n – полюс ретінде қабылданған нүктенің үдеуі, шамасы $a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2$, O_1 айналу центріне қарай бағытталады. вектор \bar{a}_{FA}^n – центрге тартқыш үдеу, модулі $a_{FA}^n = \omega_{FAB}^2 \cdot l_{AF} = 0,24 \text{ м/с}^2$, AB бойымен полюске қарай бағытталады. Үшінші вектор \bar{a}_{AB}^τ – айналдырушы үдеу, модулі

$$a_{FA}^\tau = \varepsilon_{BAF} \cdot (AF) = 0.$$

Алдыңғы векторлық теңдіктің екі жағында BAF бойымен бағытталған өске және оған перпендикуляр өске проекциялаймыз

$$a_{F_x} = a_{FA}^n - a_A \cdot \sin 30^0 = 0, \quad a_{F_y} = a_A \cdot \cos 30^0 = 0,41 \text{ м/с}.$$

Осыдан

$$a_{F_x} = 0, \quad a_{F_y} = 0,41 \text{ м/с}, \quad a_F = a_{F_y} = 0,41 \text{ м/с}.$$

C нүктесінің толық үдеуін, мынадай векторлық теңдеулерді құру арқылы анықтаймыз

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau,$$

мұндағы:

вектор \bar{a}_B – полюс ретінде қабылданған нүктенің үдеуі, шамасы $a_B = -0,826 \text{ м/с}^2$;

вектор \bar{a}_{BC}^n – центрге тартқыш үдеу, шамасы $a_{BC}^n = \omega_{BC}^2 \cdot l_{BC} = 3,63 \text{ м/с}^2$, BC бойымен полюске қарай бағытталады;

вектор \bar{a}_{BC}^τ – айналдырушы үдеу, шамасы $a_{BC}^\tau = \varepsilon_{BC} \cdot l_{BC}$ белгісіз;

вектор \bar{a}_C^n – центрге тартқыш үдеу, шамасы $a_C^n = \omega_{O_1DC}^2 \cdot l_{O_2C} = 2,16 м / с^2$, O_2 айналу центріне қарай бағытталады;

вектор \bar{a}_C^τ – айналдырушы үдеу, шамасы белгісіз, O_2C -ға перпендикуляр айналыс болатын жаққа қарай бағытталады.

Алдыңғы векторлық теңдіктің екі жағында координаттар өстеріне проекциялаймыз

$$-a_C^n \cdot \cos 20^\circ + a_C^\tau \cdot \cos 70^\circ = -a_B - a_{BC}^n,$$

$$a_C^n \sin 20^\circ + a_C^\tau \sin 70^\circ = a_{BC}^\tau.$$

Осыдан

$$a_C^\tau = \frac{a_C^n \cdot \cos 20^\circ - a_B - a_{BC}^n}{\cos 70^\circ} = -6,07 м / с^2,$$

$$a_{BC}^\tau = 2,16 \cdot 0,34 - 6,07 \cdot 0,94 = -4,97 м / с^2,$$

$$a_C = \sqrt{(a_C^\tau)^2 + (a_C^n)^2} = 6,38 м / с^2.$$

BC және O_2CD буындарының бұрыштық үдеулері мынадай өрнектер арқылы есептеледі

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{BC}} = 41,42 \text{ рад} / с^2, \varepsilon_{O_2DC} = \frac{a_C^\tau}{l_{O_2C}} = 25,29 \text{ рад} / с^2.$$

D нүктесінің толық үдеуін, мынадай векторлық теңдеу құру арқылы анықтаймыз

$$\bar{a}_D = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau,$$

мұндағы вектор \bar{a}_D^n -- центрге тартқыш үдеу, шамасы

$$a_D^n = \omega_{O_2DC}^2 \cdot l_{O_2D} = 0,54 м / с^2, O_2D \text{ бойымен айналу центріне қарай}$$

бағытталады, ал вектор \bar{a}_D^τ – айналдырушы үдеу, шамасы

$$a_D^\tau = \varepsilon_{O_2DC} \cdot l_{O_2D} = 1,52 м / с^2. D \text{ нүктесінің толық үдеу шамасы}$$

$$a_D = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_D^\tau)^2} = 1,56 м / с^2.$$

E нүктесінің толық үдеуін, мынадай векторлық теңдеу құру арқылы анықтаймыз

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D^n + \bar{a}_D^\tau + \bar{a}_{ED}^n + \bar{a}_{ED}^\tau,$$

мұндағы:

векторлар $\bar{a}_D^n, \bar{a}_D^\tau$ – шамалары және бағыттары жөнінен белгілі;

вектор \bar{a}_{ED}^n -центрге тартқыш үдеу, шамасы

$$a_{ED}^n = \omega_{ED}^2 \cdot l_{ED} = 0,076 м / с^2, ED \text{ бойымен полюске қарай бағытталады;}$$

вектор \bar{a}_{ED}^{τ} – айналдырушы үдеу, шамасы $a_{ED}^{\tau} = \varepsilon_{ED} \cdot l_{ED}$ белгісіз, ED -ға перпендикуляр айналыс болатын жаққа қарай бағытталады.

Алдыңғы векторлық теңдіктің екі жағында координаттар өстеріне проекциялаймыз

$$a_E \cdot \cos 5^0 = -a_{ED}^n + a_D^n \cdot \cos 20^0 - a_D^{\tau} \cdot \sin 20^0,$$

$$a_E \sin 5^0 = a_D^{\tau} \cos 20^0 - a_D^n \sin 20^0 + a_{ED}^{\tau}.$$

Осыдан

$$a_E = \frac{-a_{ED}^n + a_D^n \cdot \cos 20^0 - a_D^{\tau} \sin 20^0}{\cos 5^0} = -0,056 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{ED}^{\tau} = a_E \sin 5^0 - a_D^{\tau} \cos 20^0 + a_D^n \sin 20^0 = 1,68 \text{ м/с}.$$

6.2. Буындарының бұрыштық үдеулерін анықтау. Механизм буындарының бұрыштық үдеулері мынадай өрнектер арқылы есептеледі

$$\varepsilon_{BAF} = \frac{a_{AB}^{\tau}}{l_{AB}} = 0, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{a_{BC}^{\tau}}{l_{BC}} = 41,42 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varepsilon_{O_2DC} = \frac{a_C^{\tau}}{l_{O_2C}} = 25,29 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{ED} = \frac{a_{ED}^{\tau}}{l_{ED}} = 4,44 \text{ рад/с}^2.$$

7. Механизм нүктелерінің үдеулерін және буындарының бұрыштық үдеулерін үдеулер жобасын тұрғызу тәсілімен анықтау.

7.1. Механизм нүктелерінің үдеулерін анықтау. Үдеулер жобасын $\omega_1 = const$ болатынын ескере отырып тұрғызамыз. Бастапқы буын үшін A нүктесінің үдеуі $a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ формуласы бойынша аналитикалық түрде анықталады. Механизмнің қалған нүктелері (B, F, C, D, E) үшін үдеулері, векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы және ұқсастық ережесі бойынша анықталады.

B нүктесінің үдеуін мынадай векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы анықтайды

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^{\tau}, \quad \bar{a}_A^n \parallel O_1A, \quad \bar{a}_{AB}^n \parallel AB, \quad \bar{a}_{AB}^{\tau} \perp AB,$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B_0} + \bar{a}_{BB_0}, \quad \bar{a}_{B_0} = 0, \quad \bar{a}_{BB_0} \parallel xx,$$

мұндағы вектор \bar{a}_A^n – полюс ретінде қабылданған нүктенің үдеуі, шамасы $a_A = a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2$, O_1A -ға параллель;

вектор \bar{a}_{AB}^n – центрге тартқыш үдеу, шамасы $a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2$, AB -ға параллель;

вектор \bar{a}_{AB}^{τ} – айналдырушы үдеу, шамасы белгісіз, AB -ға перпендикуляр;

вектор \bar{a}_{B_0} – тіректе жататын нүктесінің үдеуі, шамасы $\bar{a}_{B_0} = 0$;

вектор \bar{a}_{BB_0} – B нүктесінің тіреке қатысты салыстырмалы үдеуі, шамасы белгісіз, xx -ке параллель.

Үдеулер жобасын мынадай тәртіп бойынша тұрғызамыз:

бірінші векторлық теңдеуге сәйкес жобаның полюсінен (еркін алынған π нүктесі) бастап, O_1A түзуіне параллель, жобада A нүктесінің үдеуі үшін, ұзындығы $(\pi a) = 6 \text{ мм}$ кесіндісін саламыз;

a нүктесінен AB түзуіне параллель \bar{a}_{AB}^n үдеуін кескіндейтін ұзындығы мынадай теңдікпен анықталатын $(an_{AB}) = a_{AB}^n / \mu_a$ кесіндісін саламыз;

n_{AB} нүктесінен AB түзуіне перпендикуляр түзу саламыз;

екінші векторлық теңдеуге сәйкес жобаның полюсінен бастап xx түзуіне параллель түзу саламыз. Осы түзу n_{AB} нүктесінен AB түзуіне перпендикуляр түзумен b нүктесінде қиылысады. (πa) , (an_{AB}) , $(n_{AB}b)$, (πb) , кесінділері μ_a масштабында \bar{a}_A^n , \bar{a}_{AB}^n , \bar{a}_{AB}^{τ} , \bar{a}_B үдеулерін кескіндейді.

C, E нүктелерінің үдеулерін мынадай векторлық теңдеулерді графикалық жолмен шешу арқылы анықтаймыз

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^{\tau}, \quad \bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^{\tau},$$

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{DE}^n + \bar{a}_{DE}^{\tau}, \quad \bar{a}_E = \bar{a}_E^n + \bar{a}_{EE_0}^{\tau}.$$

B, C, E нүктелерінің үдеулерінің шамаларын анықтау үшін, үдеулер жобасының масштабын анықтаймыз

$$a_A = a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot l_{AB} = 0,48 \text{ м/с}^2, \quad \mu_a = \frac{a_A}{(\pi a)} = 0,08 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Сонда

$$(\pi n_{AB}) = \frac{a_{AB}^n}{\mu_a} = 6 \text{ мм}, \quad (\pi b) = 10,8 \text{ мм}, \quad a_B = (\pi b) \cdot \mu_a = 0,83 \text{ м/с}^2.$$

$$(bn_{BC}) = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a} = 47,1 \text{ мм}, \quad (\pi n_C) = \frac{a_C^n}{\mu_a} = 27 \text{ мм},$$

$$(ba_C) = (\pi c) \cdot \mu_a = 6,48 \text{ м/с}^2. \quad a_E = (\pi e) \cdot \mu_a = 0,08 \text{ м/с}^2.$$

F және D нүктелерінің үдеулерін ұқсастық ережесі бойынша анықтайды

$$\frac{(af)}{(ab)} = \frac{(AF)}{(AB)}, \quad (af) = (ab) \cdot \frac{(AF)}{(AB)} = 6 \cdot \frac{0,06}{0,12} = 3 \text{ мм},$$

$$a_F = (\pi f) \cdot \mu_a = 5 \cdot 0,08 = 0,4 \text{ м/с}^2,$$

$$\frac{(\pi d)}{(\pi c)} = \frac{(O_2 D)}{(O_2 C)}, \quad (\pi d) = (\pi c) \frac{(O_2 D)}{(O_2 C)} = 20,25 \text{ мм},$$

$$\frac{(dc)}{(\pi c)} = \frac{(DC)}{(O_2 C)}, \quad (dc) = (\pi c) \frac{(DC)}{(O_2 C)} = 67,3 \text{ мм},$$

$$a_D = (\pi d) \cdot \mu_a = 1,62 \text{ м/с}^2.$$

7.2. Бұрыштық үдеулерін анықтау. Механизм буындарының бұрыштық үдеулері мынадай өрнектер арқылы есептеледі

$$\varepsilon_{BAF} = \frac{\mu_a \cdot (n_{AB} b)}{l_{AB}} = 0, \quad \varepsilon_{BC} = \frac{\mu_a \cdot (n_{BC} c)}{l_{BC}} = 44,6 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varepsilon_{O_2 DC} = \frac{\mu_a \cdot (n_{O_2 C} c)}{l_{O_2 C}} = 26 \text{ рад/с}^2, \quad \varepsilon_{DE} = \frac{\mu_a \cdot (n_{ED} d)}{l_{ED}} = 4,42 \text{ рад/с}^2.$$

8. Кулисасы механизм буынының бұрыштық жылдамдығын, бұрыштық үдеуін арнайы компьютер көмегімен анықтау. Кулисасы механизмнің кез келген орны үшін мынадай векторлық теңдіктерді құрамыз

$$\overline{O_1 F} = \overline{O_1 B} + \overline{BF}, \quad \overline{O_1 B} = \overline{O_1 A} + \overline{AB}, \quad \overline{O_3 F} = \overline{O_3 O_1} + \overline{O_1 F},$$

$$\text{немесе } \overline{O_3 F} = \overline{O_3 O_1} + \overline{O_1 A} + \overline{AB} + \overline{BF}.$$

Теңдіктердің екі жағында координаттар өстеріне проекциялаймыз $S \cdot \cos \theta = 0,12 \cdot \cos(2t) + 0,12 \cdot \cos(2t) - 0,18 \cdot \cos(2t) = 0,06 \cdot \cos(2t)$,

$$S \cdot \sin \theta = 0,12 + 0,12 \cdot \sin(2t) - 0,12 \cdot \sin(2t) + 0,18 \sin(2t) = 0,12 + 0,18 \sin(2t).$$

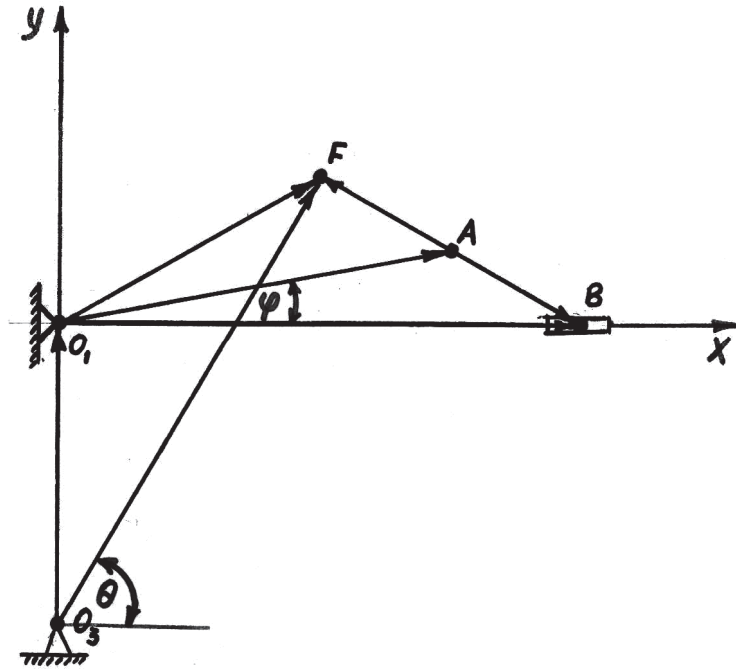
Уақыт бойынша екі рет дифференциалдаймыз. Бір рет дифференциалдасақ бұрыштық жылдамдық $\dot{\theta}$ және салыстырмалы жылдамдық \dot{S} – ге қатысты алгебралық теңдеулерді аламыз

$$\dot{S} \cdot \cos \theta - S \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = -0,12 \cdot \sin(2t),$$

$$\dot{S} \cdot \sin \theta + S \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = 0,36 \cdot \cos(2t),$$

$$\dot{S} \cdot \cos \theta - S \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = -0,12 \cdot \sin(2t),$$

$$\dot{S} \cdot \sin \theta + S \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = 0,36 \cdot \cos(2t).$$



4.8.5-сурет

Екінші рет дифференциалдасақ бұрыштық үдеу $\ddot{\theta}$ және салыстырмалы үдеу \ddot{S} – ге қатысты алгебралық теңдеулерді аламыз

$$\dot{S} \cdot \cos \theta - S \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = -0,12 \cdot \sin(2t),$$

$$\dot{S} \cdot \sin \theta + S \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta = 0,36 \cdot \cos(2t).$$

Екінші рет дифференциалдасақ, бұрыштық үдеу $\ddot{\theta}$ және салыстырмалы үдеу \ddot{S} – ге қатысты алгебралық теңдеулерді аламыз

$$\ddot{S} \cdot \cos \theta - 2 \cdot \dot{S} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta - S \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - S \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta = -0,24 \cdot \cos(2t),$$

$$\ddot{S} \cdot \sin \theta + 2 \cdot \dot{S} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta + S \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - S \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta = -0,72 \cdot \sin(2t).$$

Екі теңдеулер жүйесін $\dot{S}, \dot{\theta}$ және $\ddot{S}, \ddot{\theta}$ – ге қатысты шешеміз

$$\dot{S} = 0,36 \cdot \cos 2t \cdot \cos \theta - 0,12 \cdot \sin(2t) \cdot \sin \theta, \quad (*)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{S} (0,36 \cdot \cos(2t) \cdot \cos \theta + 0,12 \cdot \sin(2t) \cdot \sin \theta),$$

$$\ddot{S} = S \cdot \dot{\theta}^2 - 0,24 \cdot \cos(2t) \cdot \sin \theta - 0,72 \cdot \sin(2t) \cdot \cos \theta, \quad (**)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{S} (-2 \cdot \dot{S} \cdot \dot{\theta} - 0,72 \cdot \sin(2t) \cdot \cos \theta + 0,24 \cdot \cos(2t) \cdot \sin \theta).$$

Программаны жазу

АК көмегімен (*) және (**) теңдеулер жүйесін шешеміз. Қадамы

басылым қадамына тең Эйлер әдісін пайдаланамыз. $\Delta t = \frac{\pi}{12}$ – уақытқа

байланысты қадам, I – интеграция номері, мынадай шекті аралықта өзгереді $0 \leq I \leq 12$.

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6,$$

A_1 – берілгенін енгізу;

A_2 – (*) теңдеулерінің шешімі, $\dot{S}, \dot{\theta}$ – ні анықтау;

A_3 – (**) теңдеулерінің шешімі, $\ddot{S}, \ddot{\theta}$ – ні анықтау;

A_4 – қорытындыларды печатқа беру;

A_5 – егер $i < 12$ болса, онда есептеуді қайталау;

A_6 – жұмыстың соңы.

4.8.2-кесте

T	θ	φ	θ	S	$\dot{\theta}$	\dot{S}	$\ddot{\theta}$	\ddot{S}
0	0,0	0,0	1,1071	0,1342	1,2000	-4,1600	0,3220	0,0859
1	0,2616	0,5236	1,3282	0,2163	0,6154	-1,1069	0,2882	-0,3175
2	0,5236	1,0472	1,4525	0,2775	0,4424	-0,3477	0,1677	-0,5785
3	0,7854	1,5708	1,5708	0,3000	0,4000	0,0000	0,0000	-0,6720
4	1,0472	2,0944	1,6791	0,2775	0,4424	0,3478	-0,1677	-0,5785
5	1,3090	2,6180	1,8134	0,2163	0,6154	1,1969	-0,2882	-0,3175
6	1,5708	3,1416	2,0345	0,1342	1,2000	4,1602	-0,3220	0,0859
7	1,8326	3,6652	2,6180	0,0606	4,0001	20,7848	-0,2078	0,9500
8	2,0944	4,1888	4,0161	0,0468	4,1729	-19,3298	0,00714	0,2591
9	2,3562	4,7124	4,7124	0,0600	2,0000	0,0002	0,0000	-0,4800
10	2,6180	5,2360	-0,8745	0,0468	4,1731	10,3304	-0,0714	0,2592
11	2,8798	5,7596	0,5236	0,0600	3,9999	-20,7841	0,2079	0,9600
12	3,1416	6,2832	1,1071	0,1342	1,2000	-4,1595	0,3220	0,0859

4.9-тапсырма. Нүктенің күрделі қозғалысы

Тікбұрышты немесе радиусы $R = 60 \text{ см}$ дөңгелек пластина 4.9.1-кестеде берілген $\varphi = f_1(t)$ заңы бойынша қозғалмайтын өстің төңірегінде айналады (4.9.1-сурет). φ бұрышын есептеудің оң бағыты суреттерде доғалы стрелкамен көрсетілген. 0, 1, 2, 3, 8, 9 сұлбаларда айналу өсі пластина жазықтығына перпендикуляр және O нүктесі арқылы өтеді, яғни пластина өз жазықтығында айналады;

4, 5, 6, 7 сұлбаларда OO_1 айналу өсі пластина жазықтығында жатыр, яғни пластина кеңістікте айналады.

Пластинадағы BD (0–5 сұлбалар) түзуінің бойымен немесе радиусы R (6–9 сұлбалар) шеңбер бойымен M нүктесі қозғалады. Ол нүктенің салыстырмалы қозғалысы, яғни $s = AM = f_2(t)$ (s сантиметрмен, t – секундпен өлшенеді) тәуелділігі 8.1-кестеде 0-5 сұлбалары үшін және 6-9 сұлбалары үшін бөлек берілген. Сол кестеде b және l . өлшемдері де берілген. Сұлбалардағы M нүктесінің орны $s = AM > 0$ жағдайына сәйкес келеді, ал $s < 0$ болса M нүктесі A нүктесінің басқа жағында орналасады.

$t_1 = 1 \text{ с}$ уақыт мезетіндегі M нүктесінің абсолют жылдамдығы мен абсолют үдеуін табу қажет.

Нұсқау. 4.9-тапсырма нүктенің күрделі қозғалысына тақырыбына негізделген.

Тапсырманы орындау үшін жылдамдықтарды және үдеулерді қосу теоремаларын қолдану қажет.

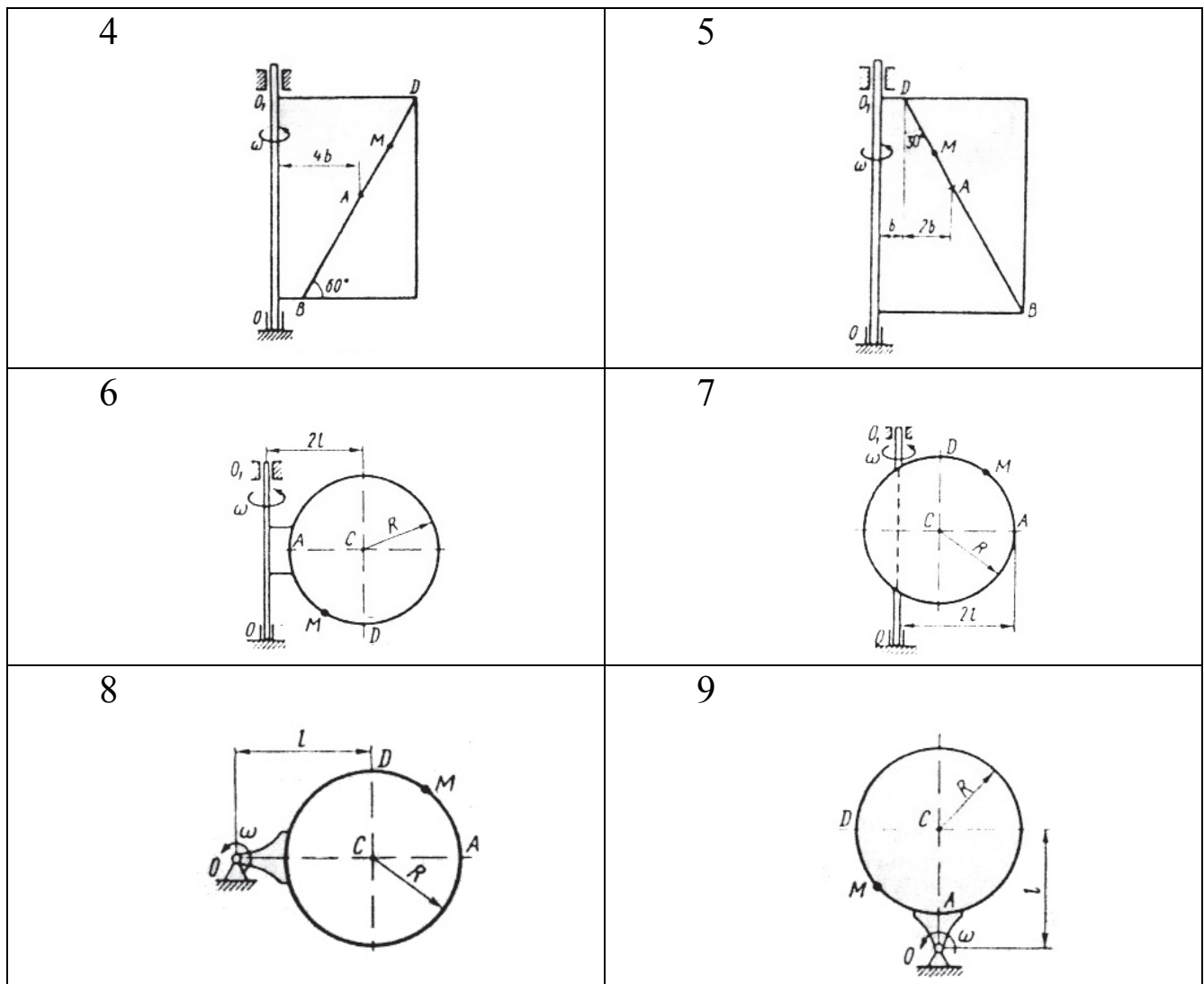
Есептеуді бастамас бұрын, табу керек шартына сәкес $t_1 = 1 \text{ с}$ уақыт мезетінде пластинада M нүктесінің орнын көрсету қажет.

4.9.1–кесте

Шарттың номері	Барлық суреттер үшін $\varphi = f_1(t)$	0-5 сұлбалар үшін		6-9 сұлбалар үшін	
		$b \text{ см}$	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$

2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^2 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

0	
1	
2	
3	

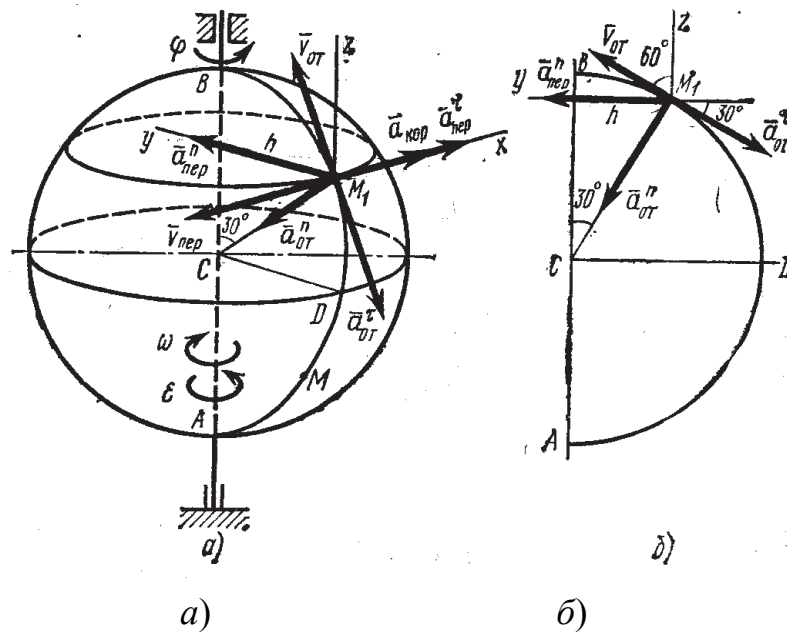


4.9.1-сурет

6-9 сұлбаларында, тапсырманы орындау кезінде $t_1 = 1$ с уақыт мезетінде пластинада M нүктесінің орны және CM , CA радиустарының арасындағы бұрыштары анықталмайынша, R -дің сандық мәнін қоюдың қажеті жоқ.

4.9-тапсырма мысалы. Радиусы R шар (4.9.2,а -сурет) AB диаметрін $\varphi = f_1(t)$ (есептеудің оң бағыты суретте доғалы стрелкамен көрсетілген) заңдылығымен айнала қозғалады.

Үлкен шеңбер («меридианмен) ADB бойымен M нүктесі $s = AM = f_2(t)$ (s -тің оң бағыты A -дан D -ға қарай есептеледі) заңдылығымен қозғалады.



4.9.2-сурет

Берілгені: $R = 0,5 \text{ м}$, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$
 (φ – радианмен, s – метрмен, t – секундпен өлшенеді). Табу қажеті:
 $t_1 = 1 \text{ с}$. мезетінде v_a және a_a .

Шешуі. ADB доғаның бойымен қозғалысын салыстырмалы (AB – нүктенің салыстырмалы траекториясы), ал шардың айналмалы қозғалысын – тасымал қозғалыс деп есептеп, нүкте M -нің қозғалысын күрделі қозғалыс ретінде қарастырамыз. Онда нүктенің \bar{v}_a абсолюттік жылдамдығы және \bar{a}_a абсолюттік үдеуі төмендегі формулалармен анықталады

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e, \quad \bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c, \quad (4.9.1)$$

мұндағы, $\bar{a}_r = \bar{a}_r^r + \bar{a}_r^n$, $\bar{a}_e = \bar{a}_e^r + \bar{a}_e^n$.

Салыстырмалы және тасымал қозғалыстардың сипаттамаларын анықтаймыз.

1. Салыстырмалы қозғалыс. Бұл қозғалыс төмендегі заңдылықпен мүмкін болады

$$s = AM = (\pi R/6)(7t - 2t^2). \quad (4.9.2)$$

Бірішіден, t_1 уақыт мезетінде ADB доғаның бойында M нүктесі қайсы аралықта болатынын белгілейміз. $t = 1 \text{ с}$. уақыт мезетінде (4.9.2)-тендеуден алатынымыз

$$s_1 = \frac{5}{6} \pi R.$$

онда

$$\angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6} \pi = 150^\circ, \text{ или } \angle BCM = 30^\circ.$$

Анықталған бұрышқа сәйкес 4.9.2-суретте нүктенің орнын көрсетеміз (M_1 нүктесі).

Енді v_r , a_r^r , a_r^n мәндерін табамыз

$$v_r = \dot{s} = (\pi R/6)(7-4t), \quad a_r^r = \dot{v}_r = -\frac{2}{3} \pi R,$$

Мұндағы ρ_r – салыстырмалы траекторияның қисықтық радиусы, яғни ADB доғасы. $R = 0,5 \text{ м}$ болатынын ескере отырып, $t_1 = 1 \text{ с}$. уақыт үшін алатынымыз

$$v_r = \frac{\pi R}{6} 3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}, \quad a_r^r = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2, \quad a_r^n = -\frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2 \quad (4.9.3)$$

Таңбалары \bar{v}_r векторы s аралықты есептеудің оң бағытымен, ал \bar{a}_r^r кері бағытта, \bar{a}_r^n векторы ADB доғасының C орталығына бағытталатынын көрсетеді. Барлық осы векторларды 4.9.2-суретте көрсетеміз. Көрнекі болу үшін 4.9.2,б-суретте ADB доғасы чертеж жазықтығымен беттестірілген.

2. Тасымал қозғалыс. Бұл қозғалыс төмендегі заңдылықпен мүмкін болады (айналмалы)

$$\varphi = 2t^3 - 4t^2.$$

Тасымал айналмалы қозғалыстың ω бұрыштық жылдамдығын және ε бұрыштық үдеуін анықтаймыз

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8.$$

$$t_1 = 1 \text{ с мезетінде}$$

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}. \quad (4.9.4)$$

Таңбасы уақыт мезеті $t_1 = 1 \text{ с}$. болғанда ε -нің бағыты φ бұрылу бұйышының оң есептеу бағытымен, ал ω -ның бағыты оған қарсы бағытталатынын көрсетеді; 4.9.2,а –суретте сәйкес доғалық сұлқалмен көрсетеміз.

Нүктенің тасымал \bar{v}_e жылдамдығын және \bar{a}_e тасымал үдеуін анықтау үшін, алдымен нүкте M_1 –ден айналу өсіне дейінгі h

қашықтықты тауып аламыз, ол $h = R \sin 30^\circ = 0,25 \text{ м}$. Онда $t_1 = 1 \text{ с}$. уақыт мезетінде (4.9.4) – теңдікті ескере отырып, алатынымыз

$$v_e = |\omega| h = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_e^r = \varepsilon h = 1 \text{ м/с}^2, \quad a_e^n = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2. \quad (4.9.5)$$

ω және ε бағыттарын ескере отырып \bar{v}_e , \bar{a}_e^r , бағыттарын және \bar{a}_e^n векторын (өске қарай бағытталған) 4.9.2,а – суретте көрсетеміз.

3. Кориолис үдеуі. \bar{v}_r векторы мен айналу өсінің ($\bar{\omega}$ векторының) арасындағы бұрыш 60° болғандықтан $t_1 = 1 \text{ с}$. уақыт мезетінде [(4.9.3) және (4.9.4) – теңдікті қара]

$$a_c = 2|\bar{v}_r| \cdot |\omega| \sin 60^\circ = 2,72 \text{ м/с}^2. \quad (4.9.6)$$

\bar{v}_r векторын айналу өсіне перпендикуляр жазықтыққа проекциялап және жазықтықтағы осы проекциясын ω бағытымен, яғни сағат тілі бағытымен 90° -қа бұрып \bar{a}_c бағытын анықтаймыз. Басқаша $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{om})$ ескеріп \bar{a}_c бағытын анықтауға болады. 4.9.2,а–суретте \bar{a}_c векторының бағытын көрсетеміз.

Енді v_a және a_a шамаларын есептеуге болады.

4. Абсолюттік жылдамдық v_a -ны анықтау. $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$, ал \bar{v}_r және \bar{v}_e векторлары өзара перпендикуляр болғандықтан, $t_1 = 1 \text{ с}$. мезетінде

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93 \text{ м/с}^2.$$

5. Абсолют үдеу a_a -ны анықтау. Үдеулерді қосу теоремасы негізінде

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^r + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^r + \bar{a}_c. \quad (4.9.7)$$

Абсолют үдеу \dot{a}_a -ны анықтау үшін M_1 хуз координаттар жүйесін жүргіземіз (4.9.2.б-сурет) және \bar{a}_a векторының осы өстерге проекцияларын есептейміз. \bar{a}_e^r және \bar{a}_c векторлары x өсінің бойында, ал \bar{a}_r^r , \bar{a}_r^n және \bar{a}_e^n векторлары ADB доға жазықтығында орналасқанын ескереміз, яғни M_1 уз жазықтығында (4.9.2-сурет). (4.9.3), (4.9.5), (4.9.6) теңдіктерін ескере отырып (4.9.7)-теңдіктің екі жағын да координаттар өстеріне проекциялап, $t_1 = 1 \text{ с}$. уақыт мезетінде алатынымыз

$$a_{ax} = a_r^r + a_c = 1 + 2,72 = 3,72 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{ay} = a_e^n + a_r^n \cos 60^\circ - a_r^r \cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,71 \text{ м/с}^2.$$

Осыдан $t_1 = 1 \text{ с.}$ уақыт мезетінде абсолют үдеу a_a –ның шамасын табамыз

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = 4,1 \text{ м/с}^2$$

Жауабы: $t_1 = 1 \text{ с.}$ болғанда, $v_a = 0,93 \text{ м/с}^2$, $a_a = 4,1 \text{ м/с}^2$

4.10-тапсырма. Материалық нүктенің тербемелі және салыстырмалы қозғалысы

Массасы m жүк 1 лифтаның ішіндегі ілгекке ілінген серіппеге бекітілген (4.10.1-сурет, 4.10.1-кесте). Лифт вертикаль $\xi = 1/2(\alpha_1 t_2) + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t)$ заңдылығымен қозғалады (ξ өсі вертикаль жоғары бағытталған; ξ метрмен өлшенеді, t – секундпен).

Жүкке $R = \mu v$ ортаның кедергі күші әсер етеді, мұндағы v – жүктің лифтаға қатысты жылдамдығы.

Лифтаға қатысты жүктің қозғалыс заңын табу қажет, яғни $x = f(t)$; бас нүктені лифта тыныштықта болғанда жүктің статикалық тепе-теңдік орнына орналастыру қажет (таңбасынан қателік жіберіп алмас үшін, x өсін серіппенің ұзару бағытында бағыттау, ал жүктің орнын $x > 0$, яғни серіппенің ұзару бағытында көрсету қажет). Есептеу кезінде $g \approx 10 \text{ см/с}^2$ қабылдауға болады. Серіппе және 2-белдеменің массаларын нөлге тең.

4.10.1-таблицадағы белгілеулер:

c_1, c_2, c_3 серіппенің қатаңдық коэффициенті;

λ_0 – бастапқы $t = 0$ уақыт мезетіндегі эквивалентті қатаңдығымен серіппенің ұзаруы;

v_0 – жүктің лифтаға қатысты бастапқы жылдамдығы (жоғары вертикаль бағытталған).

c_1, c_2, c_3 бағанасындағы сызықшалар сәйкес серіппелер жоқ және чертежде көрсетілмейді.

Егер кейбір жағдайларда серіппенің соңы бос қалса, онда сәйкес орнында немесе жүкке немесе лифтаның төбесіне (полына), егер 2-белдемемен бекітілген орны бос қалса, онда серіппелердің сондарын өзара бекіту қажет.

$\mu = 0$ шарты кедергі күші R -дің жоқ екенін көрсетеді.

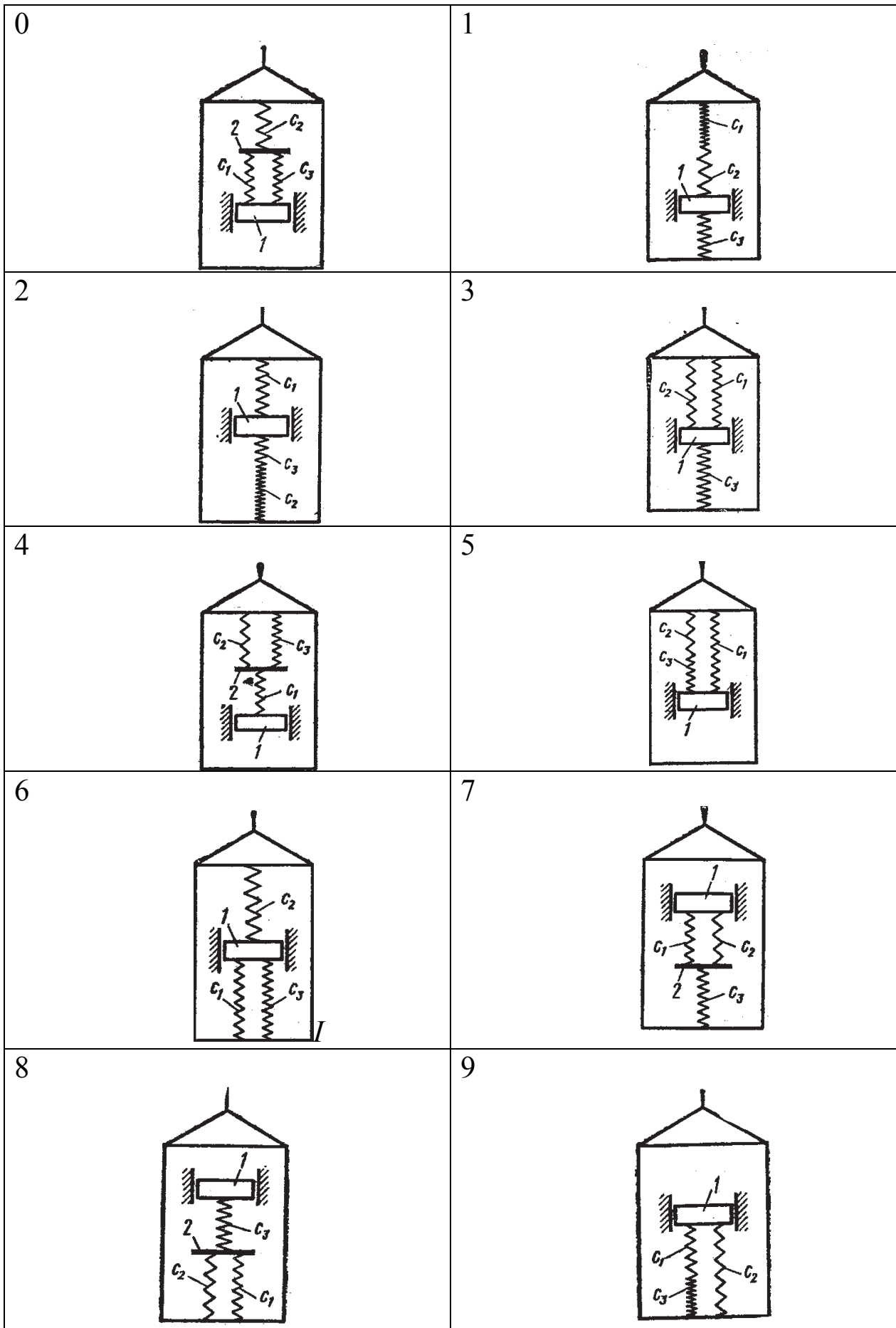
4.10.1-кесте

Шарт номері	$m, \text{ кг}$	$c_1, \text{ Н/м}$	$c_2, \text{ Н/м}$	$c_3, \text{ Н/м}$	$a_1, \text{ м/с}^2$	$a_2, \text{ м/с}^2$	$a_3, \text{ м/с}^2$	$\varnothing, \text{ 1/с}$	$\mu, \text{ Н·с/}$	$\lambda_0, \text{ м}$	$v_0, \text{ м/с}$
0	1	300	150	-	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	-	240	120	-0,5g	0	0	-	8	0,1	0
2	0,5	-	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	-	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	-	-g	0	0	-	6	0,15	0
5	2	-	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	-	120	g	0	0	-	4	0	2
7	0,5	120	-	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	-	0	0	0,2	20	0	0,15	0
9	1	200	-	300	1,5g	0	0	-	20	0	3

Нұсқау. 4.10-тапсырма нүктенің тербелмелі және салыстырмалы қозғалыстарын бір уақытта қамтиды. Біріншіден әсер ететін күштерге тасымал инерция күшін тіркестіріп есепте қарастырылатын жүктің салыстырмалы дифференциалдық теңдеуін (лифтаға қатысты) құрастыру қажет. Бұл үшін серіппелердің эквивалентті қатаңдығын бір серіппенің қатаңдығымен ауыстыру керек.

Содан кейін бастапқы шартын ескере отырып алынған 2-текті сызықты дифференциалдық теңдеуді интегралдау керек.

4.10-тапсырма мысалы. Қатаңдық коэффициенттері c_1 және c_2 тізбектеліп жалғасқан екі серіппелерге бекітілген массасы m жүк D призмалық арбаның AB сайымен орын ауыстырады (4.10.2, a -сурет). Арба $\xi = f_1(t)$ заңдылығымен қозғалады. Эквивалентті қатаңдықты серіппенің бастапқы ұзаруы λ_0 , ал арбаға қатысты жүктің бастапқы жылдамдығы v_0 (D -дан B -ға қарай бағытталған).



4.10.1-сүрөт

Берілгені: $m = 0,4 \text{ кг}$, $c_1 = 200 \text{ Н/м}$, $c_2 = 50 \text{ Н/м}$, $\lambda_0 = 0,1 \text{ м}$, $v_0 = 1 \text{ м/с}$, $\alpha = 60^\circ$, $\xi = 2t^2 + 0,4 \sin(4t)$ (ξ – метрмен, t – секундпен өлшенеді).

Табу керек: Арбаға қатысты жүктің қозғалыс теңдеуін $x = f(t)$.

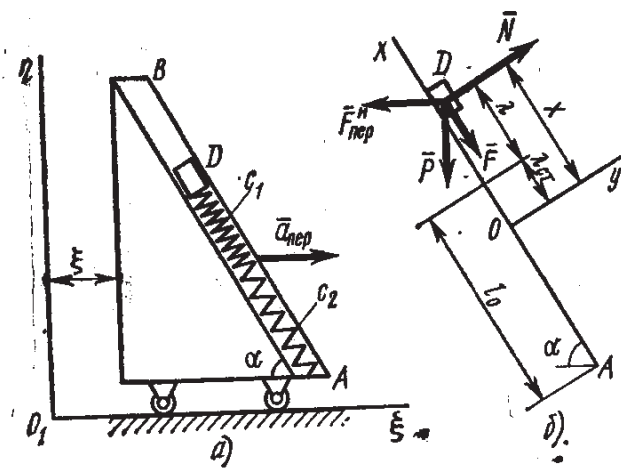
Шешуі. 1. Жүкке бекітілген серіппелерді қатаңдық коэффициенті $c_{\text{эк}} = c$ болатын бір серіппемен ауыстырамыз. Қатаңдық коэффициенті c -ның мәні серіппелердің кез келген қимасында ішкі күш факторлары тең болатын шартпен анықталады және Q -ға тең. Егер серіппелердің сәйкес ұзарулары λ_1 және λ_2 болса, онда серіппелердің эквивалентті ұзаруы $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ және $c_1 \lambda_1 = c_2 \lambda_2 = c \lambda = Q$ мүмкін болады, осыдан $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, $\lambda = Q/c$.

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ болса, онда

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \text{ және } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 40 \text{ Н/м.} \quad (4.10.1)$$

2. Енді жүктің салыстырмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрамыз (арбаға қатысты). Арба тыныштықта болғанда бірінші байқайтынымыз, жүктің статикалық тепе-теңдік орнында \bar{P} салмақ күшінің әсерінен эквивалентті серіппе (оның деформацияға ұшырамаған жағдайында ұзындығын l_0 деп белгілейміз) λ_{cm} мәніне сығылады (4.10,б-сурет). Тепе-теңдік теңдеуінен алатынымыз

$$c \lambda_{cm} = P \sin \alpha \text{ және } \lambda_{cm} = \frac{mg \sin \alpha}{c} = 0,08 \text{ м.} \quad (4.102)$$



4.10.2-сурет

Онда жүктің статикалық тепе-теңдік орнына бас нүктесін орналастырып, қозғалмалы санақ жүйесі Oxy -ті арбаға бекітеміз, ал Ox өсін арна AB сайы бойымен серіппенің ұзару бағыттында бағыттаймыз (4.10.2, б-сурет).

Серіппе ұзарғанда және $x > 0$ болғандағы жүктің орнын қарастырамыз; жүкке түсірілген күштерді көрсетеміз: \bar{P} салмақ

күшін, \overline{F} серпімділік күшін және \overline{N} сайдың реакция күшін. Жүктің салыстырмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құру үшін осы күштерге тасымал инерция күшін $\overline{F}_{неp}^u = -m\overline{a}_{неp}$ қосамыз; тасымал қозғалыс (арбаның қозғалысы) ілгерілемелі болғандықтан кориолис инерция күші нөлге тең. Онда салыстырмалы қозғалыс теңдеуі векторлы түрде төмендегі өрнек арқылы жазылады

$$m\overline{a}_{mn} = \overline{P} + \overline{F} + \overline{N} + \overline{F}_{mac}^u.$$

Теңдіктің екі жағын x өсіне проекциялап, алатынымыз

$$m\ddot{x} = -P \sin \alpha - F + F_{mac}^u \cos \alpha. \quad (4.10.3)$$

F және F_{mac}^u – жүктің орны $\delta > 0$ координатымен анықталатын болғандықтан (4.10.2-сурет), эквивалент серіппенің ұзаруы $\lambda = x - \lambda_{cm}$ -ға тең, онда $F = c\lambda = c(x - \lambda_{cm})$. Сонымен қатар $F_{mac}^u = ma_{неp} = m\ddot{\xi}$, мұндағы $\ddot{\xi}$ – арбаның үдеуі, табатынымыз $\ddot{\xi} = 4 - 6,4 \sin(4t)$. Сонымен қатар, $\cos \alpha = 0,5$. Барлық осы мәндерді (4.10.3)-теңдеуге қойып, табатынымыз

$$m\ddot{x} = -P \sin \alpha - c(x - \lambda_{cm}) + m[2 - 3,2 \sin(4t)]. \quad (4.10.4)$$

(4.10.2)-теңдікке сәйкес $P \sin \alpha$ және $c\lambda_{cm}$ мүшелері теңдіктің оң жағында қысқарады және қорытынды жүктің салыстырмалы дифференциалдық теңдеуі төмедегі түрде болады

$$\ddot{x} + k^2 x = b_1 + b_2 \sin(4t), \quad (4.10.5)$$

мұндағы белгілеулер

$$k^2 = c/m = 100 \text{ c}^{-2}, \quad b_1 = 2 \text{ м/с}^2, \quad b_2 = -3,2 \text{ м/с}^2. \quad (4.10.6)$$

2. Жүктің қозғалыс заңдылығын анықтау үшін (4.10.5) теңдеуді интегралдау қажет. Оның жалпы шешімі, дифференциалдық теңдеудің теориясы бойынша

$$x = x_1 + x_2, \quad (4.10.7)$$

мұндағы x_1 – $\ddot{x} + k^2 x = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі, яғни

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt), \quad (4.10.8)$$

ал x_2 (5)-теңдеудің жеке шешімі. Теңдеудің жеке шешімін келесі түрде іздейміз

$$x_2 = A + B \sin(4t). \quad (4.10.9)$$

A және B $\ddot{x}_2 = -16B \sin(4t)$ -ны табамыз, \ddot{x}_2 және x_2 мәндерін (4.10.5) –теңдеуге қойып, $\sin(4t)$ функциясының коэффициенттерін теңестіреміз. (4.10.6)-белгілеулерді ескере отырып, алатынымыз

$$A = \frac{b_1}{k^2} = 0,02 \text{ м}, \quad B = \frac{b_2}{k^2 - 16} = -0,04 \text{ м}.$$

Онда $k = 10 \text{ с}^{-1}$ болатынын ескеріп (4.10.7) - (4.10.9) теңдіктерден келесі (4.10.5)-теңдеудің жалпы шешімін аламыз

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0,04 \sin(4t) + 0,02. \quad (4.10.10)$$

Интеграл тұрақтылары C_1 және C_2 -ні анықтау үшін $v_x = \dot{x}$ -ні табамыз

$$v_x = 10C_1 \cos(10t) - 10C_2 \sin(10t) - 0,16 \cos(4t). \quad (4.10.11)$$

Есептің шарты бойынша $t = 0$ үшін $v_x = v_0 = 1 \text{ м/с}$, $\lambda = \lambda_0 = 0,1 \text{ м}$.

Онда 4.10.2,б-суретіне және (4.10.3) теңдікке сәйкес $x_0 = \lambda = \lambda_{cm} = 0,18 \text{ м}$. Осы бастапқы мәндерін (4.10.10) және (4.10.11) теңдеулеріне қойып, олардан $C_1 = 0,12$, $C_2 = 0,18$ табамыз.

Қорытынды (4.10.10) теңдеу төмендегі түрде жазылады

$$x = 0,12 \sin(10t) + 0,16 \cos(10t) - 0,04 \sin(4t) + 0,02. \quad (4.10.12)$$

Осы теңдеу жүктің салыстырмалы қозғалысының заңдылығын анықтайды, яғни тербеліс жасайтын заңдылығын.

1-ескерту. Егер жүк екі параллель серіппелерге бекітілген болса, онда қандай да бір күштің әсерінде тепе-теңдікте болғана, әрдір серіппе және эквивалентті серіппе бірдей λ шамасына ұзарған болар еді.

Онда екі серіппе үшін $c_1 \lambda + c_2 \lambda = Q$, ал эквивалентті серіппе үшін $c \lambda = Q$, осыдан $c_{эк} = c = c_1 + c_2$ мәндері анықталады.

2. Егер серіппе тележканың B нүктесіне бекітілген болса (4.10.2.а-сурет), ал жүк D олардың басқа соңында орналасса, онда статикалық тепе-теңдік орнында эквивалентті серіппе λ_{cm} мәніне созылған болар еді, сығылған емес, 4.10.2,б-суретінде көрсетілгендей, және x , λ и λ_{cm} арасындағы байланыстарды анықтау үшін (бұл жағдайда $\lambda = x + \lambda_{cm}$), есептеу сұлбасында ескеру қажет болады.

Жауабы: $x = 0,12 \sin(10t) + 0,16 \cos(10t) - 0,04 \sin(4t) + 0,02$.

4.11-тапсырма. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема

Механикалық жүйе 1 және 2 жүктерінен (жүктердің жазықтықпен үйкеліс коэффициенті $f=0,1$), 3-катогынан, сатыларының радиустары $R_4=0,3м$, $r_4=0,1м$, $R_5=0,2м$, $r_5=0,1м$ сатылы шкивтерден тұрады. 3-денені тұтас толтырылған біртекті цилиндр, ал 4, 5-шкивтердің массаларын олардың сыртқы шеңберлерінің бойымен бірқалыпты үлестірілген деп алу керек (4.11.1-сурет).

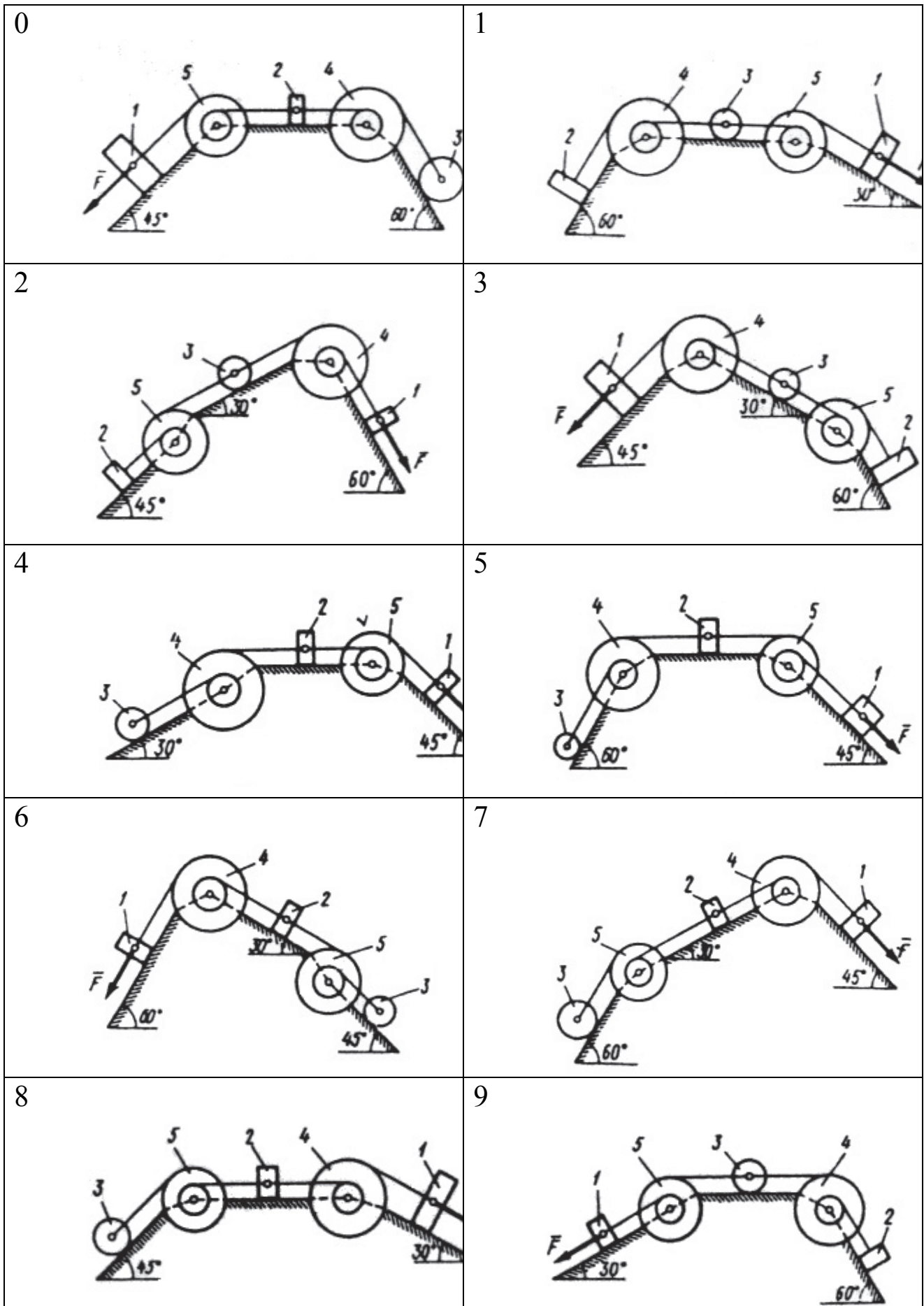
Жүйе денелері бір бірімен шкивтерге оралған жіптер арқылы байланысқан. Жіптер аралықтары оларға сәйкес жазықтықтарға параллель.

Түсу нүктесінің орын ауыстыруы s -ке тәуелді болатын $F=f(s)$ күшінің әсерінен жүйе тыныштық күйінен қозғалысқа келеді. Қозғалыс кезінде 4, 5-шкивтеріне мойынтіректердегі үйкелістерден туындайтын кедергі күштердің тұрақты M_4, M_5 моменттері әсер етеді.

Ізделініп отырған шаманың s орын ауыстыруының мәніне сәйкес уақыт мезетіндегі шамасын анықтау керек. Ізделінетін шама кестенің «Табу керек» бағанында көрсетілген, бұл жердегі: v_1, v_2, v_{C3} - сәйкесінше 1, 2-жүктерінің және 3-денесінің массалар центрінің жылдамдықтары, ω_4 және ω_5 – 4 және 5-денелерінің бұрыштық жылдамдықтары. Барлық катоктар жазықтықтар бойымен сырғанамай дөңгелейді. Егер $m_1=0$ немесе $m_2=0$ болса, онда

4.11.1-кесте

Шарт номері	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$m_4,$ кг	$m_5,$ кг	$M_4,$ Нм	$M_5,$ Нм	$F = F(s),$ Н	$s_1,$ м	Табу керек
0	2	0	4	6	0	0	0,8	$50(2+3s)$	1,0	v_1
1	6	0	2	0	8	0,6	0	$20(5+2s)$	1,2	ω_5
2	0	4	6	8	0	0	0,4	$80(3+4s)$	0,8	v_{C3}
3	0	2	4	0	10	0,3	0	$40(4+5s)$	0,6	v_2
4	8	0	2	6	0	0	0,6	$30(3+2s)$	1,4	ω_4
5	8	0	4	0	6	0,9	0	$40(3+5s)$	1,6	v_1
6	0	6	2	8	0	0	0,8	$60(2+5s)$	1,0	ω_4
7	0	4	6	0	10	0,6	0	$30(8+3s)$	0,8	ω_5
8	6	0	4	0	8	0,3	0	$40(2+5s)$	1,6	v_{C3}
9	0	4	6	10	0	0	0,4	$50(3+2s)$	1,4	v_2



4.11.1- cyper

суреттерде 1 немесе 2-жүгі бейнеленбеуі керек, ал басқа денелер массалары нөлге тең болған жағдайларда да суреттерде бейнеленуі керек.

Нұсқау. 4.11-тапсырма жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы қолдануға берілген. Есепті шығару барысында жүйенің кинетикалық энергиясы T осы жүйеге кіретін барлық денелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең болатынын ескеру керек. Бұл энергияны есептің шарты бойынша анықтау керек болған жылдамдық (сызықтық немесе бұрыштық) арқылы өрнектеу керек.

T -ны есептеу кезінде жазық-параллель қозғалыстағы денелер нүктелерінің жылдамдықтарының арасындағы немесе бұрыштық жылдамдық пен массалар центрінің жылдамдығының арасындағы тәуелділікті табу үшін жылдамдықтардың лездік центрін пайдалану керек. Жұмысты есептеуде барлық орын ауыстыруларды, орын ауыстырулардың арасындағы тәуелділіктер оларға сәйкес жылдамдықтардың арасындағыдай болатынын ескеріп, берілген s_1 орын ауыстыруы арқылы өрнектеу керек

4.11-тапсырма мысалы. Механикалық жүйе 3-жүгінен (жүктің жазықтықпен үйкеліс коэффициенті $f=0,1$), 1-катогынан, сатыларының радиустары R_2, r_2 , сатылы шкивтен тұрады (4.11.2-сурет). 1-денені тұтас толтырылған біртекті цилиндр, ал 2-шкивтің массасын оның сыртқы шеңберінің бойымен бірқалыпты үлестірілген деп алу керек.

Жүйе денелері бір бірімен шкивтерге оралған жіптер арқылы байланысқан. Жіптер аралықтары оларға сәйкес жазықтықтарға параллель.

Түсу нүктесінің орын ауыстыруы s -ке тәуелді болатын $F=f(s)$ күшінің әсерінен жүйе тыныштық күйінен қозғалысқа келеді. Қозғалыс кезінде 2-шкивіне мойынтіректердегі үйкелістен туындайтын кедергі күшінің тұрақты M_2 моменті әсер етеді.

Катоктың массалар центрінің v_{C_1} жылдамдығын $s = s_1$ орын ауыстыруының мәніне сәйкес уақыт мезетіндегі мәнін анықтау керек.

Берілгені: $m_1 = 4\text{кг}$, $m_2 = 10\text{кг}$, $m_3 = 8\text{кг}$, $R_2 = 0,2\text{м}$, $r_2 = 0,1\text{м}$, $f = 0,2$, $M_2 = 0,6\text{Нм}$, $F = 2(1 + 2s)\text{Н}$, $s_1 = 2\text{м}$.

Табу керек: v_{C_1} .

Шешуі. 1, 2 және 3-денелерден тұратын механикалық жүйе қозғалысын қарастырамыз. Жүйеге түсірілген барлық күштерді

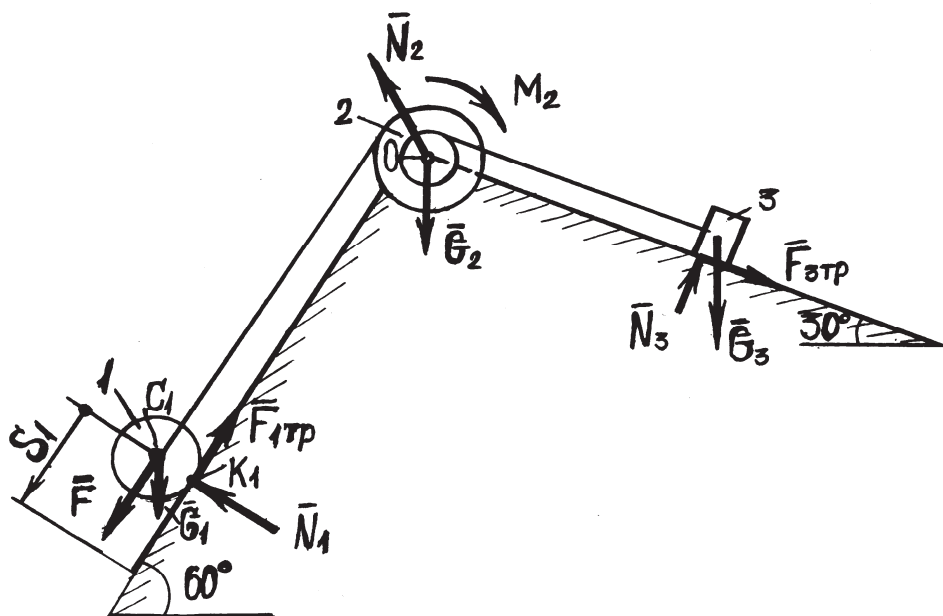
суретте көрсетеміз: актив күштер $\bar{F}, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ кедергі моменті M_2 , реакция күштері $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ және үйкеліс күші $\bar{F}_{3үйк}$.

Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланып v_{C_1} жылдамдығын анықтаймыз

$$T - T_0 = 0. \quad (4.11.1)$$

Бастапқы T_0 және соңғы T кинетикалық энергияларын анықтаймыз. Бастапқы уақыт мезетінде механикалық жүйе тыныштықта болғандықтан $T_0 = 0$. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы барлық денелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.11.2)$$



4.11.2-сурет

1-дене жазық-параллель, 3-дене ілгерілемелі, 2-дене қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын болғандықтан, денелердің кинетикалық энергиялары мынадай формулалармен анықталады

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \cdot \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_{C_2} \cdot \omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot v_3^2. \quad (4.11.3)$$

Тендіктердің құрамындағы барлық жылдамдықтарды v_{C_1} жылдамдығымен өрнектейміз. 1-катоктың жылдамдықтар лездік центрі K_1 нүктесінде жататынын есепке ала отырып және катоктың радиуысын r_1 деп белгілеп алатынымыз

$$\omega_1 = \frac{v_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C_1}}{r_1}, \quad \omega_2 = \frac{v_{C_1}}{R_2}, \quad v_3 = \omega_2 \cdot r_2 = v_{C_1} \frac{r_2}{R_2}. \quad (4.11.4)$$

Инерция моменттері мынадай формулалармен анықталады

$$I_{C_1} = 0,5m_1 \cdot r_1^2, \quad I_2 = m_2 \cdot R_2^2, \quad (4.11.5)$$

(4.11.2)-теңдікті пайдаланып (4.11.5) және (6)-теңдіктерді (4.11.3)-теңдікке қойып алатынымыз

$$T = \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \cdot v_{C_1}^2, \quad (4.11.6)$$

C_1 нүктесінің сәйкес s_1 шамасына орын ауыстырғанда механикалық жүйеге түсірілген барлық күштердің жұмыстарының қосындысын анықтаймыз. Бұл үшін (4.11.4)-формуласына сәйкес, барлық орын ауыстыруларды s_1 арқылы өрнектейміз

$$\varphi_2 = s_1/R_2, \quad s_3 = s_1 (r_2/R_2).$$

Онда

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 2(1 + 2s) ds = 2(s_1 + s_1^2),$$

$$A(\bar{G}_1) = G_1 \cdot s_1 \sin 60^\circ,$$

$$A(\bar{M}_2) = -M_2 \cdot \varphi_2 = -M_2 \frac{s_1}{R_2},$$

$$A(\bar{G}_3) = -G_3 \cdot s_3 \sin 30^\circ = -G_3 \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ,$$

$$A(\bar{F}_{3\text{үйк}}) = -\bar{F}_{3\text{үйк}} \cdot s_3 = -f \cdot G_3 \cdot s_1 \frac{r_1}{R_2} \cos 30^\circ.$$

\bar{N}_1 және $\bar{F}_{1\text{үйк}}$ күштері түсірілген K_1 нүктесі жылдамдықтар лездік центрі және \bar{N}_2 , \bar{G}_2 күштерінің түсірілген нүктелері қозғалмайтын болғандықтан жасайтын жұмыстары нөлге тең. Онда механикалық жүйеге түсірілген барлық күштердің жұмыстарының қосындысы

$$\sum A_k^e = 2(s_1 + s_1^2) + G_1 \cdot s_3 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_1} -$$

$$-G_3 \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ - f \cdot G_3 \cos 30^\circ \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2}. \quad (4.117)$$

(4.11.6) және (4.11.7)-теңдіктерді (4.11.1)-теңдікке қойып алатынымыз

$$\left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \right) \cdot v_{C_1}^2 = 2(s_1 + s_1^2) +$$

$$+ G_1 \cdot s_1 \sin 60^\circ - M_2 \frac{s_1}{R_2} - G_3 \cdot s_1 \frac{r_2}{R_2} \sin 30^\circ - f \cdot G_3 \cdot s_1 \frac{r_1}{R_2} \cos 30^\circ. \quad (4.11.8)$$

Сан мәндерін осында қойып алатынымыз

$$v_{C_1} = 0,23 \text{ м/с}.$$

4.12-тапсырма. Кулисалы берілісті машина динамикасы

Есептеу мақсаты – машина динамикасы дифференциалдық теңдеулерін математикалы модельдеу тәсілімен құрастырып және оларды арнайы компьютерді қолдана отырып зерттеуге бағытталған.

Кулисалы берілісті машина қозғалыстарының кинематикалық, динамикалық сипаттамалары, құрылған дифференциалдық теңдеулерін арнайы компьютерде интегралдау арқылы анықталады. Машинаның буындарының динамикалық реакция күштері кинематикалық сипаттамаларды есептеу нәтижесінің көмегімен анықталады.

Машиналардың сұлба нұсқалары 4.12.1-суретте көрсетілген. Машинаның құрылым элементтері абсолют қатты деп саналады, белдіктер инерциялы емес. Доңғалақтар, белдіктер т.б. сырғанамайды. A жұдырықшасы мен қосиіннің және жылжыманың үйкеліс күштері есепке алынбайды.

Машина электр қозғалтқышта пайда болатын M_D моменті әсерінде қозғалысқа келтіріледі. Пайдалы әсер әр-түрлі нұсқаларда F_H күшімен немесе M_H моментімен көрсетілген.

Есептеуде тапсырманың берілгенін ретке келтіру 4.12.1-кесте және 4.12.1-формулармен беріледі

$$\begin{aligned}
M_{DZ} &= M_O - k\omega_{iZ}; \quad k = k_T(1 + 0,1N), \\
F_{HX} &= -\mu_1 V_{4X} (F_{HY} = -\mu V_{1Y}), \quad M_{HZ} = -\mu_2 \omega_{4Z}, \\
\mu_1 &= \mu_{1T}(1 + 0,01N), \quad \mu_2 = \mu_{2T}(1 + 0,01N), \\
I_1 &= I_{1T} + 0,1n, \quad \tau_1 + 0,24(1 + 0,01N).
\end{aligned}
\tag{4.12.1}$$

Мұндағы, массалар, салмақ күші, бұрыштық жылдамдықтар, радиустар, инерция моменттері және инерция радиустары және жылдамдықтар үшін 4.12.1-суретте көрсетілген машиналар буындарының сәйкес индекстерімен келесі $m, G, \omega, R, \tau, I, \rho, V$ белгілеулер қабылданған. $M_O, k_T, \mu_{1T}, \mu_2$ – 4.12.1-кестеде мәндері көрсетілген тұрақтылар. τ_1 – интегралдаудың уақыт аралығы, яғни тегершіктің толық айналу уақыты шамасына жақын шама, N – студенттік топтар, n – факультет номері. Тегершік радиусы $R_1 = 0,36l$, иінірек ұзындығы $OA = r = 0,06l$. φ_1 бұрышы суретте көрсетілген. Шамалардың сандық мәні СИ жүйесінде берілген.

1. Механикалық жүйенің массалар центрінің қозғалысы және кинетикалық моменті туралы теоремаларды қолданып 4-ші немесе 3-ші доңғалақтың өсіндегі динамикалық реакция күшін анықтайтын теңдеуді құрастыру қажет.

2. Кинетостатика тәсілімен K нүктесінің ілінісу күшін анықтайтын теңдеуді құрастыру қажет.

3. Төмендегілерді пайдалана отырып машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрастыру қажет:

а) механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрдегі математикалық өрнегі;

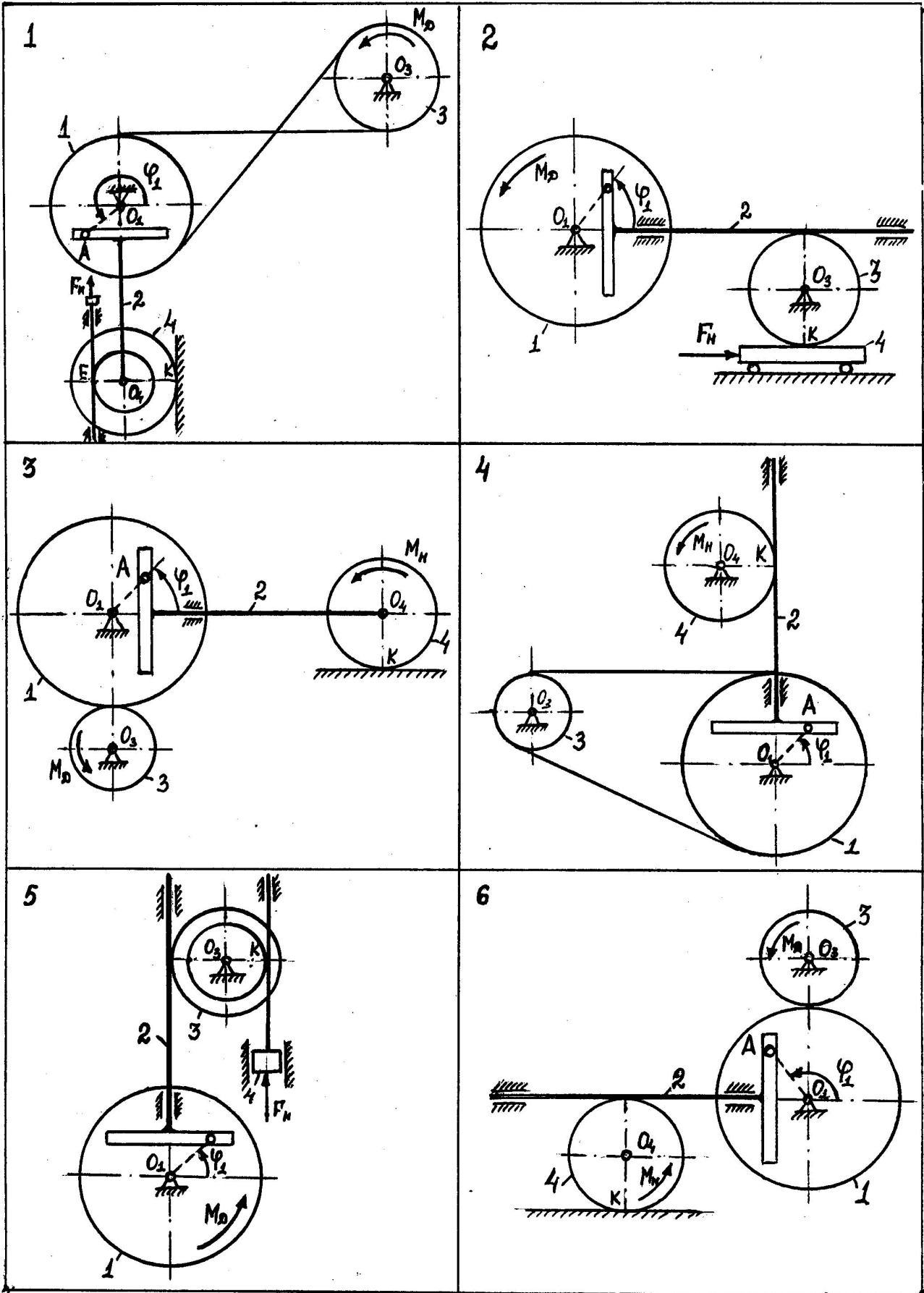
б) динамиканың жалпы теңдеуі;

в) Лагранждың екінші ретті теңдеуі.

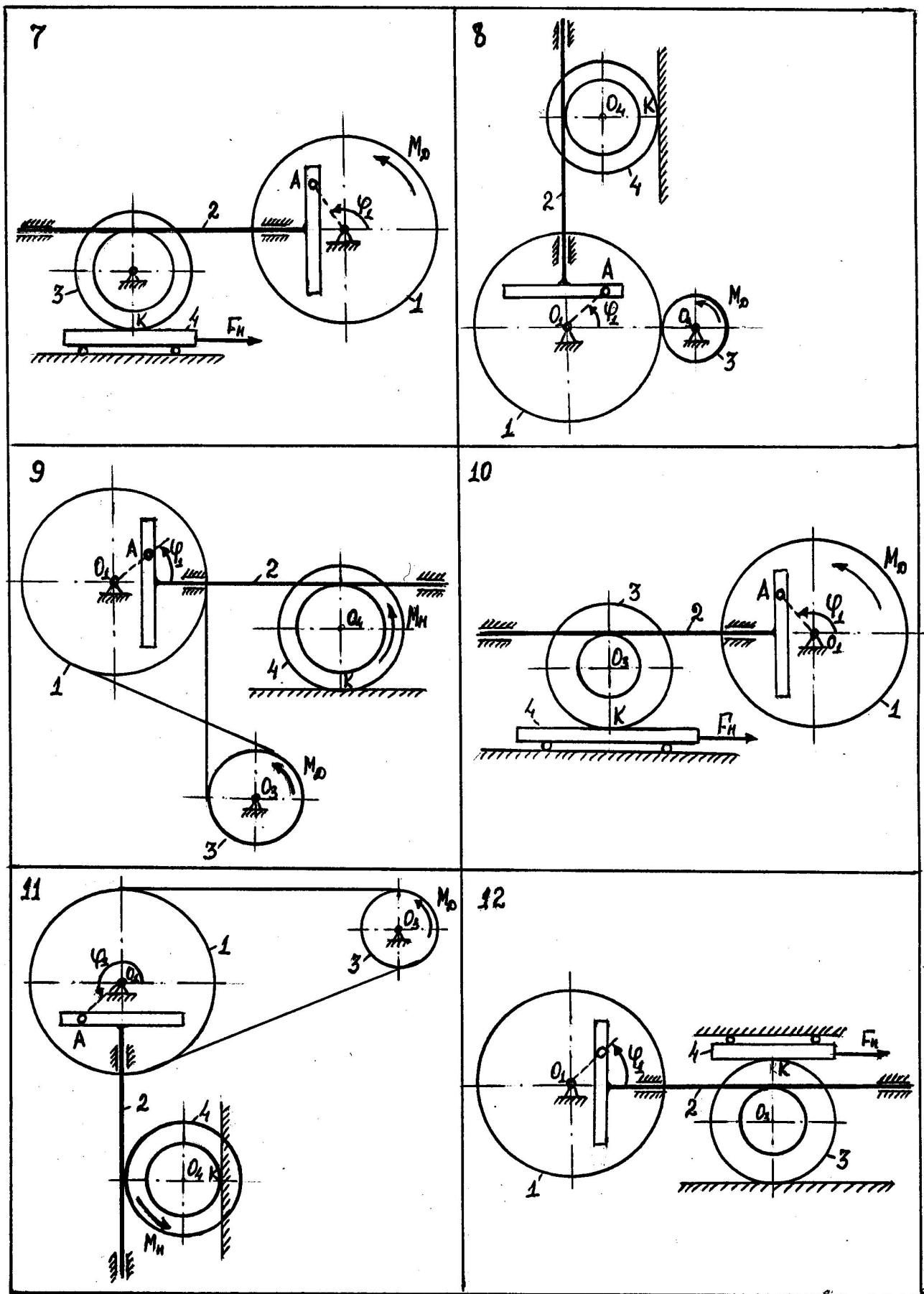
4. Арнайы компьютер көмегімен машинаның қозғалыс теңдеуін интегралдап, кинематикалық сипаттамаларының және динамикалық реакция күштерінің графиктерін тұрғызу қажет.

4.12.1-кесте

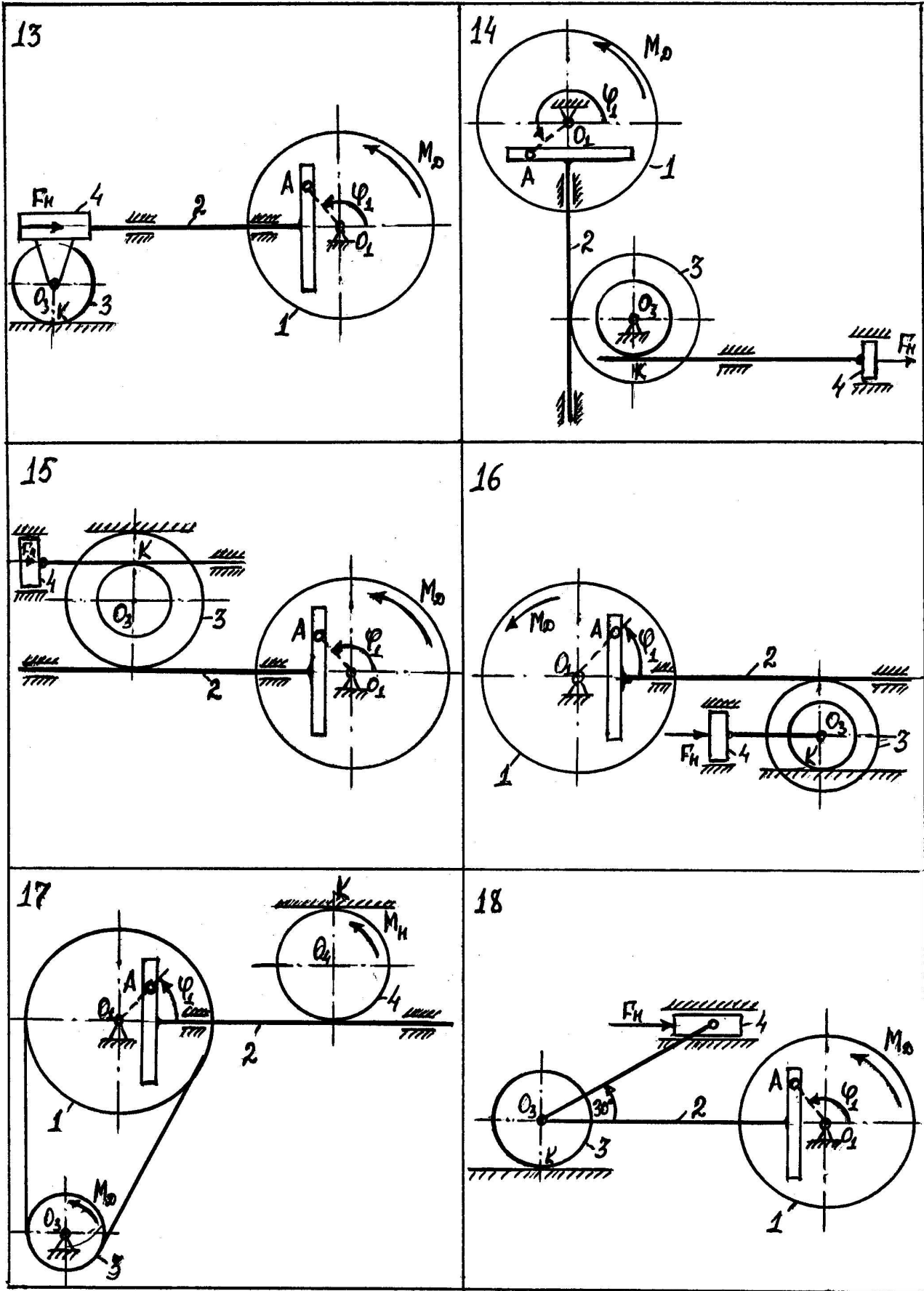
Вар.	M_0	K_T	μ_{1T} μ_{2T}	I_{1T}	m_2	m_3	m_4	R_3	r_3	ρ_3	R_4	r_4	ρ_4	$\varphi_1(O)$
1	-27	0,2	289	1,5	15	7,7	16	0,09	-	-	0,24	0,08	0,12	1,57
2	102	3,3	331	2,0	15	10	20	0,13	-	-	-	-	-	0
3	-34	0,3	3,56	1,5	20	7,72	24	0,12	-	-	0,12	-	-	3,1
4	26	0,2	3,48	1,7	26	4,63	20	0,09	-	-	0,09	-	-	1,6
5	105	3,5	639	2,0	10	15	20	0,12	0,08	0,09	-	-	-	1,5
6	-53	0,8	4,72	1,4	24	9,26	24	0,18	-	-	0,10	-	-	3,2
7	108	3,5	222	2,0	10	20	15	0,10	0,08	0,08	-	-	-	3,1
8	-27	0,2	20,6	1,5	20	7,72	20	0,09	-	-	0,12	0,08	0,1	1,6
9	-27	0,2	20,6	1,4	15	9,26	30	0,09	-	-	0,12	0,08	0,1	1,6
10	110	3,8	571	2,0	12	20	20	0,18	0,08	0,12	-	0,06	-	3,1
11	37	0,4	11,5	1,7	22	4,63	32	0,12	-	-	0,12	-	0,1	4,7
12	112	3,7	246	2,0	14	24	12	0,16	0,12	0,14	-	-	-	0
13	113	3,7	342	2,0	12	25	10	0,12	-	-	-	-	-	3,1
14	114	3,8	256	2,0	15	20	28	0,10	0,06	0,08	-	-	-	4,7
15	115	3,9	2234	2,0	16	18	30	0,20	0,06	0,14	-	-	-	3,2
16	116	3,9	2654	2,0	18	20	16	0,10	0,05	0,08	-	-	-	0
17	39	0,4	6,95	1,4	23	9,26	32	0,12	-	-	0,12	-	-	0
18	118	3,9	337	2,0	12	16	10	0,08	-	-	-	-	-	0
19	119	3,9	3231	2,0	20	30	40	0,14	0,07	0,08	-	-	-	0
20	120	4,0	324	2,0	10	12	16	0,06	-	-	-	-	-	3,1
21	121	4,0	1380	2,0	24	32	16	0,07	-	-	-	-	-	3,2
22	122	4,1	700	2,0	12	22	18	0,18	0,06	0,12	-	-	-	0
23	-41	0,4	6,10	1,5	15	7,2	20	0,12	-	-	0,10	-	-	1,5
24	-31	0,2	49,2	1,7	25	4,63	36	0,09	-	-	0,16	0,08	0,1	3,1



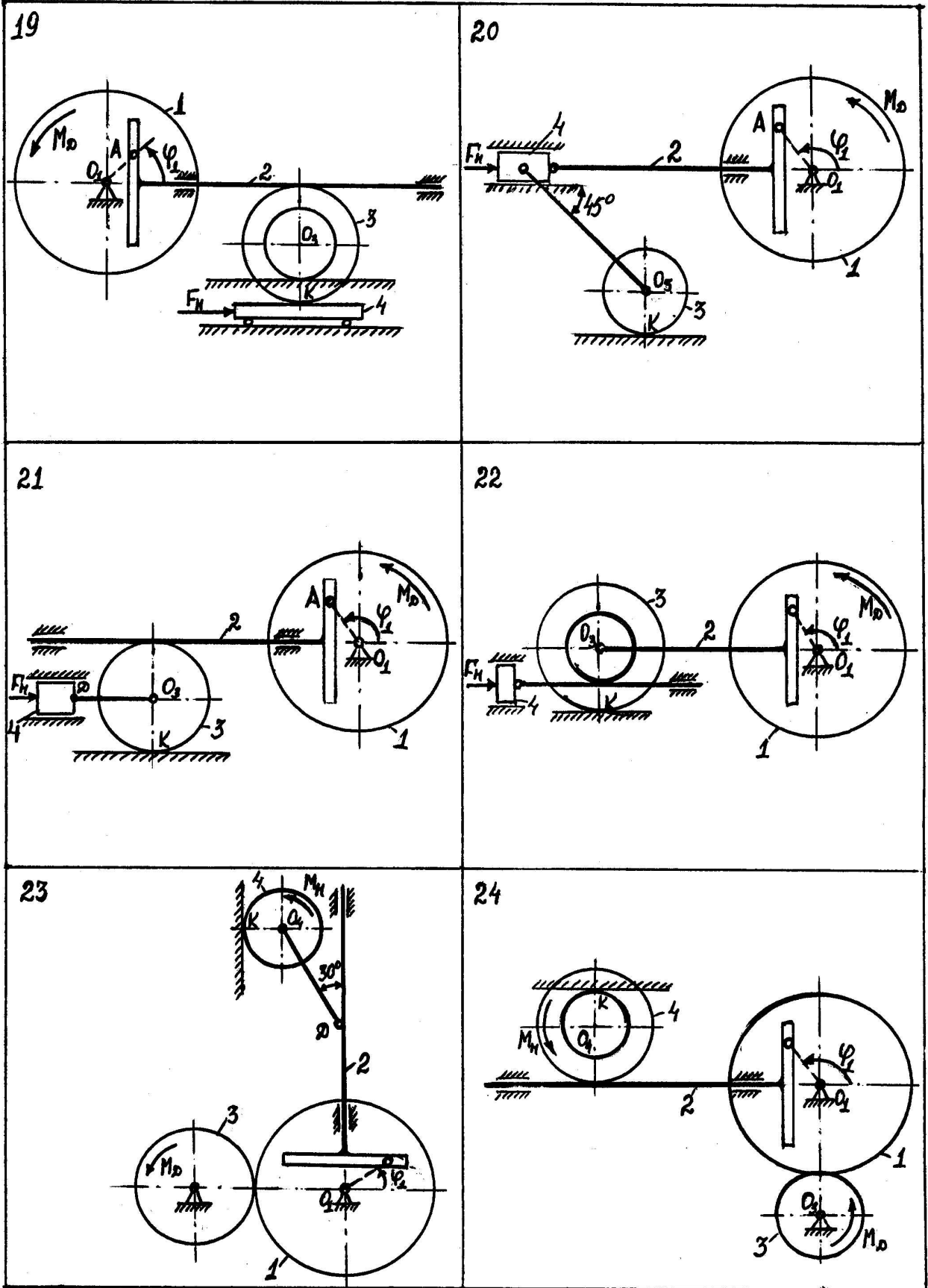
4.12.1-сyпер



4.12.1-суреттің жалғасы

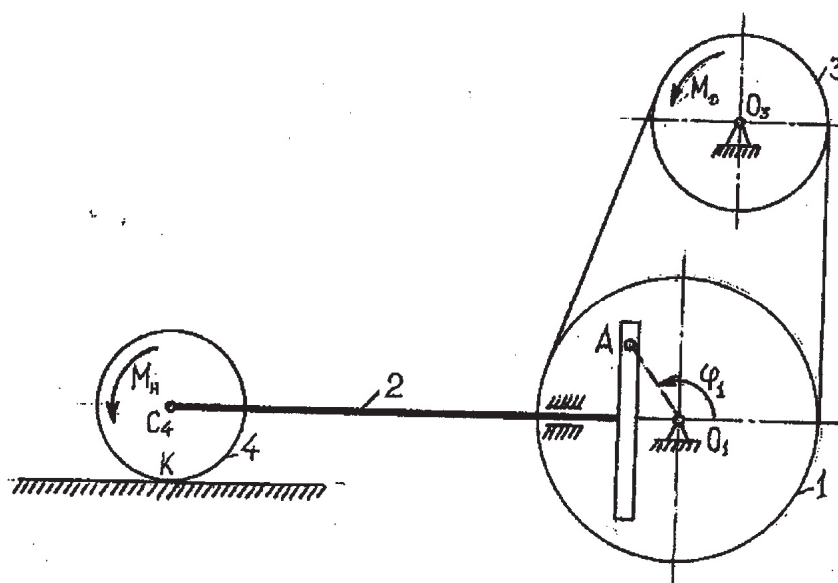


4.12.1-суреттің жалғасы



4.12.1-суреттің жалғасы

Тапсырма мысалы. (31-вариант, $n = 3$, $N = 2$)



4.12.2-сурет

Кулисалы берілісті машинаның кинематикалық сұлбасы 12.2-суретте көрсетілген. 3-ші шкивке қозғаушы момент $M_{Dz} = M_0 - k\omega_{3z}$ түсірілген. Шкив тегершік пен белдік арқылы байланысқан. Пайдалы әсер мынадай $M_H = -\mu_2\omega_{4z}$ формуламен анықталады. Сан мәндерімен берілгені

$$O_1A = r_1 = 0,06\text{ м}, \quad M_0 = 65\text{ Нм}, \quad K_T = 1\text{ Нм}\cdot\text{с}, \quad \mu_{20} = 5,36\text{ Нс/м},$$

$$J_{IT} = 1,4\text{ кгм}^2, \quad m_2 = 17\text{ кг}, \quad m_3 = 9,26\text{ кг}, \quad m_4 = 16\text{ кг}, \quad R_3 = 0,18\text{ м},$$

$$R_4 = 0,1\text{ м}, \quad \omega_0 = \text{рад/с}, \quad \varphi(0) = 0, \quad R_1 = 0,36\text{ м}.$$

Белбеу салмақсыз, созылмайды деп қарастырылады. Белбеу шкив пен тегершіктің бетінде сырғанамайды (4.12.2-сурет).

1. Механикалық жүйенің массалар центрінiң қозғалысы және кинетикалық моменті туралы теоремаларды қолданып 4-ші доңғалақтың өсіндегі динамикалық реакция күшін анықтайтын теңдеуін құрастыру қажет.

2. Кинетостатика тәсілімен K нүктесінің үйкеліс күшін анықтайтын теңдеуін құрастыру қажет.

3. Төмендегілерді пайдалана отырып машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрастыру қажет:

- а) механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрдегі математикалық өрнегі;
- б) динамиканың жалпы теңдеуі;
- в) Лагранждың екінші текті теңдеуі.

4. Арнайы компьютер көмегімен машинаның қозғалыс теңдеуін интегралдап, кинематикалық сипаттамаларының және динамикалық реакция күштерінің графиктерін тұрғызу қажет.

Шешуі. 1. Механикалық жүйенің массалар центрінің қозғалысы және кинетикалық моменті туралы теоремаларды қолданып 4-ші доңғалақтың өсіндегі динамикалық реакция күшін анықтайтын теңдеуін құрастыру.

Қарастырып отырған механикалық жүйе денелерінің орны мынадай геометриялық параметрлермен анықталады:

тегершік 1- φ_1 бұрылу бұрышымен;

кулиса 2- массалар орталығы x_2, y_2 координаттарымен;

шків 3- φ_3 бұрылу бұрышымен;

доңғалақ 4-массалар центрі x_4, y_4 координаттарымен және C_4 нүктесі арқылы өтетін өске қатысты φ_4 бұрылу бұрышымен.

Айтылған параметрлер мынадай кинематикалық қатынастармен байланысты:

тегершік 1-ге және шків 3-ке қатысты белдік сырғанамайтын болғандықтан, маховиктің және шківтің бетіндегі нүктелерінің жылдамдықтары өз ара тең

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_3, \quad v_3 = R_1 \dot{\varphi}_1, \quad v_1 = R_3 \dot{\varphi}_3, \quad (4.12.2)$$

осыдан

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1; \quad (4.12.3)$$

кулиса 2-нің ілгерілемелі және түзу сызықты қозғалуы нәтижесінде

$$y_2 = R_4 = const, \quad (4.12.4)$$

$$v_{2x} = v_{Ax} = \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1 \quad \text{немесе} \quad \dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi; \quad (4.12.5)$$

доңғалақ 4-тің жазықтық бетінде абсолют қозғалысының үздіксіз шартынан алатынымыз

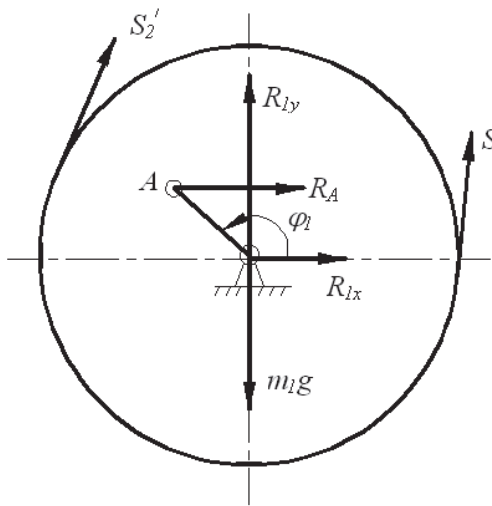
$$y_2 = R_4 = \text{const}; \quad (4.12.6)$$

доңғалақ 4 жазықтық бетінде сырғанамайтын болғандықтан

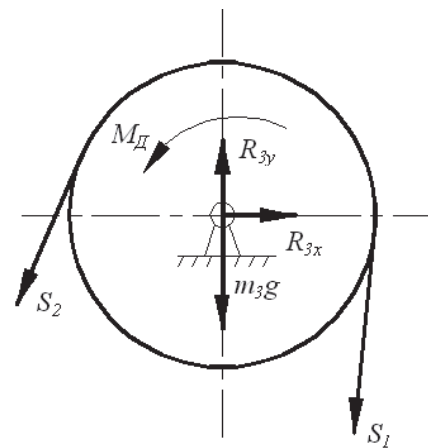
$$\dot{x}_4 = \dot{x}_2, \quad (4.12.7)$$

$$\dot{x}_4 = R_4 \dot{\varphi}_4 \quad \text{немесе} \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{x}_4}{R_4}. \quad (4.12.8)$$

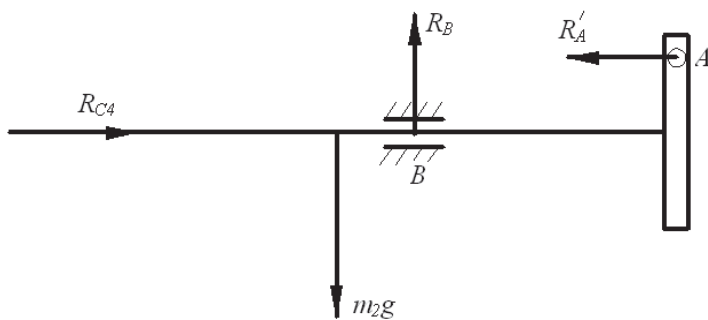
Осылайша, жеті параметр $\varphi_3, \varphi_1, \varphi_4, x_2, y_2, x_4, y_4$ алты (4.12.3) – (4.12.8) кинематикалық қатынастармен байланысқан. Осыдан, жеті параметрлердің ішінде бір параметр тәуелсіз болады. Маховиктің φ_1 бұрылу бұрышын жалпылама координат деп қабылдаймыз және φ_1 арқылы қалғандарын есептейміз



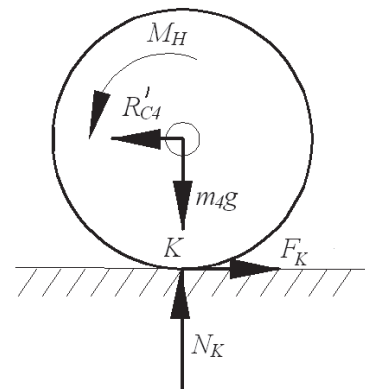
4.12.3-сурет



4.12.4-сурет



4.12.5-сурет



4.12.6-сурет

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1, \quad (4.12.9)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1, \quad (4.12.10)$$

$$\dot{x}_4 = \dot{\varphi}_1 r_1 \sin \varphi_1, \quad (4.12.11)$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1. \quad (4.12.12)$$

4-ші доңғалақ өсінің динамикалық реакция күшін анықтау үшін, түсірілген күштер әсеріндегі денелердің жеке қозғалыс тендеуін құрамыз.

Тегершік 1 массалар центрі арқылы өтетін өсін айнала қозғалады. Тегершік 1-ге салмақ күші \bar{P}_1 , айналу өсіне құраушылары \bar{R}_{1x} және \bar{R}_{1y} реакция күштері, динамикалық реакция күші \bar{R}_A , белдіктің жетекші \bar{S}'_1 және жетектегі \bar{S}'_2 тартылыс күштері әсер етеді (4.12.3- сурет). Жүйенің кинетикалық моменті туралы теореманы қолданып, тегершік 1-дің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысының дифференциалдық тендеуін құрамыз

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = \sum M_{z1}(\bar{F}_k^{(e)}) \Rightarrow J_1 \ddot{\varphi}_1 = R_1(S_1 - S_2) - R_A r_1 \sin \varphi_1, \quad (4.12.13)$$

мұндағы I_1 – тегершік 1-дің өсіне қатысты инерция моменті және $\bar{S}_1 = \bar{S}'_1$, $\bar{S}_2 = \bar{S}'_2$,

Кулиса 2 ілгерілемелі қозғалыста болады. Оған салмақ күші \bar{P}_2 , реакция күштері \bar{R}_B , \bar{R}_{C4y} , динамикалық реакция күштері \bar{R}_A , \bar{R}_{C4x} әсер етеді (4.12.5-сурет). Массалар центрінің қозғалысы x өсіне проекциясы туралы теореманы қолданып кулиса 2-нің ілгерілемелі қозғалысының дифференциалдық тендеуін құрамыз

$$m_2 \ddot{x}_2 = R_{C4x} - R_{Ax}. \quad (4.12.14)$$

Шкив 3 массалар центрі арқылы өтетін O_{3z} өсін айнала қозғалады. Шкив 3-ке салмақ күші \bar{P}_3 , қозғаушы момент M_D , құраушылары \bar{R}_{3x} , \bar{R}_{3y} байланыс реакция күштері, белдіктің жетекші \bar{S}_1 және жетектегі \bar{S}_2 тартылыс күштері әсер етеді (4.12.4-сурет).

Жүйенің кинетикалық моменті туралы теореманы қолданып, шкив 3-тің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрамыз

$$J_3 \ddot{\varphi}_3 = \sum M_{z_3}(\vec{F}_k^{(e)}) \Rightarrow J_3 \ddot{\varphi}_3 = M_{\bar{A}} + R_3(S_2 - S_1). \quad (4.12.15)$$

Доңғалақ 4 жазық параллель қозғалыста болады. Оған салмақ күші \bar{P}_4 , пайдалы әсер моменті M_H , реакция күштері \bar{N}_4 , \bar{R}_{C4y} , динамикалық реакция күші \bar{R}_{C4x} және ілінісу күші \bar{F}_K әсер етеді (4.12.6-сурет).

Жүйенің массалар центрінің қозғалысы және кинетикалық моменті туралы теоремаларды қолданып, доңғалақ 4 қозғалысының дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрамыз

$$m_4 a_{C4x} = \sum F_{kx} \Rightarrow m_4 \ddot{x}_4 = R'_{C4} - F_K,$$

$$m_4 a_{C4y} = \sum F_{ky} \Rightarrow 0 = m_4 g - N_K, \quad (4.12.16)$$

$$J_{C4z} \ddot{\varphi}_4 = \sum M_{C4z}(\bar{F}_k) \Rightarrow J_{C4z} \ddot{\varphi}_4 = M_H + F_K R_4.$$

Осылайша, тоғыз $\varphi_1, x_2, \varphi_3, x_4, \varphi_4, (S_1 - S_2), R_A, R_{C4x}, F_K$, белгісіз шамаларға қатысты бес дифференциалдық (4.12.13)-(4.12.16) және координаттар арасындағы байланысты көрсететін төрт теңдеулерге ие боламыз

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \Rightarrow \ddot{\varphi}_3 = \frac{R_1}{R_3} \ddot{\varphi}_1, \quad (4.12.17)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\varphi}_1 \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1 \Rightarrow \ddot{x}_2 = r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \quad (4.12.18)$$

$$\dot{x}_4 = \dot{\varphi}_1 \cdot r_1 \sin \varphi_1 \Rightarrow \ddot{x}_4 = r_1 (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1), \quad (4.12.19)$$

$$\dot{\varphi}_4 = \frac{r_1}{R_4} \cdot \sin \varphi_1 \Rightarrow \ddot{\varphi}_4 = \frac{r_1}{R_4} (\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1). \quad (4.12.20)$$

(4.12.13)–(4.12.16) теңдеулерден $R_A, (S_1 - S_2), F_K$, шамаларын жойып, $x_2, \varphi_3, x_4, \varphi_4$, координаттарын φ_1 арқылы өрнектеп, параметрлердің сандық мәндерін есепке ала отырып, 4-ші

доңғалақтың өсіндегі динамикалық реакция күшін анықтайтын теңдеуді аламыз

$$R_{4x} = \left(\frac{18,3}{\sin \varphi_1} - 0,21 \sin \varphi_1 \right) \ddot{\varphi}_1 - 0,21 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + \left(\frac{34,07}{\sin \varphi_1} - 32,82 \sin \varphi_1 \right) \dot{\varphi}_1 - 65.$$

2. Кинетостатика тәсілімен K нүктесінің ілінісу күшін анықтайтын теңдеуді құрастыру.

4-доңғалақтың K нүктесіндегі ілінісу күшін анықтау үшін, кинетостатика тәсілін қолданамыз. Жүйе мына денелерден тұрады: тегершік 1, кулиса 2, шкив 3 және доңғалақ 4. Байланыстардан босату принципі қолдана отырып, әрбір денені жеке қарастырамыз.

Тегершік 1 O_1 өсін айнала қозғалады. Тегершік 1-ге салмақ күші \bar{P}_1 , өстің реакция күш құраушылары \bar{R}_{1x} , \bar{R}_{1y} , динамикалық реакция \bar{R}_A , белдіктің жетекші \bar{S}_1 және жетектегі \bar{S}_2 тартылыс күштері әсер етеді (4.12.3-сурет).

Тегершік 1-дің инерция күші қарама қарсы таңбамен алынған ε_1 бұрыштық үдеу мен маховиктің инерция моменті I_1 -тің көбейтіндісіне тең қос күш моменті M_1'' - ге келтіріледі

$$M_1'' = -I_1 \varepsilon_1.$$

Маховик 1-дің актив күштері, байланыс реакция күштері және инерция күштерінің әсеріндегі тепе-теңдігін қарастыра отырып, O_1 өсіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$(S_1 - S_2)R_1 + R_A r_1 \sin \varphi_1 + M_1'' = 0. \quad (4.12.21)$$

Моменттер теңдеуіне M_1'' мәнін қоя отырып алатынымыз

$$(S_1 - S_2)R_1 + R_A r_1 \sin \varphi_1 - I_1 \varepsilon_1 = 0. \quad (4.12.22)$$

Кулиса 2 \bar{a}_2 үдеуімен ілгерілемелі қозғалыста болады. Оған салмақ күші \bar{P}_2 , байланыс реакция күштері \bar{N}_B , \bar{R}_{C4y} және динамикалық реакция күштері \bar{R}_A , \bar{R}_{C4x} түсірілген (4.12.5-сурет). Кулиса 2-нің үдеуі солға бағытталған, сондықтан оның инерция күштерінің тең әсер етуші \bar{F}_2'' күші \bar{a}_2 үдеуіне қарама-қарсы бағытталады, $\bar{F}_2'' = -m_2 \bar{a}_2$ немесе x өсіне проекциясы

$$F_{2x}^u = -m_2 a_{2x}.$$

Кулиса 2-нің горизонталь x өсіне проекция теңдеуін құрамыз

$$R_{C_{4x}} - R_A + F_{2x}^u = 0, \text{ яғни } R_{C_{4x}} - R_A - m_2 a_{2x} = 0, \quad (4.12.23)$$

Шкив 3 O_3 өсін айнала қозғалады. Шкивке салмақ күші \bar{P}_3 , қозғаушы момент M_D , реакция күші құраушылары \bar{R}_{3x} , R_{3y} , белдіктің жетекші \bar{S}_1 және жетектегі \bar{S}_2 тартылыс күштері әсер етеді (4.12.4-сурет).

Шкив 3-тің инерция күші қарама қарсы таңбамен алынған ε_3 бұрыштық үдеу мен шкивтің инерция моменті I_3 -тің көбейтіндісіне тең қос күш моменті M_3^u -ке келтіріледі

$$M_3^u = -I_3 \varepsilon_3, \text{ мұндағы } I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}.$$

Шкив 3-тің актив күштер, байланыс реакция күштері және инерция күштерінің әсеріндегі тепе-теңдігін қарастыра отырып, O_3 өсіне қатысты моменттер теңдеуін құрамыз

$$M_D - (S_1 - S_2)R_3 + M_3^u = 0, \text{ яғни}$$

$$M_D - (S_1 - S_2)R_3 - \frac{m_3 R_3^2}{2} \varepsilon_3 = 0. \quad (4.12.24)$$

Доңғалақ 4 жазық параллель қозғалады. Оған салмақ күші \bar{P}_4 пайдалы әсер моменті M_H , реакция күші \bar{N} , динамикалық реакция күші $\bar{R}_{C_{4x}}$ және ілінісу күші \bar{F}_K әсер етеді (4.12.6-сурет). Полюс ретінде C_4 нүктесін ала отырып, жазық параллель қозғалыстағы доңғалақтың инерция күшін қосамыз. Инерция күштері негізгі векторы \bar{F}_4^u -ке тең күшке және негізгі моменті M_4^u -ке тең қос күшке келтіріледі.

\bar{F}_4^u инерция күші оның \bar{a}_4 үдеуіне қарама қарсы бағытталады және теріс таңбамен алынған доңғалақтың массасы мен C_4 массалар центрі үдеуінің көбейтіндісіне тең, яғни $\bar{F}_4^u = -m_4 \bar{a}_4$ немесе x өсіне проекциясы

$$F_{4x}^u = -m_4 a_{4x}.$$

Доңғалақ 4-тің негізгі моменті қарама қарсы таңбамен алынған ε_4 бұрыштық үдеуі мен шкивтің инерция моменті I_4 –тің көбейтіндісіне тең

$$M_4^u = -I_4 \varepsilon_4, \quad \text{мұндағы} \quad I_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2}.$$

Доңғалақ 4-тің тепе теңдік екі теңдеулер жүйесін құрамыз

$$-R_{4x} - F_K + F_{4x}^u = 0, \quad M_H = F_K R_4 + M_4^u = 0,$$

яғни

$$R_{4x} - F_K - m_4 a_{4x} = 0, \quad M_H + R_4 F_K - \frac{m_4 R_4^2}{2} \varepsilon_{4z} = 0. \quad (12.25)$$

Төмендегілерді еске ала отырып $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$, $a_{2x} = \ddot{x}_2$, $\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3$, $a_{4x} = \ddot{x}_4$, $\varepsilon_4 = \ddot{\varphi}_4$ (4.12.23)-(4.12.25) теңдеулерін мынадай түрге келтіреміз

$$(S_2 - S_1)R_1 + R_A r_1 \sin \varphi_1 - I_{1z} \ddot{\varphi}_1 = 0,$$

$$R_{C4x} - R_A - m_2 \ddot{x}_2 = 0,$$

$$M_D - (S_2 - S_1)R_3 - \frac{m_3 R_3^2}{2} \ddot{\varphi}_3 = 0, \quad (4.12.26)$$

$$-R_{C4x} - F_K - m_4 \ddot{x}_4 = 0,$$

$$M_H + F_K R_4 - \frac{m_4 R_4^2}{2} \ddot{\varphi}_4 = 0.$$

(4.12.26)-теңдеулер жүйесінен R_{4x} , $(S_2 - S_1)$, R_A , шамаларын жойып, x_2 , φ_3 , x_4 , φ_4 координаттарын φ_1 арқылы өрнектеп, параметрлердің сандық мәндерін есепке ала отырып, 4-ші доңғалақтың K нүктесіндегі ілінісу күшін анықтайтын теңдеуді аламыз

$$F_K = (0,75 \sin \varphi_1 + \frac{18,3}{\sin \varphi_1}) \ddot{\varphi}_1 - 0,75 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + (16,41 \sin \varphi_1 - \frac{34}{\sin \varphi_1}) \dot{\varphi}_1 - 65$$

3. Төмендегілерді қолдана отырып машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін құрастыру.

а) механикалық жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрдегі математикалық өрнегін қолдану.

Машинаның қозғалысын анықтау үшін жүйенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз

$$dT = \sum d'A_k. \quad (4.12.28)$$

Берілген маханикалық жүйенің кинетикалық энергиясы төмендегі өрнекпен анықталады

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

мұндағы:

$$T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} - \text{тегершік 1-дің } O_1 - \text{ге қатысты тегершіктің айнала}$$

қозғалысының кинетикалық энергиясы;

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} - \text{кулиса 2-нің ілгерілемелі қозғалыстағы кинетикалық}$$

энергиясы;

$$T_3 = \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2} = \frac{m_3 R_3^2}{2} \dot{\varphi}_3^2 - \text{шків 3-тің } O_3 - \text{ке қатысты айнала}$$

қозғалысының кинетикалық энергиясы;

$$T_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{m_4 \dot{x}_4^2}{2} - \text{доңғалақ 4-тің жазық параллель}$$

қозғалысының кинетикалық энергиясы.

$\dot{x}_2, \dot{\varphi}_3, \dot{x}_4, \dot{\varphi}_4$ -ті (4.12.9)-(4.12.12) формулаларымен ауыстырсақ алатынымыз

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(I_1 + \frac{m_3 R_1^2}{2} \right) + r_1^2 \left(m_2 + \frac{3m_4}{2} \right) \sin^2 \varphi_1 \right] \dot{\varphi}_1^2. \quad (4.12.29)$$

Қозғаушы момент M_D және пайдалы әсер моменті M_H -тың жұмысын есепке ала отырып элементар жұмыстардың қосындысын есептейміз

$$\sum dA_k = M_D d\varphi_3 + M_H d\varphi_4. \quad (4.12.30)$$

(4.12.9)-(4.12.12) формулаларынан элементар орын ауыстыру қатынастарын аламыз

$$d\varphi_3 = \frac{R_1}{R_3} d\varphi_1, \quad (4.12.31)$$

$$d\varphi_3 = \frac{R_1}{R_3} d\varphi_1, \quad d\varphi_4 = \frac{r_1}{R_4} \sin \varphi_1 \cdot d\varphi_1. \quad (4.12.32)$$

(4.12.31), (4.12.32) қатынастарымен бірге $M_D = M_O - k\dot{\varphi}_3$, $M_H = -\mu_2\dot{x}_4$ -ті есепке ала отырып, келесі өрнекті аламыз

$$\sum dA_k = \left[(M_O - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1) \frac{R_1}{R_3} - \frac{\mu_2 r_1^2}{R_1^2} \dot{\varphi}_1 \sin^2 \varphi_1 \right] d\varphi_1. \quad (4.12.33)$$

Кинетикалық энергияның дифференциалы

$$dT = \left[a + b \sin^2 \varphi_1 \right] \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot d\varphi_1 + \frac{b}{2} \sin 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot d\varphi_1, \quad (4.12.34)$$

мұндағы $a = \left(I_1 + \frac{m_3 R_1^2}{2} \right)$, $b = r_1^2 \left(m_2 + \frac{3m_4}{2} \right)$.

(4.12.33), (4.12.34) теңдіктерін пайдалана отырып, (4.12.28)-ші теңдеуден машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$\left[a + b \sin^2 \varphi_1 \right] \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{b}{2} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 = \left(M_O - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu \frac{r_1^2}{R_4^2} \sin^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1. \quad (4.12.35)$$

б) динамиканың жалпы теңдеуін қолдану.

Қарастырылып отырған жүйенің еркіндік дәрежесі бірге тең, себебі берілген бұрылу бұрышындағы тегершік 1-дің орны кулиса 2, шкив 3, доңғалақ 4-тің орындарын анықтайды.

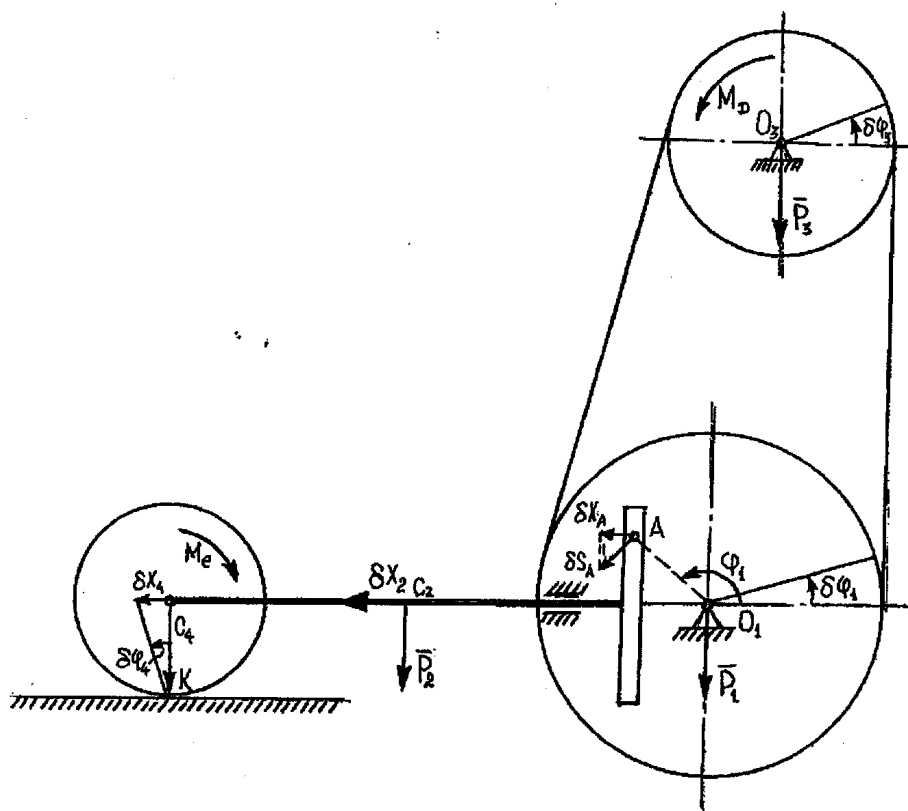
Актив күштерді және күш моменттерін суретте көрсетеміз: \bar{P}_1 – тегершік 1-дің салмақ күші, \bar{P}_2 – кулиса 2-нің салмақ күші, \bar{P}_3 – шкив 3-тің салмақ күші, \bar{P}_4 – доңғалақ 4-тің салмақ күші, M_D – қозғаушы момент, M_H – пайдалы әсер моменті (4.12.7-сурет).

Жүйенің инерция күштерін қарастыруға көшеміз. Маховик 1-дің инерция күші қарама-қарсы таңбамен алынған ε_1 бұрыштық үдеу мен маховиктің инерция моменті J_1 – тің көбейтіндісіне тең қос күш моменті M_1^u – ке келтіріледі

$$M_1^u = -I_1 \varepsilon_1.$$

Шкив 3-тің инерция күші қарама қарсы таңбамен алынған ε_3 бұрыштық үдеу мен шкивтің инерция моменті I_3 – тің көбейтіндісіне тең қос күш моменті M_3^u – ке келтіріледі

$$M_3^u = -\frac{m_3 R_3^2}{2} \varepsilon_1.$$



4.12.7-сурет

Кулиса 2-нің үдеуі солға бағытталған, сондықтан оның инерция күштерінің тең әсер етуші \bar{F}_2^u күші \bar{a}_2 үдеуіне қарама қарсы бағытталады, $\bar{F}_2^u = -m_2 \bar{a}_2$ немесе x өсіне проекциясы

$$F_{2x}^u = -m_2 a_{2x}.$$

Доңғалақ 4 жазық параллель қозғалады. Инерция күштері негізгі вектор \bar{F}_4^u – ке тең күшке және негізгі моменті M_4^u – ке тең қос күшке келтіріледі.

\bar{F}_4^u инерция күші оның \bar{a}_4 үдеуіне қарама қарсы бағытталады және теріс таңбамен алынған доңғалақтың массасы мен C_4 массалар центрі үдеуінің көбейтіндісіне тең, яғни $\bar{F}_4^u = -m_4 \bar{a}_4$ немесе x өсіне проекциясы

$$F_{4x}^u = -m_4 a_{4x}.$$

Доңғалақ 4-тің негізгі моменті қарама қарсы таңбамен алынған ε_4 бұрыштық үдеуі мен шкивтің инерция моменті I_4 –тің көбейтіндісіне тең

$$M_4^u = -\frac{m_4 R_4^2}{2} \varepsilon_1.$$

Тегершікті нағыз айналыс бағытына қарай $\delta\varphi_1$ бұрышына бұра отырып жүйені мүмкін болатын қозғалысқа келтіреміз және динамиканың жалпы теңдеуін құрамыз

$$(M_d + M_{3Z}^u)\delta\varphi_3 + M_1^u\delta\varphi_1 + F_2^u\delta x_2 + F_4\delta x_4 + (M_H + M_{4X}^u)\delta\varphi_4 = 0. \quad (4.12.36)$$

(4.12.9) және (4.12.12) теңдеулерінен мүмкін болатын орын ауыстыру қатынастарын аламыз

$$\delta\varphi_3 = \frac{R_1}{R_3}\delta\varphi_1, \quad (4.12.37)$$

$$\delta x_2 = \delta x_4 = r_1 \sin \varphi_1 \delta\varphi_1, \quad (4.12.38)$$

$$\delta\varphi_4 = \frac{r_1}{R_4} \sin \varphi_1 \delta\varphi_1. \quad (4.12.39)$$

(4.12.17)-(4.12.20), (4.12.37)-(4.12.39) қатынастарын есепке ала отырып, инерция күштерінің және қос күш моменттерінің мәндерін (4.12.36)-теңдеуге қойып, машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$\left[a + b \sin^2 \varphi_1 \right] \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{b}{2} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 = \left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu_2 \frac{r_1^2}{R_4^2} \sin^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1.$$

в) екінші текті Лагранж теңдеуін қолдану.

Қозғалыс теңдеуін Лагранждың екінші текті теңдеуі түрінде құрамыз

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (4.12.40)$$

Жалпылама координата q ретінде, горизонталь өстен саналатын φ_1 бұрышын қабылдаймыз. Жүйенің кинетикалық энергияның өрнегін мынадай түрде жазылады

$$T = \frac{1}{2} (a + b \sin^2 \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2. \quad (4.12.41)$$

Жалпылама күш Q – ді анықтау үшін ω_1 мүмкін болатын бұрыштық жылдамдықтағы актив күштер қуатын есептейміз және оны жалпылама күштер қуатына теңестіреміз

$$M_{Dz} \omega_3 + M_H \omega_4 = Q \omega_1. \quad (4.12.42)$$

(4.12.9)-(4.12.12) бойынша есептелген, мүмкін болатын бұрыштық жылдамдықты (4.12.42) - өрнегіне қоямыз

$$M_D \dot{\varphi}_1 \frac{R_1}{R_3} + M_H \frac{r_1}{R_4} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 = Q \dot{\varphi}_1.$$

Осыдан, параметрлердің сандық мәндерін ескере отырып алатынымыз

$$Q = \left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \frac{\mu r_1^2}{R_1^2} \dot{\varphi}_1 \sin^2 \varphi_1. \quad (4.12.43)$$

(4.12.42)- ге сәйкес (4.12.43) - өрнегін дифференциалдаймыз

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{b}{2} \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 (a + b \sin^2 \varphi_1), \quad (4.12.44)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \ddot{\varphi}_1 (a + b \sin^2 \varphi_1) + b \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1.$$

(4.12.44)-ны (4.12.40)-теңдеуге қойып, машина қозғалысының дифференциалдық теңдеуін аламыз

$$\left[a + b \sin^2 \varphi_1 \right] \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{b}{2} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 = \left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu \frac{r_1^2}{R_4^2} \sin^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1.$$

4. Арнайы компьютер көмегімен машинаның қозғалыс теңдеуін интегралдап, кинематикалық сипаттамаларының және динамикалық реакция күштерінің графиктерін тұрғызу.

Алынған теңдеу сызықты емес, аналитикалық шешімін табу мүмкін емес, сондықтан Mathcad жүйесінде сандық шешімін іздейміз. Ол үшін алынған дифференциальдық теңдеуді төмендегі түрде жазамыз

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} \dot{\varphi}_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu \frac{r_1^2}{R_4^2} \sin^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - \frac{b}{2} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{a + b \sin^2 \varphi_1}. \quad (4.12.45)$$

Алынған екінші текті дифференциалдық теңдеуді бірінші текті екі теңдеулер жүйесі түрінде жазамыз

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \\ \dot{\omega}_1 = \frac{\left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} \omega_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu \frac{r_1^2}{R_4^2} \sin^2 \varphi_1 \cdot \omega_1 - \frac{b}{2} \cdot \sin 2\varphi_1 \cdot \omega_1^2}{a + b \sin^2 \varphi_1}. \end{cases}$$

Белгісіз векторды мынадай түрде белгілейміз $U = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$, яғни

вектордың элементтері $U_0 = \varphi_1, \quad U_1 = \omega_1.$



Дифференциальдық теңдудің оң жағындағы вектор мынадай түрде жазылады

$$DU(t,U) = \begin{pmatrix} U_1 \\ \frac{\left(M_0 - k \frac{R_1}{R_3} U_1 \right) \frac{R_1}{R_3} - \mu \frac{r_1^2}{R_4} \sin^2 U_0 \cdot U_1 - \frac{b}{2} \cdot \sin 2U_0 \cdot U_1^2}{a + b \sin^2 U_0} \end{pmatrix}.$$

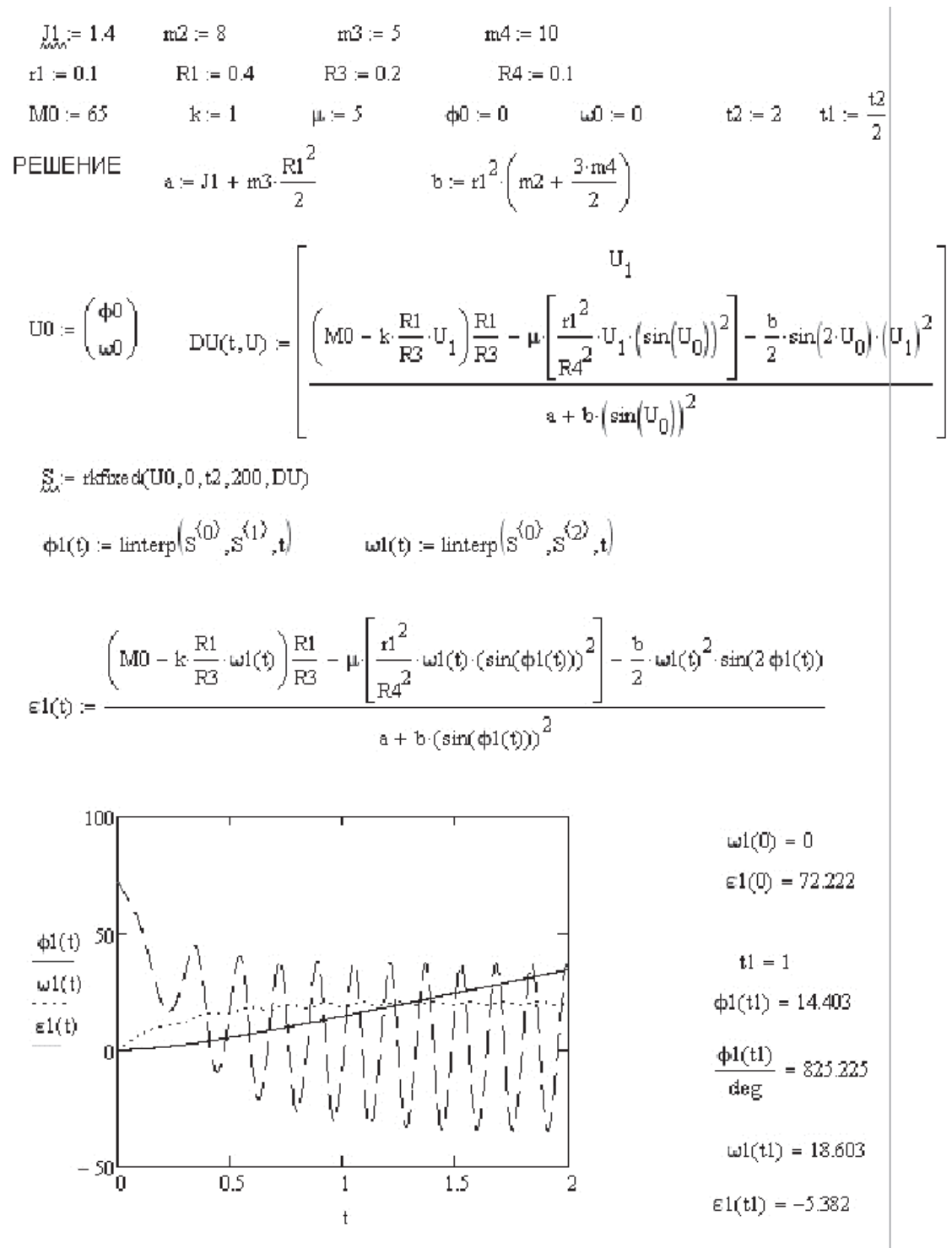
Бастапқы шартымен берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесін (Коши есебін) Рунг-Кутта тәсілін тарататын Mathcad жүйесінде тұрғызылған $rkfixed(U0,0,t2,200,DU)$ функциялары көмегімен шешуге болады. Мұндағы, дифференциалдық теңдеулер жүйесін құрастыратын бірінші параметр бастапқы векторды, екінші және үшінші параметр – интегралдау интервалын, 200 – нақты интегралдау қадам санын, соңғы параметр – векторлық функцияны көрсетеді. Сандық шешімнің қорытындысы $[0, t_2]$ уақыт кесіндісінде

$\Delta t = \frac{t_2}{200}$ қадамымен маховик 1-дің бұрылу бұрышы және бұрыштық жылдамдық матрицасының сан-мәні болып табылады.

Графигін тұрғызу үшін айнымалылардың табылған нақты мәндерінде олардың интерполяция жолымен уақытқа тәуелді функцияларын табу және $linterp(x,y,t)$ түріндегі міндетті функцияның көмегімен сызықты интерполяцияны пайдалану қажет.

4.12.8-суретте көрсетілгендей маховик 1-дің бұрылу бұрышының, бұрыштық жылдамдығының және бұрыштық үдеуінің уақытқа тәуелді шешімін аламыз және графигін тұрғызамыз. Маховиктің бастапқы, яғни механизмнің қозғалысы аумалы болып табылады. Шамамен 1 секундтан кейін орнықталады және қозғалысы периодты болады.  (Лупа) және  (Слежение) режимі көмегімен маховик 1-дің бұрыштық жылдамдығы шамамен 19 рад/с -тан 21 рад/с -қа, ал бұрыштық үдеуі -34 рад/с^2 -тан 37 рад/с^2 -қа дейінгі аралықта орнықтылық режиміне келетінін түсінуге болады. Маховиктің салыстырмалы айнылмалы айналысы мынадай

$$\delta = \frac{\omega_1^{\max} - \omega_1^{\min}}{\omega_1^{\max}} = \frac{21 - 19}{21} = 0,1.$$



4.12.8-сурет

Кинематикалық қатынастарын пайдаланып, денелер жүйесінің сызықтық және бұрыштық жылдамдықтарының уақытқа тәуелді графигін тұрғызамыз. Кулиса 2, дөңгелек 4 оңға-солға қозғалатын болғандықтан, кулисаның v_2 жылдамдығы және дөңгелектің бұрыштық жылдамдығы ω_4 таңбаларын ауыстыратындығы көрінеді.

Сызықтық және бұрыштық жылдамдықтарының кинематикалық қатынастарын дифференциалдап, кулиса 2 және A нүктесінің үдеулері үшін, сонымен қатар тегершік 3 және доңғалақ 4 үшін төмендегі өрнектерді аламыз

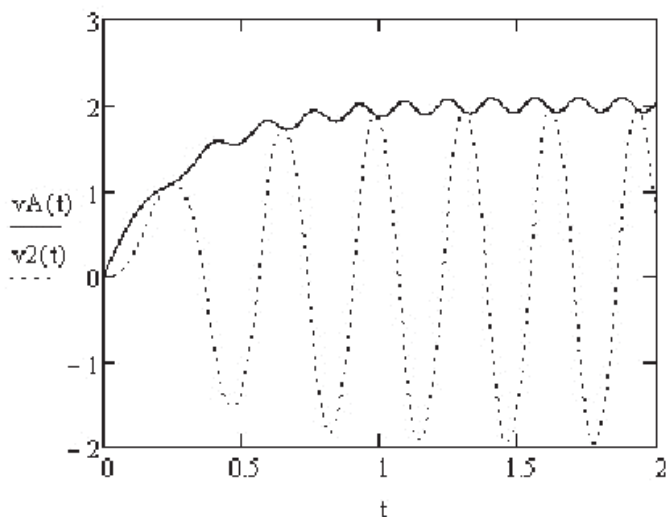
$$a_A = r_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4},$$

$$a_2 = \dot{v}_2 = r_1 (\cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \sin \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1) = r_1 (\cos \varphi_1 \cdot \omega_1^2 + \sin \varphi_1 \cdot \varepsilon_1),$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{R_1}{R_3} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = \frac{\dot{v}_{C4}}{R_4} = \frac{a_2}{R_4}.$$

Алынған формулаларды енгізіп, Mathcad жүйесінде кулиса 2 және A нүктесінің үдеулерінің, сонымен қатар тегершік 3 және доңғалақ 4-ің бұрыштық үдеулерінің уақытқа тәуелді графигін тұрғызамыз (4.12.9, 4.12.10-сурет).

$$v_A(t) := r_1 \cdot \omega_1(t) \quad v_2(t) := r_1 \cdot \sin(\phi_1(t)) \cdot \omega_1(t) \quad \omega_3(t) := \frac{R_1}{R_3} \cdot \omega_1(t) \quad \omega_4(t) := \frac{r_1 \cdot \sin(\phi_1(t))}{R_4} \cdot \omega_1(t)$$

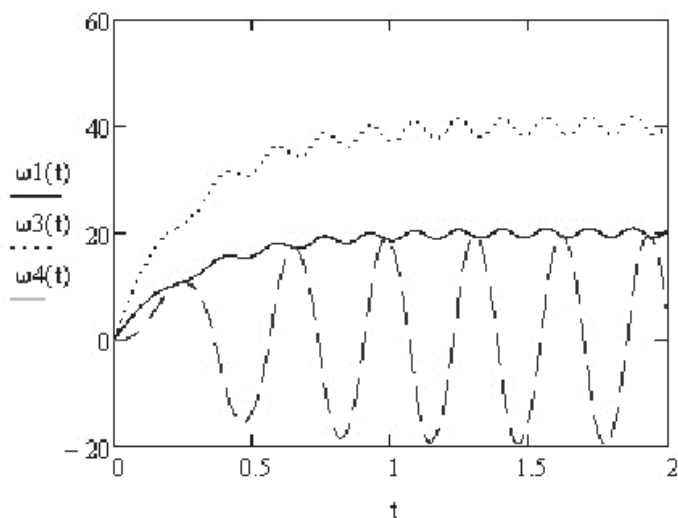


$$v_2(0) = 0$$

$$v_A(0) = 0$$

$$v_2(t_1) = 1.795$$

$$v_A(t_1) = 1.86$$



$$\omega_1(0) = 0$$

$$\omega_3(0) = 0$$

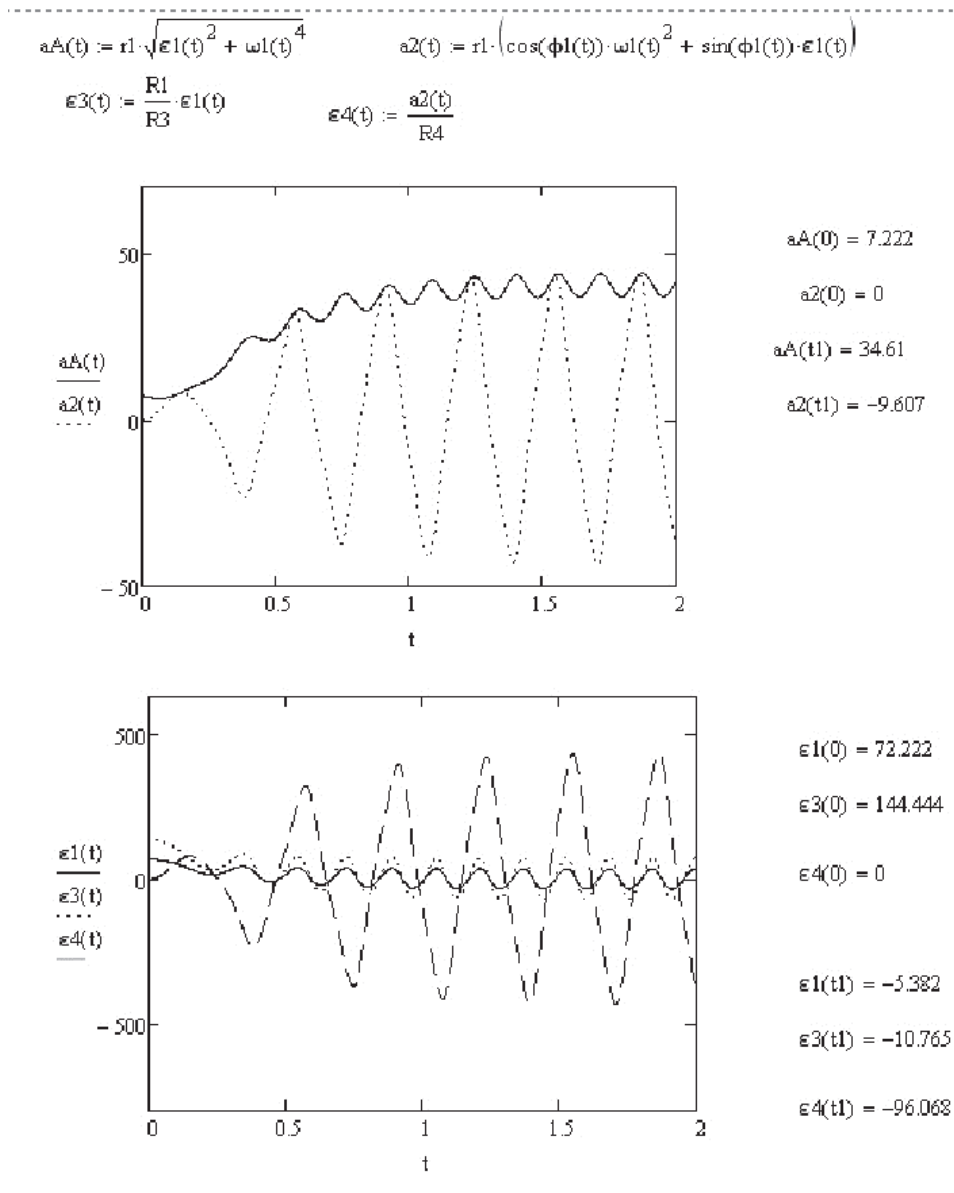
$$\omega_4(0) = 0$$

$$\omega_1(t_1) = 18.603$$

$$\omega_3(t_1) = 37.205$$

$$\omega_4(t_1) = 17.95$$

4.12.9-сурет



4.12.10-сурет

Алынған графиктерге талдау жүргізіп, 4.12.2-кестеге енгіземіз.

4.12.2-кесте

Сандық мәндері	Орнықтылық режим		Сандық мәндері	Орнықтылық режим	
	Ең үлкен мәндері	Ең кіші мәндері		Ең үлкен мәндері	Ең кіші мәндері
$v_A, м/с$	1,86	0	$a_A, м/с^2$	34,61	7.222
$v_2, м/с$	1,795	0	$a_2, м/с^2$	9,607	0
$\omega_3, рад/с$	37,205	0	$\varepsilon_3, рад/с^2$	144,444	10,765
$\omega_4, рад/с$	17,95	0	$\varepsilon_4, рад/с^2$	96,068	0

Денелердің механикалық жүйесінің дифференциалдық теңдеулерінен байланыстардың динамикалық реакция күштерінің өрнектерін аламыз

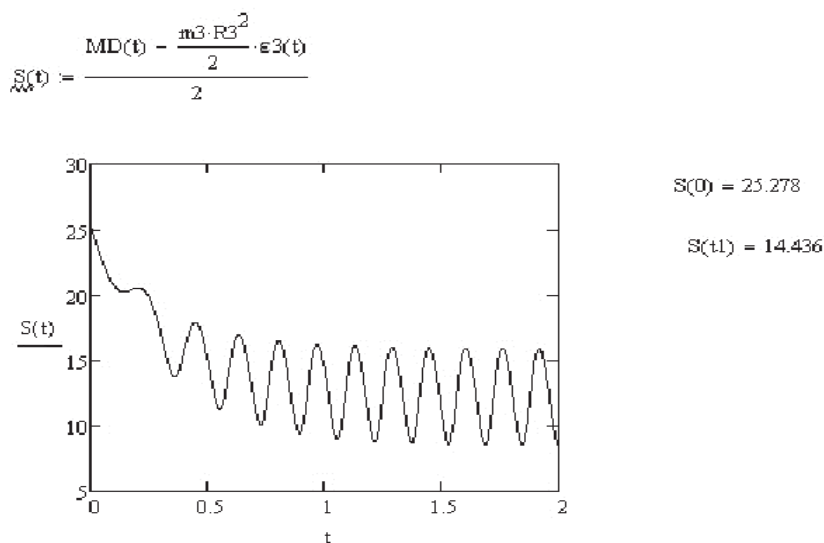
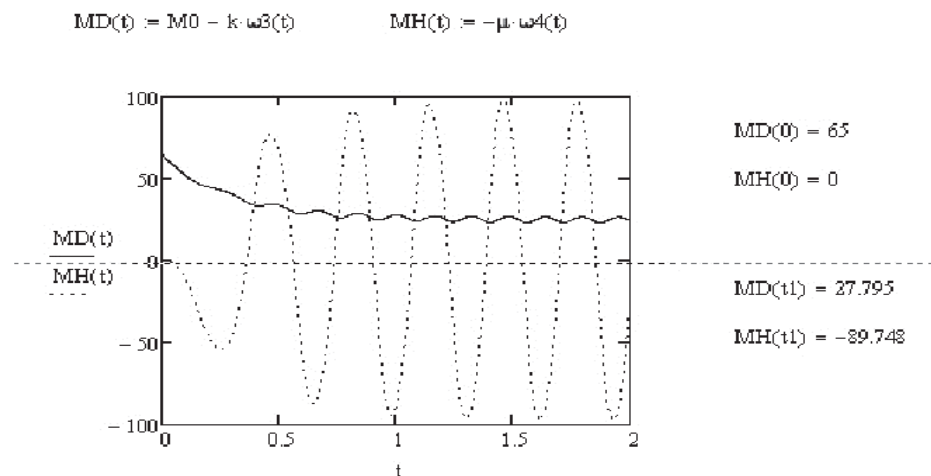
$$S = S_1 - S_2 = \frac{M_{\bar{A}} - J_3 \ddot{\varphi}_3}{R_3},$$

$$R_A = \frac{(S_1 - S_2)R_1 - J_1 \ddot{\varphi}_1}{r_1 \sin \varphi_1},$$

$$R_{C4} = R_A - m_2 \ddot{x}_2,$$

$$F_K = R_{C4} - m_4 \ddot{x}_2.$$

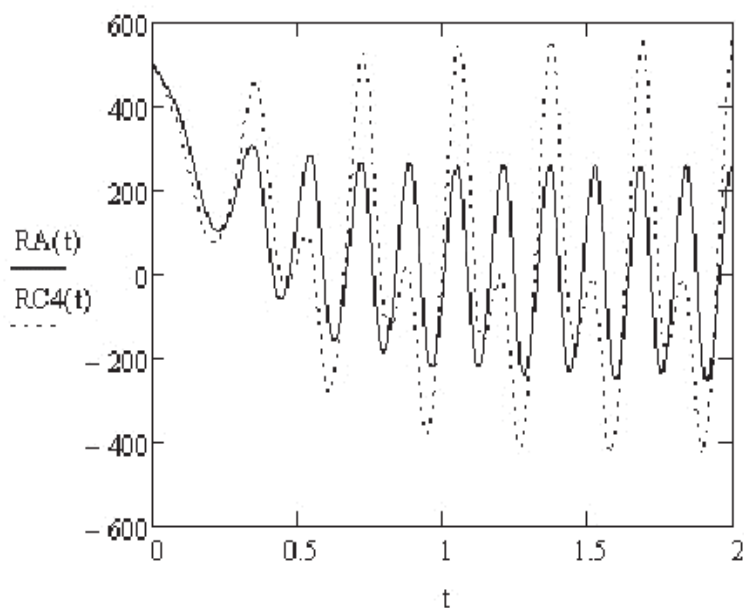
Mathcad жүйесінде берілген қозғаушы, пайдалы күш моменттерінің және байланыстардың реакция күштерінің анықтаймыз және уақытқа тәуелді графигін тұрғызамыз (4.12.11, 4.12.12, 4.12.13-сурет).



4.12.11-сурет

$$RA(t) := \frac{J1 \cdot \epsilon1(t) - S(t) \cdot r1 \cdot \sin(\phi1(t))}{R3}$$

$$RC4(t) := RA(t) - m2 \cdot a2(t)$$



$$RA(0) = 505.556$$

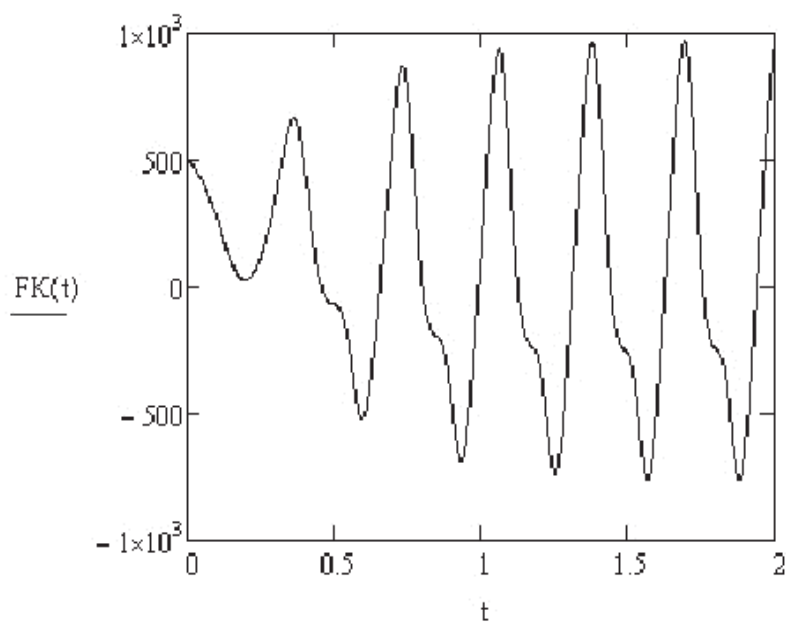
$$RC4(0) = 505.556$$

$$RA(t1) = -44.641$$

$$RC4(t1) = 32.213$$

4.12.12-супер

$$FK(t) := RC4(t) - m4 \cdot a2(t)$$



$$FK(0) = 505.556$$

$$FK(t1) = 128.282$$

4.12.13-супер

Қорытындыларды талдау

Тұрғызылған графиктерге талдау жүргізе отырып 4.12.3-кестені толтырамыз.

Денелер жүйесінің инерциялық сипаттамаларын 2 есе өсіре отырып сандық эксперимент жүргіземіз: маховиктің J_1 инерция моментін және m_2, m_3, m_4 массаларды. Қозғалыстың қалыпты орнына келу уақытына J_1 инерция моментінің әсері көбірек болатыны көрінеді. $J_1 = 2,8 \text{ кгм}^2$ болғанда қозғалыстың қалыпты орнына келу уақыты $1,5 \text{ с}$ -тан кейін, ал $J_1 = 5,6 \text{ кгм}^2$ болғанда қозғалыстың қалыпты орнына келу уақыты $2,5 \text{ с}$ -тан кейін. Сонымен қатар маховиктің инерция моменті көбейгенде маховиктің салыстырмалы айнымалы айналысы төмендейді, яғни оны бірқалыпты айналмалы қозғалысқа жақын қозғалысқа алып келеді.

4.12.3-кесте

Шамасы	Орнықтылық режим		Шамасы	Орнықтылық режим	
	Ең үлкен мәндері	Ең кіші мәндері		Ең үлкен мәндері	Ең кіші мәндері
$M_D Hm$	65	0	$R_A H$	505,556	-44,64
$M_H Hm$	89,748	27,795	$R_{C4} H$	505,556	32,213
$S H$	14,436	25,278	$F_K H$	505,556	128,282

ГЛОССАРИЙ

Абсолют қатты дене – кез келген екі нүктесінің ара қашықтығы өзгермейтін дене.

Ауырлық центрі (дененің) - дене бөлшектерінің ауырлық күштерінен тұратын параллель күштер жүйесінің центрі.

Айналмалы қозғалыс (қозғалмайтын өсті айнала қозғалатын дене қозғалысы) - екі нүктесі қозғалмайтын дененің қозғалысы.

Абсолют жылдамдық - тасымал және салыстырмалы жылдамдықтардың геометриялық қосындысына тең.

Абсолют үдеу - тасымал, салыстырмалы және Кориолис үдеулерінің геометриялық қосындысына тең.

Байланыс - берілген денеге бір күшпен қарсы әсер етіп оның қозғалысын шектейтін дене.

Байланыс реакциясы - байланысты ойша алып тастаған кездегі мүмкін болатын дене қозғалысының бағытына қарама - қарсы бағытталған күш.

Байланыс статикада - берілген дененің кейбір бағыттардағы қозғалыстарын болдырмай, оларға шектеу жасайтын тыныштықта болатын дене.

Бас вектор - O центріне жинақталған күштер жүйесінің тең әсер етуші күші.

Бас момент – O центріне қатысты күштер жүйесінің моменттерінің қосындысына тең шама.

Бірқалыпты айнымалы қозғалыс - үдеуі тұрақты нүктенің түзу сызықты қозғалысы.

Бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс – жылдамдығы тұрақты нүктенің қисық сызықты қозғалысы.

Бірқалыпты айнымалы қозғалыс - нүктенің жанама үдеуі қозғалыс кезінде үнемі тұрақты болатын қисық сызықты қозғалысы.

Бұрыштық жылдамдық - берілген уақыт мезгіліндегі бұрылу бұрышынан уақыт бойынша алынған туындысына тең болатын шама.

Бұрыштық үдеу - бұрыштық жылдамдықтан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең, немесе φ айналу бұрышынан уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең болатын шама.

Бір қалыпты айналмалы қозғалыс – бұрыштық үдеуі нөлге тең, ал бұрыштық жылдамдығы тұрақты болатын дененің айналмалы қозғалысы.

Бір қалыпты айнымалы айналмалы қозғалыс – бұрыштық үдеуі нөлге тең болатын дененің айналмалы қозғалысы.

Дененің ауырлық (гравитациялық) массасы - денедегі материя мөлшерінің өлшемі ретінде алынатын, дененің салмағының еркін түсу үдеуіне қатынасымен анықталатын, шама.

Жылдамдық векторы - оның радиус–векторының уақыт бойынша алынған туындысына тең болып келген векторлық шама.

Жанаспа жазықтық - траекторияның бір–біріне шексіз жақын орналасқан үш нүктесі арқылы өтетін жазықтық.

Жанама үдеу - жылдамдықтың шама жағынан өзгеруін сипаттайды, өйткені ол жылдамдықтың модулінен уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең.

Жазық – параллель қозғалыс - қатты дененің барлық нүктелері қандайда бір қозғалмайтын жазықтыққа параллель қозғалатын қозғалыс.

Жылдамдықтар лездік центрі - берілген лездік уақыт мезгілінде, жылдамдығы нөлге тең болатын жазық фигура жазықтығының бір нүктесі.

Еркін дене - кеңістікте кез келген бағытта қозғалыс жасай алатын дене.

Еркін емес дене - кейбір бағытта қозғалыс жасай алмайтын дене.

Еркін жүйе - нүктелердің кеңістікте орын ауыстыру еркіндік дәрежесі шектелмеген материялық нүктелердің механикалық жүйесі.

Еркін емес жүйе - нүктелердің еркін қозғалуын тежеп отыратындай алдын ала қосымша шарттар қойылған механикалық жүйе.

Ілгерілемелі қозғалыс (қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы) - әрбір екі нүктесін қосатын түзулердің кез келген өзіне - өзі тек параллель қозғалатындай қозғалыс түрі.

Ішкі күштер - берілген механикалық жүйе нүктелерінің арасында болатын өзара әсер ететін күштері.

Инерциялық жүйелері - Ньютон заңдары әсіресе инерция заңы орынды болатын координаттар өстерінің жүйелері.

Импульс (уақыт аралығындағы күш импульсі) - элементар импульстерден уақыт аралығында алынған интеграл арқылы анықталады.

Импульс (уақыт аралығындағы күш импульсі) - уақыт аралығындағы нүктенің қозғалыс мөлшерлері өзгеруіне тең.

Күш – материялық денелердің өзара механикалық әсерлерінің өлшемі.

Күш векторлық шама: шамасына, бағытына және түсу нүктесіне тәуелді.

Күштер жүйесі - берілген бір қатты денеге немесе механикалық жүйеге әсер ететін күштер жиынтығы.

Күштер жүйесі (теңгерілген күштер жүйесі) - күштердің нөлге эквивалент жүйесі.

Күш (тең әсерлі күш) - қатты денеге түсірілген күштер жүйесіне эквивалент бір күш.

Күш (абсолют қатты денеге әсер етуші күш) - сырғымалы вектор.

Күштер жүйесі (теңгерілген күштер жүйесі) – нөлге эквивалент күштер жиынтығы.

Күштер жүйесі (жинақталатын күштер жүйесі) - әсер ету сызықтары бір O нүктесінде қиылысатын күштер жиынтығы.

Күштің координаттық өске түсірілген проекциясы - күштің шамасы мен күш және өстің оң бағыттары арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең шама.

Күштің нүктеге қатысты алгебралық моменті - “+”, немесе “-” таңбасымен алынған күш пен оның сол нүктеге қатысты иінінің көбейтіндісіне тең болатын шама.

Күш иіні (нүктеге қатысты күш иіні) - нүктеден күштің әсер ету сызығына дейінгі қашықтық.

Күштің нүктеге қатысты моменті - радиус-вектор \vec{r} мен \vec{F} күшінің векторлық көбейтіндісіне тең вектор.

Күштің өске қатысты моменті - күштің берілген өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясының өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты алынған моментінің “+”, немесе “-” таңбасымен алынған сан шама.

Кинематика - денеге әсер ететін күштер есепке алынбаған жағдайдағы механикалық қозғалыс қарастырылатын теориялық механиканың бөлімі.

Кинетикалық момент (нүктенің центрге қатысты кинетикалық моменті) - материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің қандайда бір центрге қатысты алынған моментіне тең болатын векторлық шама.

Кинетикалық энергия (нүктенің кинетикалық энергиясы) - массасы мен жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең болатын скаляр шама.

Кинетикалық момент (механикалық жүйенің кинетикалық моменті) - жүйе нүктелерінің O центрге қатысты алынған кинетикалық моменттерінің бас векторына (геометриялық қосындысына) тең.

Кинетикалық энергия (механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы) - барлық материялық нүктелердің кинетикалық энергияларының қосындысына тең скаляр шама.

Кинетикалық энергия (ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы) - дененің массасы мен оның жылдамдығының квадратының көбейтіндісінің жартысына тең скаляр шама.

Кинетикалық энергия (айналмалы қозғалыстағы қатты дененің кинетикалық энергиясы) - дененің айналу өсіне қатысты алынған инерция моменті мен оның бұрыштық жылдамдығының квадратына көбейтіндісінің жартысына тең скаляр шама.

Қос күш - абсолют қатты денеге әсер етуші шамалары тең, өзара параллель және қарама - қарсы бағытталған екі күштің жүйесі.

Қос күштің иіні - күштердің әсер ету сызықтары аралығының ең жақын ара қашықтығы.

Қос күш моменті - модулі, оның күші мен иінінің көбейтіндісіне тең, ал бағыты қос күш жазықтығына перпендикуляр болып келетін вектор.

Қисықтық (траекторияның берілген нүктесіндегі қисықтығы) - элементар сыбайластық бұрыштың доға элементіне қатынасына тең шама.

Қисықтық радиусы (M нүктесіндегі қисықтық радиусы) - осы нүктедегі қисықтығына кері шама.

Қозғалыс мөлшері (нүктенің қозғалыс мөлшері) - материялық нүктенің массасы мен жылдамдығының көбейтіндісіне тең векторлық шама.

Қозғалыс мөлшері (механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері) - барлық материялық нүктелердің қозғалыс мөлшер векторларының геометриялық қосындысына тең болатын вектор.

Механикалық қозғалыс - дененің өзге денеге қатысты кеңістіктегі орнының уақыт өтуіне байланысты өзгеріп отыруы.

Механикалық жүйе - қозғалыстары өзара тәуелді болып келетін материялық нүктелер жиынтығы.

Нормаль жазықтық - жанамаға перпендикуляр, M нүктесі арқылы өтетін жазықтық.

Нормаль үдеу - жылдамдықтың бағытының өзгеруін сипаттайды.

Статика аксиомалары – механиканың жалпы заңдары.

Сыртқы күштер - берілген жүйе құрамына енбейтін сыртқы жүйе нүктелеріне жасайтын әсер етуінен туатын күштер.

Түзулеуші жазықтық - траекторияның M нүктесіндегі жанама арқылы өтетін нормаль және жанаспа жазықтыққа перпендикуляр үшінші жазықтық.

Табиғи координаттар жүйесі, немесе табиғи үш жақ - бас нүктесі M болатын $(M\bar{r}\bar{n}\bar{b})$ координаттар жүйесі.

Түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс - нүктенің жылдамдығы тұрақты, түзу сызықты қозғалысы.

Үдеу - жылдамдықтың уақыт өсуіне байланысты өзгеруінің тездігін сипаттайтын физикалық шама.

Үдеу (берілген уақыт мезгіліндегі нүктенің) - жылдамдық векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына) немесе нүктенің радиус - векторының уақыт бойынша алынған екінші туындысына (2.14) тең болатын векторлық шама.

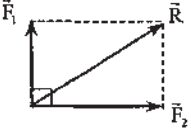
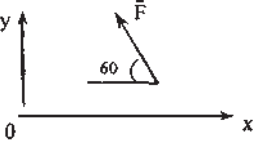
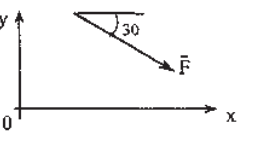
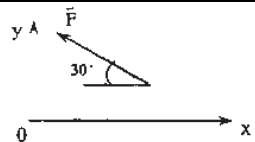
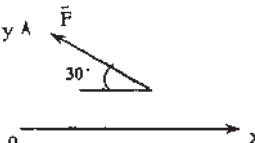
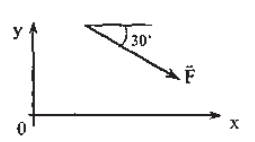
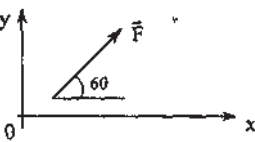
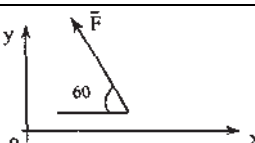
Элементар импульс (күштің элементар импульсі) - материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің дифференциалына тең.

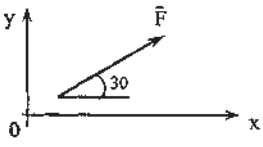
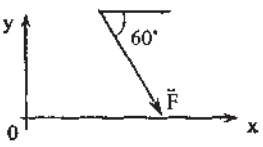
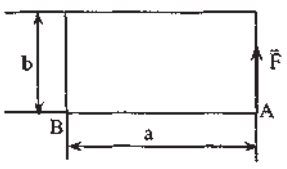
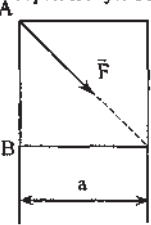
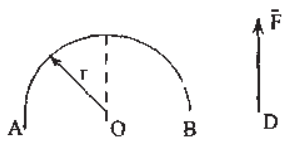
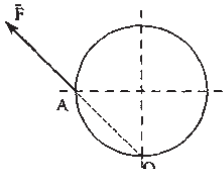
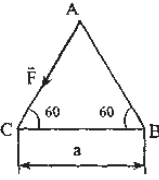
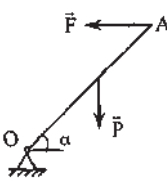
Элементар жұмыс (күштің элементар жұмысы) - материялық нүктенің кинетикалық энергиясының дифференциалына тең.

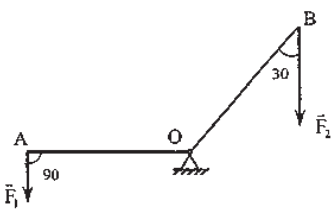
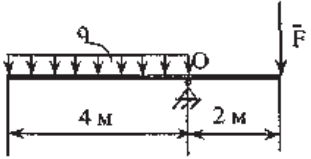
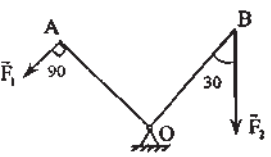
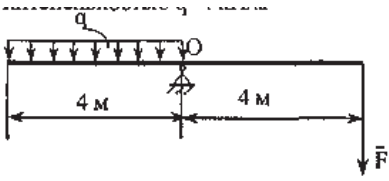
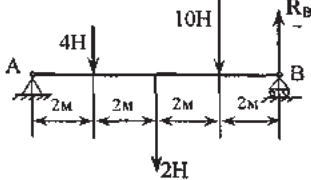
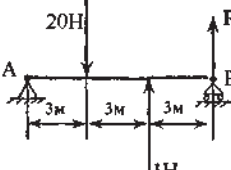
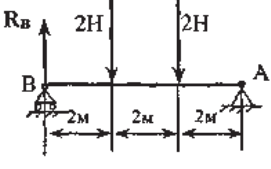
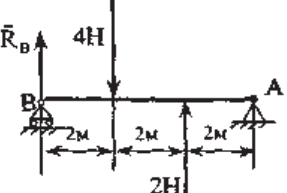
Студенттердің білімін тексеруге тест сұрақтары

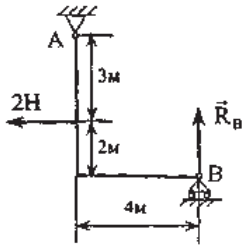
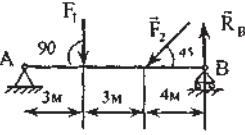
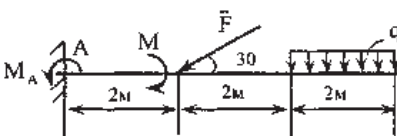
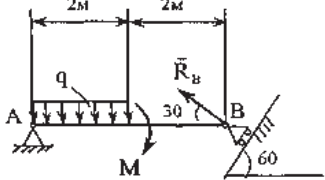
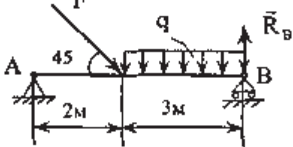
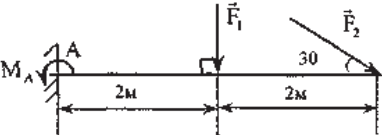
1. Теңгерілген күштер жүйесін қосып немесе алып тастау туралы аксиома қалай тұжырымдалады?
2. Материялық нүкте дегеніміз не?
3. Абсолют қатты дегеніміз не?
4. Күштер жүйесінің тең әсер етуші күші дегеніміз не?
5. Нүктеге қатысты күш моменті дегеніміз не?
6. Вариньон теоремасы (тең - әсер етуші күш туралы).
7. Екі күштің тепе-теңдігі туралы аксиома қалай тұжырымдалады?
8. Теңгерілген күштер жүйесі дегеніміз не?
9. Байланыс дегеніміз не?
10. Еркін емес дене қандай жағдайда еркін дене деп қарастырылады?
11. Күштің өске проекциясы неге тең?
12. Қатаю аксиомасы қалай тұжырымдалады?
13. Қандай мәселе статикалық анықталмаған деп аталады?
14. Үш күш туралы теорема.
15. Берілген нүктеге қатысты векторлық күш моментінің шамасы неге тең?
16. Қандай шарттарда екі қос күш эквивалентті болады?
17. Қос құраушы күштерінің қосындысы неге тең?
18. Күшті параллель көшіру туралы теорема.
19. Дара денелер жүйесінің тепе-теңдігі туралы мәселені қалай шешеді.
20. Қос күштерді қосу туралы теорема қалай оқылады?
21. Күш жүйесінің бас моменті дегеніміз не?
22. Параллель күштер жүйесінің центрі дегеніміз не?
23. Күш векторы бірлік векторлары арқылы қалай өрнектеледі?
24. \vec{F} күшінің Ox жазықтығына проекциясы дегеніміз не?
25. Күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдік шарттарының аналитикалық түрі қалай тұжырымдалады?
26. Байланыс реакциясы дегеніміз не?
27. Статика бөлімінің негізгі теоремасы қалай оқылады?
28. Күш жүйесінің бас векторы дегеніміз не?
29. Қандай жағдайда кеңістіктегі күштердің кез келген жүйесі бұранда ережесіне келтіріледі?

30. Қос күштің момент векторы қалай бағытталады?
31. Ауырлық күштер центрін табудың теріс масса әдісінің мәні неде?
32. Кез келген центрге қатысты қос күш моментінің алгебралық қосындысы неге тең?
33. Күштің өске қатысты моменті дегеніміз не?
34. Қос күш дегеніміз не?
35. Тең әсер етуші күш пен бас вектордың айырмашылығы неде?
36. Берілген жүйенің келтіру центрін өзгерткенде қалай өзгереді?
37. Қандай жағдайда кез келген кеңістік күштер жүйесінің бас моменті келтіру центріне тәуелді емес?
38. Координаттық өстерге қатысты күш моменттерінің аналитикалық әдіспен анықтайтын формуланы жаз.
39. Үйкеліс бұрышымен үйкеліс коэффициентінің арасында қандай байланыс бар?
40. Байланыстарды босату туралы аксиома қалай тұжырымдалады?
41. Берілген қатты дененің ауырлық центрі дегеніміз не?
42. Қандай күштер жүйесі эквивалентті деп аталады?
43. Күштер жүйесі дегеніміз не?
44. Қандай күшті тең әсер етуші күш деп атайды?
45. Әсер және қарсы әсер заңы қалай тұжырымдалады?
46. Күш векторы қандай вектор?
47. Параллелограмм туралы аксиома қалай тұжырымдалады?
48. Жинақталатын күштер жүйесі дегеніміз не?
49. Жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдік шартының геометриялық түрі қалай тұжырымдалады?
50. Егер күштің координат өстеріндегі проекциялары белгілі болса, онда күш шамасы неге тең?
51. Статика дегеніміз не?
52. Нүктеге қатысты күштің момент векторы қалай бағытталады?
53. Егер бас вектор нөлге тең болса, ал бас момент нөлге тең болмаса, онда кез келген күштердің кеңістік жүйесі неге келтіріледі?
54. Қандай жағдайда кез келген күштердің кеңістік жүйесі қос күшке келтіріледі?
55. Қандай жағдайда кез келген күштердің кеңістік жүйесі бұранда ережесіне келтіріледі?

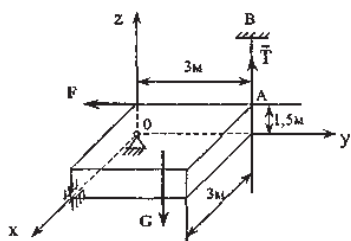
56. Үшбұрыш ауданының ауырлық центрі қандай нүктеде жатады?	
57. Шеңбер доғасының ауырлық центрі қандай нүктеде жатады?	
58. Домалау үйкеліс коэффициенті мен сырғанау үйкеліс коэффициентінің айырмашылығы неде?	
59. Егер бас вектор нөлге тең болмаса, ал бас момент нөлге тең болса, онда кез келген күштердің кеңістік жүйесі неге келтіріледі?	
60. Мәселе есеп статикалық анықталған болуы үшін, күштердің жазық жүйесінің тепе-теңдік теңдеулер құрамында неше белгісіз болуы керек.	
	61. Суретте көрсетілген екі жинақталатын күштердің тең етуші күшін анықтау керек. $F_1 = 9H, F_2 = 12H$.
	62. \vec{F} күшінің өс Ox – ке проекциясын анықтау керек.
	63. \vec{F} күшінің өс Oy – ке проекциясын анықтау керек.
	64. \vec{F} күшінің өс Ox – ке проекциясын анықтау керек.
	65. \vec{F} күшінің өс Oy – ке проекциясын анықтау керек.
	66. \vec{F} күшінің өс Oy – ке проекциясын анықтау керек.
	67. $F = 8H$ күшінің өс Ox – ке проекциясын анықтау керек.
	68. $F = 4H$ күшінің өс Ox – ке проекциясын анықтау керек.

	<p>69. $F = 18H$ күшінің өс Oy – ке проекциясын анықтау керек</p>
	<p>70. $F = 6H$ күшінің өс Oy – ке проекциясын анықтау керек.</p>
	<p>71. Қабырғалары $a = 0,2M$, $b = 0,1M$ тік бұрышты пластинаның A төбесіне $F = 30H$ күш түсірілген. B нүктесіне қатысты осы күштің алгебралық моментін анықтау керек.</p>
	<p>72. Қабырғасы $a = 0,5M$, квадрат пластинаның A төбесіне $F = 100H$ күш түсірілген. B нүктесіне қатысты осы күштің алгебралық моментін анықтау керек.</p>
	<p>73. Шеңбердің радиусы $r = 3M$, ал аралық $BD = 2M$. Денге $F = 7H$ күш түсірілген. A нүктесіне қатысты осы күштің алгебралық моментін анықтау керек.</p>
	<p>74. Радиусы $R = 0,3M$ дөңгелек тегершікке $F = 20H$ күш түсірілген. O нүктесіне қатысты осы күштің алгебралық моментін анықтаңыз.</p>
	<p>75. Қабырғасы $a = 0,5M$, тең қабырғалы үшбұрыш пластинаның A төбесіне $F = 100H$ күш түсірілген. B нүктесіне қатысты осы күштің алгебралық моментін анықтау керек.</p>
	<p>76. Біртекті сырық OA, вертикаль жазықтықта O нүктесінде топса көмегімен бекітілген. Сырықтың салмағы $P = 30H$, бұрыш $\alpha = 45^\circ$. Горизонталь \bar{F} күшінің шамасын анықтау керек.</p>

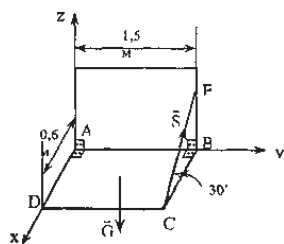
	<p>77. Суретте көрсетілген жүйенің тепе-тендік жағдайында \bar{F}_2 күшінің шамасын анықтау керек. $F_1 = 5H$, ал $OA = OB = 4m$.</p>
	<p>78. Біркалыпты таралған қарқындылық $q = 5kH/m$ күшті теңгеретін \bar{F} күшінің шамасын анықтау керек.</p>
	<p>79. Суретте көрсетілген жүйенің тепе-тендік жағдайында \bar{F}_2 күшінің шамасын анықтау керек. $F_1 = 15H$, ал $OA = OB = 3m$.</p>
	<p>80. Біркалыпты таралған қарқындылық $q = 4kH/m$ күшті теңгеретін \bar{F} күшінің шамасын анықтау керек.</p>
	<p>81. R_B реакция күшін анықтау керек.</p>
	<p>82. R_B реакция күшін анықтау керек.</p>
	<p>83. R_B реакция күшін анықтау керек.</p>
	<p>84. R_B реакция күшін анықтау керек.</p>

	85. R_B реакция күшін анықтау керек.
	86. Берілгені: $F_1 = 20H$, $F_2 = 10\sqrt{2}H$. R_B реакция күшін анықтау керек.
	87. Берілгені: $M = 100Hm$, $F = 140H$, $q = 20H/m$. Қатаң байланыстың M_A реактивті моментін анықтау керек.
	88. Берілгені: $M = 400Hm$, $q = 60H/m$. R_B реакция күшін анықтау керек.
	89. Берілгені: $F = 6\sqrt{2}H$, $q = 8H/m$. R_B реакция күшін анықтау керек.
	90. Берілгені: $F_1 = 50H$, $F_2 = 10H$. Қатаң байланыстың M_A реактивті моментін анықтау керек.
91. Кез келген кеңістік күштер жүйесінің бас векторы дегеніміз не?	
92. Кез келген кеңістік күштер жүйесінің бас моменті дегеніміз не?	
93. Кез келген кеңістік күштер жүйесінің бас векторы анықталатын формуланы жаз.	
94. Кез келген кеңістік күштер жүйесінің бас моменті анықталатын формуланы жаз.	
95. Кез келген кеңістік күштер жүйесінің тепе - теңдік шарттарының геометриялық түрі қалай тұжырымдалады?	
96. Ox өсіне параллель күштер жүйесінің тепе - теңдік шарттарының аналитикалық түрі қалай тұжырымдалады?	
97. Oy өсіне параллель күштер жүйесінің тепе - теңдік шарттарының аналитикалық түрі қалай тұжырымдалады?	

98. OZ өсіне параллель күштер жүйесінің тепе - теңдік шарттарының аналитикалық түрі қалай тұжырымдалады?

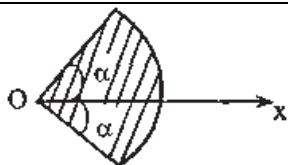


99. Байланыстардың және $F=16H$ күшінің әсеріндегі, салмағы $G=30H$ дене тепе-теңдікте болады. Ox өсіне қатысты моменттер теңдеуін пайдаланып, трос AB – ның T тартылу күшін анықтау екрек.



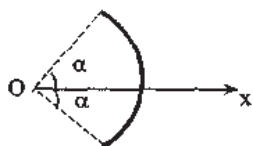
100. Салмағы $G=106H$ $ABCD$ вагон полкысы A және B нүктелерінде топсалармен және CE сырықпен вертикаль қабырғаға бекітілген. Oy өсіне қатысты моменттер теңдеуін пайдаланып, сырықтың реакция күшін анықтау керек.

101. Дененің ауырлық центрінің радиус-векторы қандай формуламен анықталады?

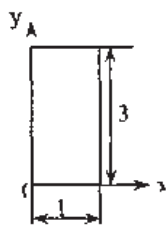


102. Дөңгелек секторы ауданының ауырлық центрінің X_C координатасын анықтайтын формуланы жаз.

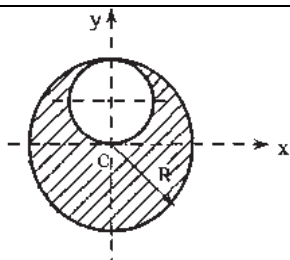
103. Кез келген үшбұрышты фигураның ауырлық центрі қандай нүктеде жатады?



104. Шеңбер доғасының ауырлық центрінің X_C координатасын анықтайтын формуланы жаз.

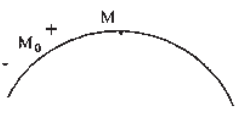
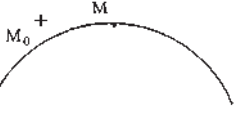


105. Суретте көрсетілген біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің X_C және Y_C координаталарын анықтайтын формулаларды жаз.



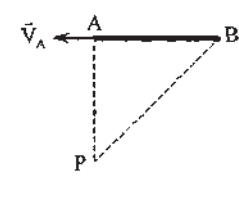
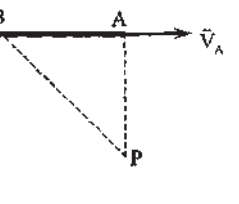
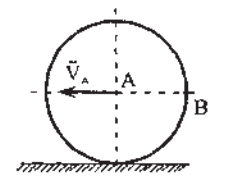
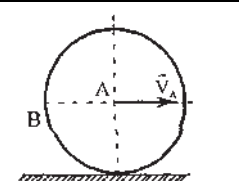
106. Штрихталған біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің X_C координатасын анықтау керек. $R=10см$.

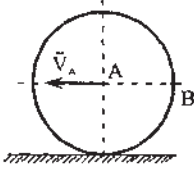
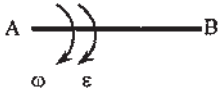
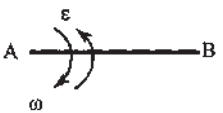
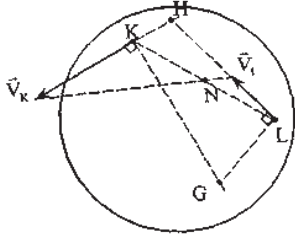
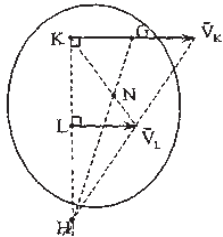
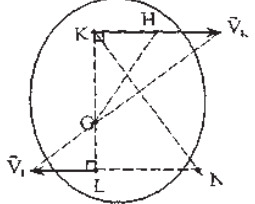
	<p>107. Штрихталған біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің Y_C координатасын анықтау керек. $R = 20\text{см}$.</p>
	<p>108. Суретте көрсетілген штрихталған біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің Y_C координатасын анықтау керек. Өлшем бірліктері суретте көрсетілген.</p>
	<p>109. Суретте көрсетілген штрихталған біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің X_C координатасын анықтау керек. Өлшем бірліктері суретте көрсетілген.</p>
	<p>110. Суретте көрсетілген штрихталған біртекті жазық фигураның ауырлық центрінің Y_C координатасын анықтау керек. Өлшем бірліктері суретте көрсетілген.</p>
<p>111. Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүкте жылдамдығын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>112. Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүкте үдеуін анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>113. Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүкте жылдамдығының шамасын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>114. Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің нормаль құраушы үдеуін анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>115. Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің толық үдеуін анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>116. Нүктенің жанама құраушы үдеуі нені сипаттайды?</p>	
<p>117. Нүктенің нормаль құраушы үдеуі нені сипаттайды?</p>	

118. Нүктенің қандай қозғалысында нормаль құраушы үдеуі нөлге тең?	
119. Егер нүкте қозғалысы бірқалыпты үдемелі түзу сызықты болса, онда нүктенің қайсы құраушы үдеуі нөлге тең болады?	
120. Егер нүкте жылдамдығы тұрақты болатын болса, онда нүкте қозғалысы қалай аталады?	
121. Егер нүктенің жанама құраушы үдеуі тұрақты болатын болса, онда нүкте қозғалысы қалай аталады?	
122. Егер нүктенің толық үдеуі нөлге тең болатын болса, онда нүкте қозғалысы қалай аталады?	
123. Егер нүктенің жанама құраушы үдеуі нөлге тең болатын болса, онда нүкте қозғалысы қалай аталады?	
124. Нүктенің қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалысын анықтайтын формуланы жаз.	
	125. $a_\tau > 0$ болған жағдайда нүктенің жанама (\vec{a}_τ) және нормаль (\vec{a}_n) үдеу құраушы векторларының суретте бағыттарын көрсет.
	126. $a_\tau < 0$ болған жағдайда нүктенің жанама (\vec{a}_τ) және нормаль (\vec{a}_n) үдеу құраушы векторларының суретте бағыттарын көрсет.
127. Нүктенің қозғалысы $S = 4t^2 + 2t$ теңдеуімен берілген. Уақыт бірлігі нешеге тең болғанда, нүктенің жылдамдығы 10 см/с -ке тең болады?	
128. Нүктенің қозғалысы $S = 3t^2 + 4t$ теңдеуімен берілген. Осы нүктенің $t = 3 \text{ с}$ уақыт мезгіліндегі толық үдеуін анықтау керек.	
129. Нүктенің қозғалысы қисық траектория бойымен $S = 15t$ теңдеуімен берілген. Нүктенің нормаль құраушы үдеуі $a_n = 15 \text{ м/с}^2$ болған сәтте, траекторияның қисықтық радиусын анықтау керек.	
130. Нүкте радиусы $R = 2 \text{ м}$ шеңбер бойымен қозғалысы $S = 5t + 4 \text{ м}$ теңдеуімен берілген. Осы нүктенің нормаль құраушы үдеуін анықтау керек.	

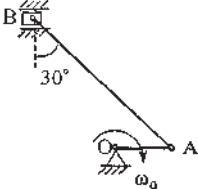
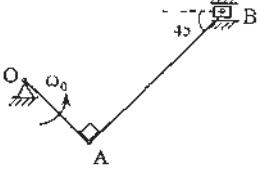
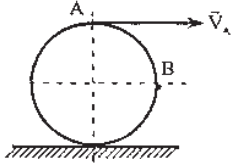
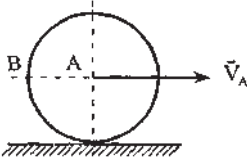
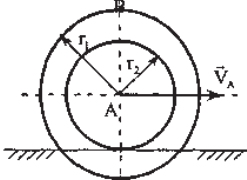
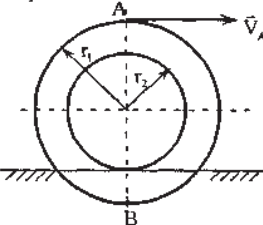
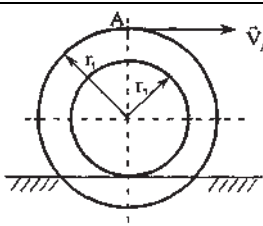
131. Нүкте қисық бойымен тұрақты 20м/с жылдамдықпен қозғалады. Нүктенің нормаль құраушы үдеуі $a_n=20\text{м/с}^2$ болған сәтте, траекторияның қисықтық радиусын анықтау керек.
132. Нүктенің қозғалысы $x=4t^2$, $y=3t^2$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте жылдамдығының шамасын анықтау керек.
133. Нүктенің қозғалысы $x=\sin(3\pi t)$, $y=\cos(3\pi t)$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте жылдамдығының шамасын анықтау керек.
134. Нүктенің қозғалысы $x=t^3$, $y=5t$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=2\text{с}$ болған сәтте нүкте жылдамдығының шамасын анықтау керек.
135. Нүктенің қозғалысы $x=0,2t^3$, $y=0,5t^2$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте жылдамдығының шамасын анықтау керек.
136. 136. Нүктенің қозғалысы $x=2t^3$, $y=6t$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=2\text{с}$ болған сәтте нүкте жылдамдығының шамасын анықтау керек.
137. Нүктенің қозғалысы $x=4t^2$, $y=3t^2$ теңдеулермен берілген. Нүкте үдеуін анықтау керек.
138. Нүктенің қозғалысы $x=\sin(2\pi t)$, $y=\cos(2\pi t)$ теңдеулермен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте үдеуінің шамасын анықтау керек.
139. Нүктенің қозғалысы $x=2t^3$, $y=6t$ теңдеулерімен берілген. Уақыт $t=3\text{с}$ болған сәтте нүкте үдеуінің шамасын анықтау керек.
140. Нүктенің қозғалысы $x=0,3t^3$, $y=0,1t$ теңдеулерімен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте үдеуінің шамасын анықтау керек.
141. Қозғалыстағы нүкте жылдамдығының координаттар өстеріне проекциялары $V_x=4t^3$, $V_y=3t^2$. теңдеулермен берілген. Уақыт $t=1\text{с}$ болған сәтте нүкте үдеуінің шамасын анықтау керек.
142. Бір қалыпты айналмалы қозғалыстағы қатты дене айналу заңдылығын жаз.
143. Бір қалыпты айнымалы айналмалы қозғалыстағы қатты дене айналу заңдылығын жаз.
144. Айналу өсінен ең жақын h қашықтықтағы қатты дене нүктесінің толық үдеуін анықтайтын формуланы жаз.
145. Айналу өсінен ең жақын h қашықтықтағы қатты дене нүктесінің центрге тартқыш үдеу құраушысын анықтайтын формуланы жаз.

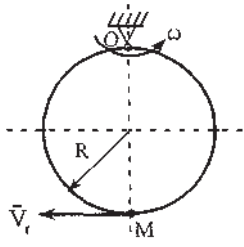
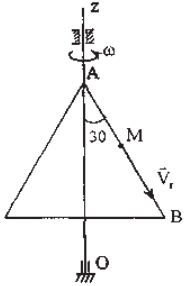
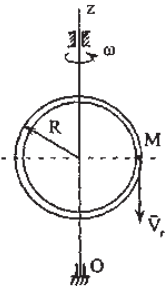
146. Айналу өсінен ең жақын h қашықтықтағы қатты дене нүктесінің жылдамдығын анықтайтын формуланы жаз.
147. Айналу өсінен ең жақын h қашықтықтағы қатты дене нүктесінің айналдырушы құраушы үдеуін анықтайтын формуланы жаз.
148. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=5t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=1c$ болған сәтте дененің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.
149. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысының бұрыштық жылдамдығы $\omega=18 - 2t^2$ (rad/c) теңдеуімен берілген. Қанша уақыттан кейін дене тоқтайды?
150. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=4t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t= 2c$ болған сәтте дененің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.
151. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=5-2t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t= 1c$ болған сәтте дененің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.
152. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=5-2t^2+2t^3$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=2c$ болған сәтте дененің бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.
153. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=5t^2$ теңдеуімен берілген. Дененің бұрыштық үдеуін анықтау керек.
154. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=5-2t^2+2t^3$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t= 4c$ болған сәтте дененің бұрыштық үдеуін анықтау керек.
155. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=4\sin(\pi t/6)$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=1c$ болған сәтте дененің бұрыштық үдеуін анықтау керек.
156. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=3t^3$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t= 4c$ болған сәтте дененің бұрыштық үдеуін анықтау керек.
157. Қатты дененің қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=2t^4$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t= 3c$ болған сәтте дененің бұрыштық үдеуін анықтау керек.
158. Доңғалақтың бұрыштық жылдамдығы $\omega=2\text{rad}/c$, ал бұрыштық үдеуі $\varepsilon=3\text{rad}/c^2$. Радиусы $0,2\text{m}$ осы доңғалақтың бетінде жатқан нүктенің үдеуін анықтау керек.

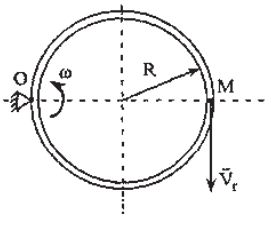
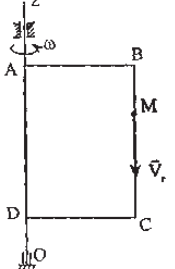
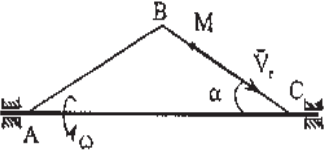
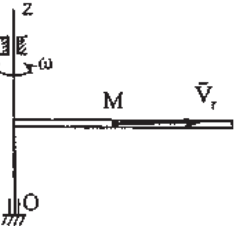
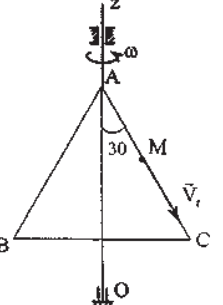
159. Доңғалақтың бұрыштық жылдамдығы $\omega=2\text{рад/с}$. Радиусы 3м осы доңғалақтың бетінде жатқан нүктенің жылдамдығын анықтау керек.	
160. Радиусы $0,5\text{м}$ доңғалақтың бетінде жатқан нүктенің центрге тартқыш құраушы үдеуі 2м/с^2 . Осы доңғалақтың бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.	
161. Радиусы 3м доңғалақтың бетінде жатқан нүктенің айналмалы құраушы үдеуі 9м/с^2 . Осы доңғалақтың бұрыштық үдеуін анықтау керек.	
162. Доңғалақтың бұрыштық жылдамдығы $\omega=2\text{рад/с}$. Радиусы $0,5\text{м}$ осы доңғалақтың бетінде жатқан нүктенің үдеуін анықтау керек.	
163. Жазық параллель қозғалыстағы дененің B нүктесінің жылдамдық векторын анықтайтын векторлық теңдеуді жаз.	
	164. Егер сырық AB жазық параллель қозғалыста, ал осы сырықтың лездік жылдамдық центрі P нүктесі болса, онда B нүктесінің жылдамдық векторы қалай бағытталады.
	165. Егер сырық AB жазық параллель қозғалыста, ал осы сырықтың лездік жылдамдық центрі P нүктесі болса, онда B нүктесінің жылдамдық векторы қалай бағытталады.
	166. B нүктесінің жылдамдық векторының бағытын суретте көрсет?
	167. B нүктесінің жылдамдық векторының бағытын суретте көрсет?
168. Лездік жылдамдық центрі P нүктесі болатын, жазық параллель қозғалыстағы фигураның A және B нүктелерінің жылдамдықтары арасындағы қатынасты жаз.	
169. Жазық параллель қозғалыстағы фигураның A нүктесін айнала қозғалғанда B нүктесінің айналмалы құраушы (a_{BA}^{ain}) үдеуі қандай формуламен анықталады?	

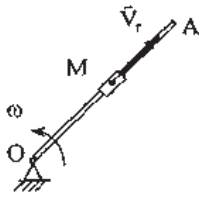
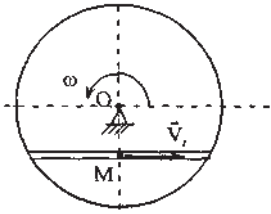
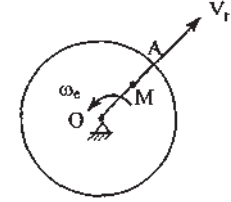
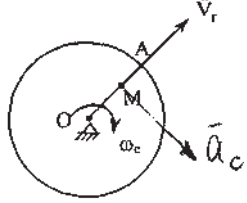
	<p>170. Жазық параллель қозғалыстағы фигураның A нүктесін айнала қозғалғанда B нүктесінің центрге тартқыш құраушы (a_{BA}^u) үдеуі қандай формуламен анықталады?</p>
<p>171. Жазық параллель қозғалыстағы фигураның лездік жылдамдық центрі деп қандай нүктені айтамыз?</p>	
<p>172. Жазық параллель қозғалыстағы дененің нүкте үдеулерін қосу туралы теореманың формуласын жаз.</p>	
	<p>173. Жазық параллель қозғалыстағы AB сырықтың \vec{a}_{BA}^u және $\vec{a}_{BA}^{aйн}$ құраушы үдеу векторларының бағытын суретте көрсет?</p>
	<p>174. Жазық параллель қозғалыстағы AB сырықтың \vec{a}_{BA}^u және $\vec{a}_{BA}^{aйн}$ құраушы үдеу векторларының бағытын суретте көрсет?</p>
	<p>175. Егер дене жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>
	<p>176. Егер дене жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>
	<p>177. Егер дене жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>


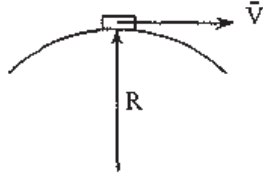
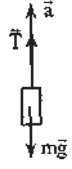

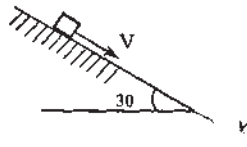
	<p>178. Егер дене жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>
	<p>179. Егер сырық KL жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>
	<p>180. Егер сырық KL жазық параллель қозғалыста болса, онда суретте лездік жылдамдық центрі қайсы нүкте болады?</p>
	<p>181. Егер нүкте P лездік жылдамдықтар центрі болса, онда жазық фигураның бұрыштық жылдамдығы қандай формуламен анықталады?</p>
	<p>182. Ұзындығы $OA=1m$ иінтірек $\omega_0=6 \text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады, ал бұлғақтың ұзындығы $AB=2m$. Суреттегі жағдайда иінтірек-жылжымалы механизмнің B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>183. Ұзындығы $OA=2m$ иінтірек $\omega_0=3 \text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады, ал бұлғақтың ұзындығы $AB=4m$. Суреттегі жағдайда иінтірек-жылжымалы механизмнің B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек (екі нүкте арқылы жүргізілген түзуге жылдамдықтардың проекциялары туралы теореманы пайдаланып).</p>
	<p>184. 184. Ұзындығы $OA=0,4m$ иінтірек $\omega_0=4 \text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады, ал бұлғақтың ұзындығы $AB=0,8m$. Суреттегі жағдайда иінтірек - жылжымалы механизмнің B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>

	<p>185. Ұзындығы $OA=0,5\text{ м}$ иіңтірек $\omega_0=4\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады, ал бұлғақтың ұзындығы $AB=1\text{ м}$. Суреттегі жағдайда иіңтірек-жылжымалы механизмнің B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>186. Ұзындығы $OA=0,5\text{ м}$ иіңтірек $\omega_0=2\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айналады, ал бұлғақтың ұзындығы $AB=4\text{ м}$. Суреттегі жағдайда иіңтірек-жылжымалы механизмнің B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>187. Егер доңғалақтың A нүктесінің жылдамдығы $V_A=4\text{ м/с}$ болса, онда B нүктесінің жылдамдығы неге тең?</p>
	<p>188. Егер доңғалақтың A нүктесінің жылдамдығы $V_A=2\text{ м/с}$ болса, онда B нүктесінің жылдамдығы неге тең?</p>
	<p>189. Радиустары $r_1=0,3\text{ м}$, $r_2=0,2\text{ м}$ сатылы доңғалақтың A нүктесінің жылдамдығы $V_A=5\text{ м/с}$. B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>190. Радиустары $r_1=3\text{ м}$, $r_2=2\text{ м}$ сатылы доңғалақтың A нүктесінің жылдамдығы $V_A=3\text{ м/с}$. B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>191. Радиустары $r_1=0,6\text{ м}$, $r_2=0,4\text{ м}$ сатылы доңғалақтың A нүктесінің жылдамдығы $V_A=2\text{ м/с}$. B нүктесінің жылдамдығын анықтау керек.</p>

	192. Нүктенің салыстырмалы қозғалысы дегеніміз не?
	193. Нүктенің тасымал қозғалысы дегеніміз не?
	194. Нүктенің абсолют қозғалысы дегеніміз не?
	195. Нүктенің салыстырмалы жылдамдығы дегеніміз не?
	196. Нүктенің абсолют жылдамдығы дегеніміз не?
	197. Нүктенің тасымал жылдамдығы дегеніміз не?
	198. Күрделі қозғалыстағы нүкте үшін жылдамдықтарды қосу туралы теореманы өрнектейтін формуланы жаз.
	199. Нүктенің кориолис удеу модулін анықтайтын формуланы жаз.
	200. Кориолис удеу векторын анықтайтын формуланы жаз.
	201. Кориолис теоремасын өрнектейтін формуланы жаз.
	202. Радиусы $R=3\text{ м}$ тегершікті бетінде нүкте M қозғалады, суретте көрсетілген уақыт мезетінде салыстырмалы жылдамдығы $V_r=4\text{ м/с}$. Тегершік O нүктесін $\omega=1\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Нүктенің абсолют жылдамдығын анықтау керек.
	203. Үшбұрыш Oz өсін $\omega=4\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала, ал нүкте M оның AB қабырғасы бойымен $V_r=3\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен қозғалады. Ара қашықтық $AM=2\text{ м}$ болғанда нүктенің абсолют жылдамдығын анықтау керек.
	204. Шарик M дөңгелек пішінді түтік бойымен $V_r=3\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен, ал радиусы $R=2\text{ м}$ түтік Oz нүктесін $\omega=2\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Суретте көрсетілген орнында шариктің абсолют жылдамдығын анықтау керек.

	<p>205. Шарик M дөңгелек пішінді түтік бойымен $V_r=0,1\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен, ал радиусы $R=0,2\text{ м}$ түтік Oz өсін $\omega=4\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Суретте көрсетілген орнында шариктің абсолют жылдамдығын анықтау керек.</p>
	<p>206. Пластина $ABCD$ Oz өсін $\omega=1\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала, ал нүкте M оның BC қабырғасы бойымен $V_r=2\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен қозғалады. Нүктенің абсолют жылдамдығын анықтау керек. $AB=2\text{ м}$.</p>
	<p>207. Үшбұрыш ABC Oz өсін $\omega=4\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала, ал нүкте M оның BC қабырғасы бойымен $V_r=2\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен қозғалады. Нүктенің кориолис удеуі модулін анықтау керек. $\alpha = 30^\circ$.</p>
	<p>208. Шарик M түтік бойымен $V_r=3\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен, ал түтік Oz өсін $\omega=5t\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Уақыт $t=3\text{ с}$ мезгілінде шариктің кориолис удеуі модулін анықтау керек.</p>
	<p>209. Пластина ABC Oz өсін $\omega=5\text{ рад/с}$ бұрыштық жылдамдықпен айнала, ал нүкте M оның AC қабырғасы бойымен $V_r=2\text{ м/с}$ салыстырмалы жылдамдықпен қозғалады. Нүктенің кориолис удеуі модулін анықтау керек. $AB=2\text{ м}$.</p>

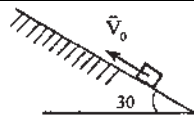
	<p>210. Жылжыма M сырық бойымен $V_r=3м/с$ салыстырмалы жылдамдықпен, ал сырық O нүктесін $\omega=2t^2 рад/с$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Уақыт $t=1с$ мезгілінде жылжыманың кориолис удеуі модулін анықтау керек.</p>
	<p>211. Нүкте M тегершіктің хордасы бойымен $V_r=2t м/с$ салыстырмалы жылдамдықпен, ал тегершік O нүктесін $\omega=2 рад/с$ бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Уақыт $t=2с$ мезгілінде шарик үшін кориолис үдеуі модулін анықтау керек.</p>
	<p>212. 212. Нүкте M тегершік радиусы бойымен \bar{v}_r салыстырмалы жылдамдықпен, ал тегершік O нүктесін ω_e бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Нүктенің кориолис үдеу векторының бағытын суретте көрсету керек.</p>
	<p>213. 213. Нүкте M тегершік радиусы бойымен \bar{v}_r салыстырмалы жылдамдықпен, ал тегершік O нүктесін ω_e бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Нүктенің кориолис үдеу векторының бағытын суретте көрсету керек.</p>
<p>214. Ньютонның бірінші заңы қалай тұжырымдалады?</p>	
<p>215. Ньютонның екінші заңын өрнектейтін формуланы жаз?</p>	
<p>216. Ньютонның үшінші заңы қалай тұжырымдалады?</p>	
<p>217. Массасы $5кг$ нүкте түзу сызықтың бойымен $F=20Н$ күш әсерінде қозғалады. Нүктенің үдеу шамасын анықтау керек.</p>	
<p>218. Горизонталь түзу сызықтың бойымен қозғалатын массасы $3кг$ нүктенің үдеуі $a=0,8м/с^2$. Қозғалыстың бағытымен бағыттас нүктеге түсірілген күштің модуль шамасын анықтау керек.</p>	

<p>219. Горизонталь түзу сызықтың бойымен қозғалатын массасы 2кг нүктенің үдеуі $a=5t^2$. Уақыт $t=3\text{с}$ мезгілінде қозғалыстың бағытымен бағыттас нүктеге түсірілген күштің модуль шамасын анықтау керек.</p>	
<p>220. Массасы 5кг нүктенің түзу сызықтың бойымен қозғалысы $x=(40t^2+8t)$ теңдеуімен берілген. Қозғалыстың бағытымен бағыттас нүктеге түсірілген күштің модуль шамасын анықтау керек.</p>	
<p>221. Массасы $m=3\text{кг}$ нүктенің түзу сызықтың бойымен қозғалысы $x=4t^3$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=3\text{с}$ мезгілінде қозғалыстың бағытымен бағыттас нүктеге түсірілген күштің модульін анықтау керек.</p>	
	<p>222. Горизонталь жол бойымен қозғалатын массасы 700кг жеңіл жүк машинаның үдеуі $a=1\text{м/с}^2$. Қосынды үйкеліс күші 100Н-ға тең. Жеңіл жүк машинасының тарту күшін анықтау керек.</p>
	<p>223. Массасы 1000кг жүк машинасы дөңес көпір бойымен $V=20\text{ м/с}$ жылдамдықпен қозғалады. Қисықтық радиусы $R=700\text{ м}$. Жүк машинасының көпірге қысым күшін анықтау керек. ($g=10\text{ м/с}^2$).</p>
	<p>224. Массасы $m=100\text{кг}$ лифт вертикаль жоғары $a=0,3\text{м/с}^2$ үдеумен көтеріледі. Тростың тартылу күшін анықтау керек.</p>
	<p>225. Массасы $m=4\text{кг}$ денені $a=0,3\text{м/с}^2$ үдеумен горизонталь бұдыр бетті жазықтықта горизонталь жіп көмегімен тартады. Үйкеліс күші $F_{\text{үйк}}=5\text{Н}$ болғанда, жіптің тартылу күшін анықтау керек.</p>
	<p>226. Материялық нүкте көлбеу жылтыр бет жазықтық бойымен тыныштық күйінен бастап қозғалады. Нүкте $S_l=10\text{м}$ жолды қанша уақытта жүріп өтетінін анықтау керек. ($g=10\text{ м/с}^2$).</p>



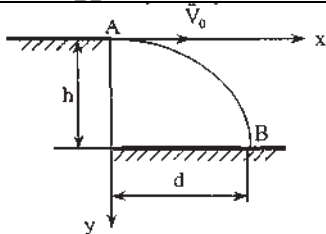
227. Массасы $m=10\text{кг}$ дене горизонталь жазықтық бойымен тыныштық күйінен бастап F күшінің әсерінен қозғалады. 10м жол жүріп өткенде, дененің жылдамдығы 5м/с -қа тең болады. Үйкеліс күші $F_{\text{үйк}}=15\text{Н}$ болғанда, жіптің тартылу күшін анықтау керек.

228. Материялық нүкте горизонталь бұдыр бетті жазықтық бойымен, $V_0=20\text{ м/с}$ бастапқы жылдамдықпен бастап қозғалады. Егер нүкте 2с -тан кейін тоқтайтын болса, онда жүріп өткен жолы неге тең болады?

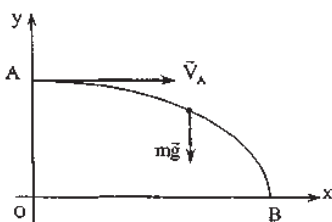


229. Материялық нүкте жылтыр бет көлбеу жазықтық бойымен жоғары $V_0=20\text{м/с}$ бастапқы жылдамдықпен қозғалады. Үш секундтан кейін жүріп өткен жолы неге тең болатынын анықтау керек. ($g=10\text{ м/с}^2$), $\alpha=30^\circ$.

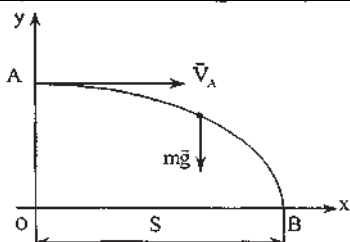
230. Материялық нүкте горизонталь бұдыр бетті жазықтық бойымен, $V_0=20\text{ м/с}$ бастапқы жылдамдықпен бастап қозғалады. Егер тоқтағанға дейін 10м жол жүрсе, онда осы жолды қанша уақытта жүріп өтетінін анықтау керек. $h=5\text{ м}$, $d=4\text{ м}$, $g=10\text{ м/с}^2$.



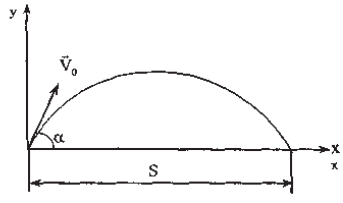
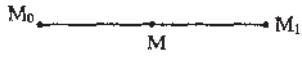
231. Материялық нүкте $V_0=20\text{м/с}$ бастапқы жылдамдықпен қозғалып бастап A нүктесінен B нүктесіне еркін құлайды. Нүкте құлайтын биіктікті анықтау керек. $d=5\text{м}$, $g=10\text{м/с}^2$.

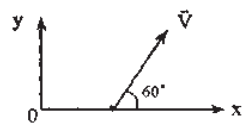
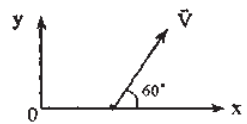
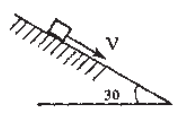
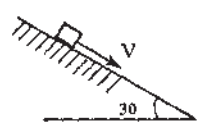
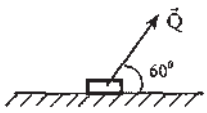




232. Материялық нүкте парабола бойымен салмақ күші әсерінде вертикаль жазықтықта қозғалады. A нүктесінде жылдамдығы жылдамдығы $V_A=15\text{м/с}$, ал биіктігі $OA=20\text{м}$ ($g=10\text{м/с}^2$). B нүкте-сіндегі жылдамдығын анықтау керек.



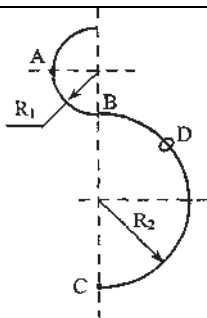
233. Материялық нүкте парабола бойымен салмақ күші әсерінде вертикаль жазықтықта қозғалады. A нүктесінде жылдамдығы $V_A=20\text{м/с}$, ал биіктігі $OA=40\text{м}$ ($g=10\text{ м/с}^2$). Нүктенің ұшу S (қашықтық OB) қашықтығын анықтау керек.

	<p>234. Снаряд горизонтпен $\alpha = 60^\circ$ бұрыш жасай $V_0 = 20 \text{ м/с}$ бастапқы жылдамдықпен лақтырылған және тек салмақ күшінің әсерінде қозғалады. Снарядтың ұшу S қашықтығын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>
<p>235. Ақырғы уақыт аралығында күш импульсін анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>236. Нүктенің қозғалыс мөлшерін анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>237. Нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрін өрнектейтін формуланы жаз.</p>	
<p>238. Нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың интегралдық түрін өрнектейтін формуланы жаз.</p>	
<p>239. Нүкте ақырғы орын ауыстырғанда нүктеге түсірілген F күші жұмысын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
	<p>240. M нүктесі M_0 орнынан M_1 орнына орын ауыстырғанда нүктеге түсірілген F күштің жұмысы нөлге тең болуы үшін бағыты қалай бағытталуы керек?</p>
<p>241. Салмақ күшінің жұмысын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>242. Серпімділік күшінің жұмысын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>243. Тұрақты үйкеліс күшінің жұмысын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>244. Материялық нүктеге түсірілген қандай күштің жұмысы мынадай формуламен анықталады $A = \pm mgh$.</p>	
<p>245. Материялық нүктеге түсірілген қандай күштің жұмысы мынадай формуламен анықталады $A = c/2(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)$.</p>	
<p>246. Материялық нүктеге түсірілген қандай күштің жұмысы мынадай формуламен анықталады $A = -fNS$.</p>	
<p>247. Нүктенің кинетикалық энергиясын анықтайтын формуланы жаз.</p>	
<p>248. Нүктенің кинетикалық энергиясы өзгеруі туралы теореманың интегралды түрін өрнектейтін формуланы жаз.</p>	
<p>249. Материялық нүкте үшін Даламбер принципін өрнектейтін формуланы жаз.</p>	
<p>250. Инерция күшін анықтайтын векторлық формуланы жаз.</p>	
<p>251. Инерция күшінің нормаль құраушы шамасын анықтайтын формуланы жаз.</p>	

<p>252. Массасы $m=3\text{кг}$ материялық нүкте $V=5\text{м/с}$ жылдамдықпен қозғалады. Қозғалыс мөлшерін анықтау керек.</p>	
	<p>253. Массасы $m=4\text{кг}$ материялық нүкте $V=2\text{м/с}$ жылдамдықпен қозғалады. Қозғалыс мөлшерінің Oy өсіне проекция шамасын анықтау керек.</p>
	<p>254. Массасы $m=4\text{кг}$ материялық нүкте $V=3\text{м/с}$ жылдамдықпен қозғалады. Қозғалыс мөлшерінің Ox өсіне проекция шамасын анықтау керек.</p>
<p>255. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшері $200\text{кг}\cdot\text{м/с}$. Егер оның массасы $m=40\text{ кг}$ болса, онда қандай жылдамдықпен қозғалатынын анықтау керек.</p>	
<p>256. Бастапқы жылдамдығы $V_0=9,8\text{ м/с}$ материялық нүкте горизонталь бұдыр бетті жазықтық бойымен қозғалып, үш секундтан кейін тоқтайды. Үйкеліс коэффициенті f - ті анықтау керек. ($g=9,8\text{ м/с}^2$).</p>	
	<p>257. Материялық нүкте көлбеу жылтыр бет жазықтық бойымен төмен қозғалады. Нүктенің жылдамдығы $V_0=5\text{ м/с}$ – тан $V_1=15\text{ м/с}$ – қа дейін өсетін уақыт аралығын анықтау керек. ($g=10\text{м/с}^2$).</p>
	<p>258. Материялық нүкте көлбеу жылтыр бет жазықтық бойымен төмен $V_0=10\text{ м/с}$ бастапқы жылдамдықпен қозғалып бастайды. Нүктенің екі секундтан кейінгі жылдамдығын анықтау керек. ($g=9,8\text{ м/с}^2$).</p>
<p>259. Нүкте вертикаль төмен қарай тыныштық күйінен бастап салмақ күшінің әсерінде қозғалады. Нүктенің жылдамдығы $9,8\text{ м/с}$ – қа өскенге дейінгі уақыт аралығын анықтау керек. ($g=9,8\text{ м/с}^2$).</p>	
	<p>260. Массасы $m=2\text{ кг}$ дене горизонтпен 60° бұрыш жасайтын $Q=10\text{ Н}$ күш әсерінде горизонталь жылтыр бет жазықтық бойымен қозғалады. Нүктенің жылдамдығы $V_0=2\text{ м/с}$ – тан $V_1=4\text{ м/с}$ – қа дейін өсетін уақыт аралығын анықтау керек.</p>

261. Дене тыныштық күйінен бастап көбеулік бұрышы 45° бұдыр бет жазықтық бойымен сырғанады. Дене мен жазықтық арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Дененің жылдамдығы $9,8\sqrt{2} \text{ м/с}$ – қа өскенге дейінгі уақыт аралығын анықтау керек. ($g=9,8 \text{ м/с}^2$).	
262. Дене тыныштық күйінен бастап көбеулік бұрышы 45° бұдыр бет жазықтық бойымен сырғанады. Дене мен жазықтық арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,2$. Дененің бір секундтан кейінгі жылдамдығын анықтау керек. ($g=9,8 \text{ м/с}^2$).	
	263. Массасы $m=2\text{кг}$ дене горизонталь $Q=30\text{Н}$ күш әсерінде горизонталь жылтыр бет жазықтық бойымен қозғалады. Нүктенің жылдамдығы $V_0=4\text{м/с}$ – тан $V_1=12\text{м/с}$ – қа дейін өсетін уақыт аралығын анықтау керек.
264. Нүкте вертикаль төмен қарай тыныштық күйінен бастап салмақ күшінің әсерінде қозғалады. Нүктенің төрт секундтан кейінгі жылдамдығын анықтау керек. ($g=10 \text{ м/с}^2$).	
265. Нүкте вертикаль жоғары $V_0=20 \text{ м/с}$ бастапқы жылдамдықпен қозғалады. Нүкте қанша секундтан кейін тоқтайтынын анықтау керек. ($g=10 \text{ м/с}^2$).	
	266. Массасы $m=1\text{кг}$ дене горизонталь $Q=20\text{Н}$ күш әсерінде горизонталь жылтыр бет жазықтық бойымен $V_0=8\text{м/с}$ бастапқы жылдамдықпен қозғалады. Дененің бір секундтан кейінгі жылдамдығын анықтау керек.
267. Массасы $m=4\text{кг}$ материялық нүкте тыныштық күйінен $V=5\text{м/с}$ жылдамдықпен қозғалады. Оның кинетикалық энергиясын анықтау керек.	
268. Массасы $m=2\text{кг}$ материялық нүктенің берілген уақыт мезетінде жылдамдығы $V_0=15\text{м/с}$ – қа тең. Осы уақыт мезетінде нүктенің кинетикалық энергиясын анықтау керек.	
269. Массасы $m=2 \text{ кг}$ материялық нүктенің кинетикалық энергиясы $T = 200 \text{ Дж}$. Нүктенің қозғалыс жылдамдығын анықтау керек.	
270. Массасы $m=5\text{кг}$ материялық нүктенің кинетикалық энергиясы $T = 1000 \text{ Дж}$. Нүктенің қозғалыс жылдамдығын анықтау керек.	

	<p>271. Массасы $m = 5 \text{ кг}$ жүк ұзындығы 10 м жіпке ілініп қойылған. Вертикаль жазықтықта жүк 1 – орнынан 2 – орнына орын ауыстырғанда салмақ күшінің жұмысын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>
	<p>272. Массасы $m = 2 \text{ кг}$ жүк ұзындығы 5 м жіпке ілініп қойылған. Вертикаль жазықтықта жүк 1 – орнынан 2 – орнына орын ауыстырғанда салмақ күшінің жұмысын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>
	<p>273. Массасы $m = 2 \text{ кг}$ материялық нүкте M радиусы $R = 4 \text{ м}$ шеңбер доғасы бойымен қозғалады. Нүкте M A – орнынан B – орнына орын ауыстырғанда салмақ күшінің жұмысын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>
<p>274. Массасы $m = 7 \text{ кг}$ материялық нүктенің 10 м биіктіктен құлағандағы салмақ күшінің жұмысын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>	
<p>275. Массасы $m = 4 \text{ кг}$ материялық нүктенің 20 м биіктікке көтерілгенде салмақ күшінің жұмысын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>	
	<p>276. Жүк ұзындығы 2 м жіпке ілініп қойылған. Вертикаль жазықтықта жүк тыныштық күйінен 1 – орнынан 2 – орнына орын ауыстырғанда жылдамдығын анықтау керек. ($g = 10 \text{ м/с}^2$).</p>
	<p>277. Жүк ұзындығы 1 м жіпке ілініп қойылған. Вертикаль жазықтықта жүк тыныштық күйінен 2 – орнынан 1 – орнына орын ауыстырғанда жылдамдығын анықтау керек. ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$).</p>

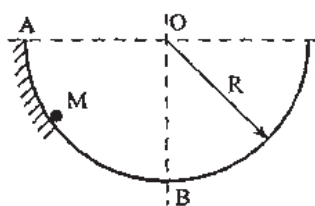


278. Вертикаль жазықтықта орналасқан радиусы $R_1=2$ м және $R_2=4$ м шеңберлер доғасы түрінде иілген ABC сым бойымен үйкеліссіз A нүктесінен тыныштық күйінен сақина D қозғалады. Сақинаның C нүктесінде жылдамдығын анықтау керек. ($g=10$ м/с²).

279. Нүкте тыныштық күйінен вертикаль жазықтықта салмақ күші әсерінде қозғалады. Оның жылдамдығы $19,6$ м/с – қа тең болғандағы жүрген жолын анықтау керек. ($g=9,8$ м/с²).

280. Материялық нүкте вертикаль жоғары $V_0=19,6$ м/с бастапқы жылдамдықпен лақтырылған. Егер оған тек салмақ күші әсер ететін болса, онда нүкте қандай жоғары биіктікке көтеріледі?

281. Дене горизонталь жазықтықта қозғалады және $S=25$ м жол жүріп тоқтайды. Жазықтық пен дененің арасындағы үйкеліс коэффициенті $f=0,1$. Бастапқы жылдамдық шамасын анықтау керек. ($g=10$ м/с²).



282. Материялық нүкте M тыныштық күйінен радиусы $R=4$ м жарты цилиндрдің ішкі бетінде салмақ күші әсерінде қозғалады. Оның B орнында жылдамдығын анықтау керек. ($g=10$ м/с²).

283. Горизонталь бұдыр бетте қозғалатын дененің жылдамдығы 8 м/с – тан 4 м/с – қа төмендейді және ол 20 м жол жүріп өтеді. Жазықтық пен дененің арасындағы үйкеліс коэффициентін анықтау керек. ($g=10$ м/с²).

284. Горизонталь жазықтық бойымен 20 м/с жылдамдықпен қозғалып келе жатқан автомобиль тормоз беріп бастайды және $S=20$ м жол жүріп тоқтайды. Үйкеліс коэффициентін анықтау керек. ($g=10$ м/с²).



285. Массасы $m=2$ кг материялық нүкте $V_0=4$ м/с бастапқы жылдамдықпен қозғалады және 8 м жол жүріп тоқтайды. Жазықтық пен нүктенің арасындағы үйкеліс күшін анықтау керек.

286. Массасы $m=2$ кг материялық нүкте түзу сызық бойымен $x=10t^2$ теңдеуімен қозғалады. Инерция күшінің шамасын анықтау керек.
287. Массасы $m=2$ кг материялық нүкте түзу сызықты $V=15t$ жылдамдықпен қозғалады. Инерция күшінің шамасын анықтау керек.
288. Массасы $m=5$ кг материялық нүкте радиусы $R=1$ м шеңбер бойымен $V=4$ м/с жылдамдықпен қозғалады. Инерция күшінің нормаль құраушы шамасын анықтау керек.
289. Массасы $m=32$ кг материялық нүкте түзу сызықты $V=5t$ жылдамдықпен қозғалады. Инерция күшінің жанама құраушы шамасын анықтау керек.
290. Материялық нүкте Ox өсіне параллель тұрақты $F_x=4$ Н күш әсерінде қозғалады. 10 сек уақыт аралығындағы Ox өсіне импульс проекциясы шамасын анықтау керек.
291. Массасы $m=1$ кг материялық нүкте тұрақты F күші әсерінде түзу сызық бойымен қозғалады. 2 сек уақыт аралығында нүктенің жылдамдығы $V_0=2$ м/с – тан $V_1=5$ м/с – қа өзгереді. Күш F шамасын анықтау керек.
292. Массасы $m=4$ кг материялық нүкте қозғалысы $S=2t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=2$ сек мезетінде осы нүктенің кинетикалық энергиясын анықтау керек.
293. Массасы $m=4$ кг материялық нүкте қозғалысы $x=5t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t=1$ сек мезетінде осы нүктенің кинетикалық энергиясын анықтау керек.
294. Массасы $m=4$ кг материялық нүкте қозғалысы $S=15t$ теңдеуімен берілген. Нүктенің қозғалыс мөлшері шамасын анықтау керек.
295. Массасы $m=50$ кг 1 – дене радиусы $R=0,4$ м 2 – барабанға оралған жіптің көмегімен қозғалады. Барабанның бұрыштық үдеуі $\varepsilon=5$ рад/сек ² . Сыртқы күштердің негізгі векторын анықтау керек.
296. Массасы $m=20$ кг тегершік қозғалмайтын өсті $\omega=5$ рад/сек бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Оның ауырлық центрі айналатын өстен $OC=0,5$ см қашықтықта орналасқан. Тегершікке түсірілген сыртқы күштердің негізгі векторын анықтау керек.
297. Тегершік қозғалмайтын өсті айнала қозғалысы $\varphi=t^3$ теңдеуімен берілген. Тегершіктің айналу өсіне қатысты инерция моменті $I=2$ кг·м ² . Уақыт $t=1$ с мезетіндегі тегершікке түсірілген қос күш моментін анықтау керек.

298. Түтік қозғалмайтын өсті айнала қозғалады, оның инерция моменті $I = 0,075 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Түтік бойымен ішкі күштер әсерінде массасы $m = 0,1 \text{ кг}$ шарик M қозғалады. Шарик өс бойында болғанда түтіктің бұрыштық жылдамдығы $\omega = 4 \text{ рад/сек}$ - тең. Қандай l қашықтықта түтіктің бұрыштық жылдамдығы $\omega = 4 \text{ рад/сек}$ - қа тең болады?

299. Массасы m және радиусы r тегершік көлбеу жазықтық бойымен сырғанамай домалайды. Бастапқы уақыт мезетінде тегершік центрінің жылдамдығы $V_C = 4 \text{ м/с}$. Тегершік тоқтағанға дейінгі центрінің жүріп өтетін жолын анықтау керек.

300. Массасы $m = 2 \text{ кг}$ материялық нүкте қозғалысы $S = 2t^2$ теңдеуімен берілген. Уақыт $t = 2 \text{ сек}$ мезетінде осы нүктенің кинетикалық энергиясын анықтау керек.

Әдебиеттер тізімі

1. Жолдасбеков Ө.А., Сағитов М.Н. Теориялық механика. – Алматы: Ғылым, 2002.
2. Тойбаев С.Н. Теориялық механика: Оқу құралы. – «Бастау», 2006.
3. Нұғыман А.М. Теориялық механика негіздері. – Семей: Шәкәрім атындағы СМУ, 2002.
4. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник в 2-х т. – М.: Наука, 2002.
5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учебник. – М.: Высшая школа, 1990.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. – М.: Наука, 2002.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Учебник: в 2-х т. – М.: Высшая школа, 2002.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие./Под ред. А.А.Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985.

Тойбаев С.Н.

**ТЕОРИЯЛЫҚ МЕХАНИКА
НЕГІЗДЕРІ
Оқулық**

Компьютерде беттеген: Ильясова С.К.

Басылуға 14.01.2016 қол қойылды.
Пішімі 60x84 1/16 . Көлемі 22,5 б.т.
Таралымы 100 дана. Тапсырыс № 700
«Нур-Принт» баспасы.



ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Тел: 8(727) 308-25-46, 8(727) 298-64-02
e-mail: nur-print@www.nur-print.k