УДК 512.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА

ПОЛИНОМНЫҢ НАҚТЫ ТҮБІРЛЕРІН АНЫҚТАУ

DEFINITION OF MATERIAL ROOTS OF THE POLYNOM

Б.К. СИНЧЕВ, А.М. МУХАНОВА, Ж.К. СЕРИКУЛОВА
B.K. SINCHYEV, A.M. MUKHANOVA, Zh.K. SERIKULOVA

(Алматинский технологический университет)
(Алматы технологиялық университеті)
(Almaty Technological University)
E-mail: nuraksulu72@mail.ru

Данная статья посвящена получению новой менее трудоемкой системы по определению числа действительных корней полинома. Полученные результаты намного облегчают определение числа действительных корней полинома за счет резкого уменьшения перемен знаков коэффициентов в новой системе Штурма, а сами коэффициенты имеют более простые зависимости по сравнению с исходным полиномом.

Бұл мақала полиномның нақты түбірлерінің санын анықтайтын еңбекті көп қажетсінбейтін жаңа Штурм жүйесін алуға арналған. Жаңа Штурм жүйесінде коэффициенттер таңбалары өзгеруінің күрт азаюы есебінен алынған нәтижелер полиномның нақты түбірлерінің санын анықтауды анағұрлым жеңілдетеді, ал коэффициенттер алғашқы полиномнан анағұрлым қарапайым тәуелділікте болады.

This article is devoted to receiving new less labor-consuming system by definition of number of the valid roots of a polynom. The received results much more facilitate definition of number of the valid roots of a polynom due to sharp reduction of changes of signs of coefficients in new system of Storm, and coefficients have simpler dependences in comparison with an initial polynom.

Ключевые слова: система Штурма, полином, теория устойчивости, теория функций, теория механизмов и машин, теорема Бюдана-Фурье.

Негізгі сөздер: штурм жүйесі, полином, тиянақтылық теориясы, функциялар теориясы, механизмдер және машиналар теориясы, Бюдан-Фурье теоремасы.

Key words: storm system, polynom, theory of stability, theory of functions, theory of mechanisms and machines, Budan-Fourier theorem.

Введение

Важные проблемы теории устойчивости, теории функций, теории механизмов и машин и др. сводятся к исследованию свойств рациональных функций, действительных и мнимых корней некоторого полинома.

Теорема Штурма полностью решает вопрос о числе действительных корней полинома. Ее существенным недостатком является громоздкость вычислений, выполняемых при построении системы Штурма [1]. Теоремы Бюдана – Фурье и Декарта не дают точного числа действительных корней. При вычислении членов ряда Штурма на основе компьютеров возможны потеря значимости числа и исчезновение порядка числа. Это приводит к потере знаков в ряде Штурма, что влечет к неправильному определению числа действительных корней полинома.

Объекты и методы исследований

Основная теорема алгебры устанавливает для любого многочлена с вещественными и комплексными коэффициентами существование всех комплексных корней. Ее доказательства не дают, однако, никаких методов для практического разыскания этих корней. Поиски таких методов начались, естественно, с попыток вывода формул, аналогичных формуле для решения квадратного уравнения. Существует много методов, позволяющих достаточно быстро находить приближенное значение корня в узком диапазоне. При широком диапазоне значения корней численные методы могут упустить некоторые корни. Поэтому теорема Штурма имеет очень важное значение при использовании существующих методов поиска корней полинома, так как она дает точное число действительных корней на отрезке.

Результаты и их обсуждение

Постановка задачи. Найти число действительных (положительных и отрицательных) корней полинома

$$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами и отсутствие положительных корней.

Решение задачи. Введем некоторые понятия.

Определение. Конечная упорядоченная система отличных от нуля полиномов с действительными коэффициентами

$$f(p) = f_0(p),\ f_1(p), \ldots\ f_m \qquad (2)$$

называется системой Штурма для полинома $f(p)$, если выполняются следующие требования:

1. Соседние полиномы системы (2) не имеют общих корней;

2. Последний полином f_m не имеет действительных корней;

3. Если α- действительный корень одного из промежуточных полиномов f_k системы (3), 1≤ k ≤ m-1 , то $f_{k-1}(\alpha)$ и $f_{k+1}(\alpha)$ имеют разные знаки.

4. Если α действительный корень полинома $f(p)$, то произведение $f(p) f_1(p)$ меняет знак с минуса на плюс, когда p, возрастая, проходит через точку α.

Нас интересуют следующие диапазоны изменения переменной в системе (3) $-\infty \le p \le \infty$, $-\infty \le p \le 0$, $0 \le p \le \infty$ и $V(p)$ – число действительных корней полинома (2).

Лемма 1. Разности $V(-\infty) - V(\infty)$, $V(-\infty) - V(0)$, $V(0) - V(\infty)$ равны числу действительных, отрицательных и положительных корней полинома (1) соответственно.

Нет необходимости приведения доказательства леммы, так как она полностью опирается на теорему Штурма.

Нам остается привести новый метод определения числа действительных корней полинома, то есть, всякий полином с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, обладает системой Штурма. Предлагается более эффективный и менее трудоемкий метод построения системы Штурма. Положим $f_1(p) = f'(p)$, чем обеспечивается выполнение условия (4) из определения системы Штурма. Действительно, если α- действительный корень полинома $f(p)$, то $f'(\alpha) \ne 0$. Если $f'(\alpha) > 0$, то $f'(p) > 0$ в окрестности точки α , а поэтому $f(p)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе p через α. Это же верно тогда и для произведения $f(p) f_1(p)$. Аналогичные рассуждения справедливы и в случае $f'(\alpha) < 0$. Делим затем $f(p)$ на $f'(p)$ и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за $f_2(p)$:

$$f_{k-2}(p) = f_{k-1}(p) g_{k-1}(p) - f_k(p), \qquad (3)$$

затем от остатка берем производную

$$f_{k+1}(p) = -f_k{}'(p), \qquad (4)$$

где $f_0(p) = f(p)$, $f_1(p) = f'(p)$.

Шаги (3), (4) повторяются для нахождения полиномов f_{k-1}, f_k, $k = 2,3,\ldots$ и так далее, до тех пор, пока не получим $f_m(p) = const$.

Изложенный здесь метод отличается от метода в [1,2], примененного к полиномам $f(p), f'(p)$, лишь тем, что кроме поиска наибольшего общего делителя в операции (4) берется производная (4) от остатка. Из взаимной простоты этих полиномов $f(p), f'(p)$ будет следовать, что на самом деле $f_m(p)$ является некоторым отличным от нуля действительным числом. Отсюда вытекает, что построенная нами система полиномов

$$f(p) = f_0(p), f'(p) = f_1(p), f_2(p), \ldots, f_m(p) \qquad (5)$$

удовлетворяет и условию 2) из определения системы Штурма. Для доказательства выполнения условия 1) предположим, что соседние полиномы $f_k(p)$ и $f_{k+1}(p)$ обладают общим корнем α. Тогда, по (3), α будет корнем и для полинома $f_{k-1}(p)$, а по (4) – $f_{k-2}(p)$. Продолжая далее, мы получим, что α служит общим корнем для $f(p)$ и $f'(p)$, что противоречит нашим предположениям. Наконец, выполнение условия 3) следует непосредственно из (3) и (4): $f_k(\alpha) = 0$, то $f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha)$ либо $f'_{k-1}(\alpha) = -f'_{k+1}(\alpha)$.

Конкретное различие этих подходов рассмотрим на примерах.

Пример 1. Установим достоинства лемм 1 и 2.

$$\sum_{i=0}^{3} c_i \lambda^{3-i} \succ 0 \quad \forall \lambda \geq 0$$

Выполнение неравенства определим из предлагаемой системы Штурма на основе леммы 1:

$$c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3,\ 3c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_2,\ \left(\frac{2}{9}\frac{c_1^2}{c_0} - \frac{2}{3}c_2\right)\lambda + \frac{1}{9}\frac{c_1c_2}{c_0} - c_3,\ \frac{2}{9}\frac{c_1^2}{c_0} - \frac{2}{3}c_2.$$

Необходимые условия положительности $c_0 \succ 0$, $c_3 \succ 0$ и условия, следующие из леммы 2 при учете уравнения $V(0) - V(\infty) = 0$,

$$c_2 \succ 0,\ \frac{2}{9}\frac{c_1^2}{c_0} - \frac{2}{3}c_2 \succ 0,\ \frac{1}{9}\frac{c_1c_2}{c_0} - c_3 \succ 0 \text{ либо } c_2 \prec 0,\ \frac{2}{9}\frac{c_1^2}{c_0} - \frac{2}{3}c_2 \prec 0,\ \frac{1}{9}\frac{c_1c_2}{c_0} - c_3 \prec 0.$$

Для сравнительного анализа приведем существующий метод, основанный непосредственно на теореме Штурма:

$$c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3,\ 3c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_2,\ \left(\frac{2}{9}\frac{c_1^2}{c_0} - \frac{2}{3}c_2\right)\lambda + \frac{1}{9}\frac{c_1c_2}{c_0} - c_3$$

$$c_2 - \frac{(c_1c_2 - 9c_0c_3)(2c_1(2c_1^2 - 6c_0c_2) - 3c_0(c_1c_2 - 9c_0c_3))}{9c_0(2c_1^2 - 6c_0c_2)}.$$

Последний член системы Штурма представляет собой сложное выражение и добавляется новый знак, который нужно исследовать.

Пример 2. Применим существующий метод Штурма к полиному:

$$f(p) = p^5 + 2p^4 - 5p^3 + 8p^2 - 7p - 3$$

и получим систему:

$$f(p) = p^5 + 2p^4 - 5p^3 + 8p^2 - 7p - 3$$
$$f_1(p) = 5p^4 + 8p^3 - 15p^2 + 16p - 7$$
$$f_2(p) = 66p^3 - 150p^2 + 172p + 61$$
$$f_3(p) = -464p^2 + 1135p + 723 \quad (6)$$
$$f_4(p) = -32599p - 8436053$$
$$f_5(p) = -9733547948$$

Определим знаки полиномов этой системы при p=–∞, p=0, p=+∞ и получим такую таблицу:

Таблица 1 – Знаки полиномов для системы (6)

	$f(p)$	$f_1(p)$	$f_2(p)$	$f_3(p)$	$f_4(p)$	$f_5(p)$	Число перемен знаков
–∞	–	+	–	–	+	–	4
+∞	+	+	+	–	–	–	1
0	–	–	+	+	–	–	2

Таким образом, число всех действительных корней равно

V (-∞) - V (∞) = 4–1= 3,

число отрицательных корней

V (-∞) - V(0) = 4–2= 2,

число положительных корней

V (0) - V (∞) = 2–1= 1.

$$f(p) = p^5 + 2p^4 - 5p^3 + 8p^2 - 7p - 3$$
$$f_1(p) = 5p^4 + 4p^3 - 15p^2 + 16p - 7$$
$$f_2(p) = 66p^3 - 150p^2 + 172p + 61$$
$$f_3(p) = 198p^2 - 300p + 172 \qquad (7)$$
$$f_4(p) = -21204p - 12938$$
$$f_5(p) = -21204$$

и таблицу 2, аналогичной таблице 1:

Рассмотрим этот же пример на основе предлагаемого метода и получим новую систему:

Таблица 2 – Знаки полиномов для системы (7)

	$f(p)$	$f_1(p)$	$f_2(p)$	$f_3(p)$	$f_4(p)$	$f_5(p)$	Число перемен знаков
–∞	–	+	–	+	+	–	4
+∞	+	+	+	+	–	–	1
0	–	–	+	+	–	–	2

Из таблицы 2 определим число действительных корней

$$V(-\infty) - V(\infty) = 4-1 = 3,$$

число отрицательных корней

$$V(-\infty) - V(0) = 4-2 = 2,$$

число положительных корней

$$V(0) - V(\infty) = 2-1 = 1.$$

Предложен метод точного определения числа вещественных корней полинома, который отличается от теоремы Штурма. Новая система по определению перемен знаков менее трудоемкая по сравнению с существующей системой Штурма. Число перемен знаков в новой системе меньше, чем в существующих системах. Последний факт важен при построении необходимых областей в пространстве коэффициентов полинома. Потеря значимости числа и исчезновение порядка коэффициентов в полученной системе не происходит. Приведенные примеры подтверждают научные положения.

Заключение

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

– найдена новая система Штурма (менее трудоемкая) по определению числа действительных корней полинома;

– число перемен знаков в полученном ряде Штурма меньше чем в исходном ряде;

– приведены примеры, иллюстрирующие эти положения.

Тем самым, новая система облегчает определение числа действительных корней полинома и ее коэффициенты в примерах намного меньше, а именно, последний коэффициент $f_5(p) = -9733547948$ в исходной системе Штурма превосходит на пять порядков по сравнению с последним коэффициентом $f_5(p) = -21204$ полученной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. - 432 с.
Корн Г., Корн Т. Справочник по матема-тике. – М.: Наука, 1973. - 831 с.