УДК 667.01

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ В ТКАНЯХ, ОДЕЖДЕ

TO THE MATHEMATICAL MODEL OF DEFINITION OF DEFORMATIONS IN FABRICS, CLOTHES

В.З. КРУЧЕНЕЦКИЙ, А.А. КАЛАБИНА, Р.О. ЖИЛИСБАЕВА, У.У. СМАЙЛОВА, С.М. РАХИМОВА
V.Z. KRUCHENETSKII, A.A. KALABINA, R.O. ZHILISBAEVA, U.U. SMAYLOVA, S.M. RAKHIMOVA

(Алматинский технологический университет, Республика Казахстан)
(Almaty Technological University, Republic of Kazakhstan)
E-mail: nauka@atu.kz

В работе рассматриваются имитационные модели определения деформаций в различных тканях, одежде, необходимые для обоснования требований, предъявляемых, в частности, при установлении конструктивно-технологических припусков. В основу представления части указанных моделей положены методы тензорного анализа. Экспериментальная проверка математических моделей с использованием инновационных методов определения деформаций в тканях, одежде с помощью цифровых технологий показала их простоту и высокую точность.

In work simulation models of definition of deformations in various fabrics, clothes, necessary for justification of requirements imposed, in particular, at establishment constructive-technological allowances are considered. Methods of the tensor analysis are the basis for representation of a part of the specified models. Experimental check of mathematical models with use of innovative methods of definition of deformations in fabrics, clothes by means of digital technologies showed their simplicity and high precision.

Ключевые слова: деформации, изделия, математические модели, одежда, тензоры, ткани.

Keywords: deformations, products, mathematical models, clothes, tensors, fabrics.

Для обоснования требований, предъявляемых к различным видам одежды, к изделиям из тканей по удобству, комфорту, дизайну, тепловым свойствам и иным характеристикам, в частности, конструктивно-технологическим припускам, необходимы сведения о деформациях, происходящих в материалах, одежде. Как известно, размеры человеческого тела не являются строго статическими, в динамике они изменяются. Причем эти изменения следуют не только во времени, но и в пространстве, являются трехмерными и, кроме того, в разных частях тела и, следовательно, и размеры одежды изменяются по-разному. Таким образом, начальный размер какого-либо участка тела L_1 на момент времени t_1 отличается от размера на другой момент времени, например, в t_2 – до L_2, на величину ΔL:

$$\Delta L= L_2-L_1. \qquad (1)$$

В выражении (1) ΔL может быть как положительным, так отрицательным. То есть в любой момент времени:

$$L= L_0 \pm \Delta L,$$

где L_0 – первоначальный до изменения размер.

В свою очередь любому текстильному материалу присуща деформация, то есть изменение размеров; точки материала меняют свое положение. Величина изменения характеризуется линейными и угловыми перемещениями в материале, что приводит к искажению его формы и изменению размеров. Деформация может быть как однородной, так и неоднородной, но в любом случае, зависящей от многих факторов, например, температуры, влажности тела, окружающей среды и др., от вида, типа материала, его качества, свойств, особенностей. Для эластичных материалов, в которых присутствует синтетика, она больше, для натуральных материалов – меньше. Также деформации зависят не только от физических свойств материалов, но и от их геометрических размеров, структуры, исходного сырья (ниток) и т.д.

В разное время были предложены различные определения деформаций. Математическим моделям аналитического определения главных деформаций (на растяжение) посвящено множество работ, в том числе выдающихся математиков: Лагранжа, Эйлера, Коши, Чебышева и др. [1...3]. Основное различие в них, как будет показано ниже, состоит в принятых переменных и их кратности.

Пусть отрезок материала имеет длину ℓ_0. В результате однородной деформации растяжение его длины становится равным ℓ_1. Тогда определение относительной деформации ε в переменных Лагранжа (ℓ_0,ℓ_1) будет:

$$\varepsilon = (\ell_1-\ell_0) / \ell_0=\Delta\ell/ \ell_0. \qquad (2)$$

Пока деформация мала, ее определение не зависит от того, относить ли к начальной длине или конечной. Деформация, отнесенная к конечной длине отрезка, равна:

$$\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0= \varepsilon/(1-\varepsilon\_) = \varepsilon-\varepsilon^2+\cdots, \qquad (3)$$

где ε – лагранжева деформация.

Разница между ε из (2) и ε из (3) является величиной второго порядка и ею, в случае ε <<1, можно пренебречь. Для больших деформаций становится значимым, к какой именно длине относить удлинение отрезка.

Представленные выше способы вычисления деформации не являются единственными и наиболее удобными. В разное время были предложены различные формулы (модели) определения деформаций: Лагранжа, Эйлера, Коши. Основные модели, построенные авторами, близкие к формулам перечисленных математиков, показаны в табл. 1 (формулы для различных определений деформаций).

Таблица 1

Название главной деформации	Формула	Название главной деформации	Формула
Лагранжева	$(\ell_1-\ell_0) / \ell_0$	Лагранжева тензорная	$(\ell_1^2-\ell_0^2) /2\ell_0^2$
Эйлерова	$(\ell_1-\ell_0) / \ell_1$	Эйлерова тензорная	$(\ell_1^2-\ell_0^2) /2\ell_1^2$
Кратность	ℓ_1/ ℓ_0	Грина-Сен-Венана тензорная	ℓ_1^2/ ℓ_0^2
Обратная кратность	ℓ_0/ ℓ_1	Алманси-Коши тензорная	ℓ_0^2/ ℓ_1^2
Логарифмическая	$\ln(\ell_0/ \ell_1)$	Комбинированная	$(\ell_1^2-\ell_0^2) /2\ell_1\ell_0$

Из табл. 1 видно, что пять из представленных определений деформаций могут быть выражены в виде единой формулы:

$$\varepsilon = (1/n) [1 - (\ell_0/ \ell_1)^n]. \qquad (4)$$

На основании этого заключаем из (4), что при значениях n=2, 1, 0, -1, -2 представленные в табл. 1 формулы, получены соответственно для эйлеровых и эйлеровых тензорных, лагранжевых и лагранжевых тензорных, логарифмических деформаций.

Что касается тензорных деформаций [1]. Напомним, *те́нзор* (от лат. tensus, напряженный) – объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элементы другого. Тензор деформации – такой тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке тела при деформации. То есть тензор – это математический объект, который не зависит от смены системы координат, но его компоненты при их смене преобразуются по определенному математическому закону. При переходе от одной системы координат к другой тензоры остаются неизменными. В данной работе основному понятию тензорного анализа – пространству, как дифференциально-геометрическому многообразию, уделено существенное внимание и рассматривается в качестве одного из основных инструментов. При изучении процессов пластического формоизменения часто используются логарифмические деформации. Представим себе процесс удлинения отрезка, имеющего первоначальную длину ℓ_0 как последовательность этапов деформирования, на каждом из которых длина получает приращение $d\ell_1$. Относительное удлинение на каждом этапе будем относить к той длине, которую имел отрезок в начале этапа $\overline{d\varepsilon} = d\ell/\ell$.

Примем за меру полного удлинения сумму бесконечно малых относительных удлинений $\overline{d\varepsilon}$ при изменении длины от ℓ_0 до ℓ_1, а именно:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{\ell_0}^{\ell_1} \frac{d\ell}{\ell} = \ln\frac{\ell_1}{\ell_0}.$$

Здесь величина $\bar{\varepsilon}$ является логарифмической или натуральной деформацией. Она удобна для описания процесса конечной деформации, поскольку если последняя производится ступенями, то суммарная деформация после n ступеней равна сумме логарифмических деформаций каждой из ступеней, то есть логарифмические деформации обладают свойством аддитивности:

$$\varepsilon = \ln\frac{l_n}{l_0} = \ln\frac{l_1}{l_0} + \ln\frac{l_2}{l_1} + \cdots + \ln\frac{l_n}{l_{n-1}} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \cdots + \bar{\varepsilon}_n. \quad (5)$$

Скорость деформации ξ представляет собой отношение скорости абсолютного удлинения к длине. Пока деформация мала, можно считать, что $d\varepsilon / dt = \xi$, но для конечных деформаций это не всегда верно. В то же время скорость деформации равна производной от логарифмической деформации по времени $\xi = \frac{\overline{d\varepsilon}}{dt}$. Условие несжимаемости для логарифмических деформаций имеет такой же вид, как и для малых деформаций, но является более точным, где V и V_0 – объемы элемента материала до и после деформации.

Тогда значения интенсивности главных логарифмических деформаций (интенсивность итоговой деформации) выражается как:

$$\bar{\Gamma} = 2\sqrt{6}\sqrt{(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)^2 + (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3)^2 + (\bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_1)^2}. \quad (6)$$

В случае монотонной деформации выражение (7) может быть приравнено к наличию степени деформации:

$$\Lambda = \int H dt, \quad (7)$$

где H – интенсивность скоростей деформации сдвига.

В общем случае для конечной пластической деформации (6) интенсивность итоговой деформации $\bar{\Gamma}$ оказывается меньше степени деформации Λ (7), определяемой как сумма интенсивностей последовательных малых деформаций. При простых видах деформации выбор ее меры является, скорее, вопросом привычки, поскольку, например, при одноосном растяжении главные деформации: эйлерова Э, лагранжева ε и логарифмическая $\bar{\varepsilon}$ связаны между собой соотношениями:

$$Э = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{\exp(\bar{\varepsilon})-1}{\exp(\bar{\varepsilon})}, \quad (8)$$

$$\varepsilon = \frac{Э}{1-Э} = \exp(\bar{\varepsilon})\text{-}1, \quad (9)$$

$$\bar{\varepsilon} = \ln(1+\varepsilon) = -\ln(1-Э). \quad (10)$$

Зависимости величины деформации от способов ее аналитического определения по представленным выше математическим моделям, в том числе тензорным (табл. 1), подтверждены экспериментально [3] и иллюстрируются с помощью рис. 1.

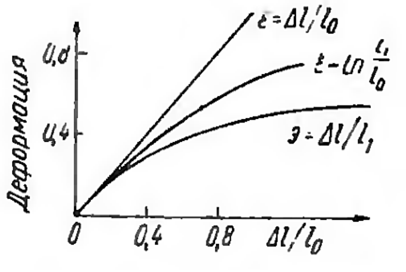

Рис. 1

В Ы В О Д Ы

Получены математические модели определения деформаций для различных текстильных материалов в сопоставлении с известными моделями Лагранжа, Эйлера, включая тензорные. Экспериментальная проверка их показала хорошую сходимость с результатами аналитических расчетов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Курнышев Б.С., Данилов С.П.* Тензорная методология в теории электротехнических систем. – Иваново: Иван. гос. энерг. ун-т, 2002.

2. *Красновеков П.С., Плиров А.А.* Принципы построения моделей. – М.: Изд.-во МГУ, 1983.

3. *Дерябина А.И., Лисиенкова Л.Н.* Исследование деформации волокнисто-сетчатых материалов методом циклического сжатия // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2013, №1. С.32...36.

R E F E R E N C E S

1. Kurnyshev B.S., Danilov S.P. Tenzornaja metodologija v teorii jelektrotehnicheskih sistem. – Ivanovo: Ivan. gos. jenerg. un-t, 2002.

2. Krasnovekov P.S., Plirov A.A. Principy postroenija modelej. – M.: Izd-vo MGU, 1983.

3. Derjabina A.I., Lisienkova L.N. Issledovanie deformacii voloknisto-setchatyh materialov metodom ciklicheskogo szhatija // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2013, №1. S.32...36.

Рекомендована Ученым советом. Поступила 02.10.18.